

Vörratused

Jan Willemson

<https://varamu.eu>

Üks võrratus

Ülesanne

Tõesta kõigi reaalarvude x korral võrratus

$$-x^4 + x^2 + 2x \geq -2x^2 .$$

Üks võrratus

Ülesanne

Tõesta kõigi reaalarvude x korral võrratus

$$-x^4 + x^2 + 2x \geq -2x^2 .$$

- Liidame ülesande võrratusele tõese võrratuse $(x^2 - 1)^2 \geq 0$ ehk

$$x^4 - 2x^2 + 1 \geq 0$$

ja saame võrratuse

$$x^2 + 2x + 1 \geq 0 ,$$

mis on samaväärne tõese võrratusega $(x + 1)^2 \geq 0$.

Üks võrratus

Ülesanne

Tõesta kõigi reaalarvude x korral võrratus

$$-x^4 + x^2 + 2x \geq -2x^2 .$$

- Liidame ülesande võrratusele tõese võrratuse $(x^2 - 1)^2 \geq 0$ ehk

$$x^4 - 2x^2 + 1 \geq 0$$

ja saame võrratuse

$$x^2 + 2x + 1 \geq 0 ,$$

mis on samaväärne tõese võrratusega $(x + 1)^2 \geq 0$.

- Aga juhul $x = 3$ saame ülesande võrratusse asendades

$$-81 + 9 + 6 \geq -2 \cdot 9$$

ehk $-66 \geq -18$, mis ei kehti. Kus on viga?

Kuidas tuleb / ei tohi võrratusi tõestada

Tee nii

Tõestatav võrratus



Võrratus



...



Võrratus



Tõene võrratus

Tee nii

Tõestatav võrratus



Võrratus



...



Võrratus



Tõene võrratus

Ära tee nii

Tõestatav võrratus



Võrratus



...



Võrratus



Tõene võrratus

Ohtlikud kohad

Eriti ettevaatlik tuleb olla, kui

- liidad tõestatavale võrratusele tõese võrratuse,
- korrutad tõestatavat võrratust tõese võrratusega või
- tõestad tõestatava võrratuse ruutu.
 - ▶ Võrratuse pooli ruutu tõstes pead olema kindel, et ruutu tõstetavad avaldised on mittenegatiivsed.

$$\begin{array}{r} + \quad -2 \geq 1 \\ \quad \quad 8 \geq 2 \\ \hline \quad \quad 6 \geq 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times \quad 1 \geq 2 \\ \quad \quad 8 \geq 2 \\ \hline \quad \quad 8 \geq 4 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -2 \geq 1 \mid ()^2 \\ \hline \quad \quad 4 \geq 1 \end{array}$$

$$x^2 \geq 0 \quad (x \in \mathbb{R})$$

$$x^2 \geq 0 \quad (x \in \mathbb{R})$$

Ülesanne

Tõesta, et suvaliste reaalarvude a , b ja c korral kehtib võrratus

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca .$$

Millal kehtib võrdus?

Lõppvoor 1993, 10. klass

Tõesta, et mistahes reaalarvuliste x ja y väärtuste korral kehtib võrratus

$$x(5x + 2) + y(4x + y) + 5 > 0.$$

Lõppvoor 1993, 10. klass

Tõesta, et mistahes reaalarvuliste x ja y väärtuste korral kehtib võrratus

$$x(5x + 2) + y(4x + y) + 5 > 0.$$

Piirkonnavoor 2018, 11. klass

Tõesta, et kõigi reaalarvude x , y ja z korral kehtib võrratus

$$2x^2 + y^2 + 2z^2 \geq 2y(x + z).$$

Piirkonnavoor 2000, 10. klass

Tõesta, et mistahes positiivsete reaalarvude a, b, c, d korral kehtib võrratus

$$ab + cd \leq \sqrt{a^2 + c^2} \cdot \sqrt{b^2 + d^2}.$$

Piirkonnavoor 2000, 10. klass

Tõesta, et mistahes positiivsete reaalarvude a, b, c, d korral kehtib võrratus

$$ab + cd \leq \sqrt{a^2 + c^2} \cdot \sqrt{b^2 + d^2}.$$

Piirkonnavoor 2021, 10. klass

Leia kõik reaalarvude kolmikud (x, y, z) , mis rahuldavad võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} xy + z^2 = x^2 + y^2 \\ yz + x^2 = y^2 + z^2 \\ zx + y^2 = z^2 + x^2 \\ xyz = 1 \end{cases}.$$

Aritmeetilise ja geomeetrilise keskmise vaheline võrratus

Teoreem

Suvaliste mittenegatiivsete reaalarvude x ja y korral kehtib võrratus

$$\frac{x + y}{2} \geq \sqrt{xy}.$$

Selles võrratuses kehtib võrdus parajasti siis, kui $x = y$.

Aritmeetilise ja geomeetrilise keskmise vaheline võrratus

Teoreem

Suvaliste mittenegatiivsete reaalarvude x ja y korral kehtib võrratus

$$\frac{x + y}{2} \geq \sqrt{xy}.$$

Selles võrratuses kehtib võrdus parajasti siis, kui $x = y$.

Tõestus 1: $(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \geq 0$.

Aritmeetilise ja geomeetrilise keskmise vaheline võrratus

Teoreem

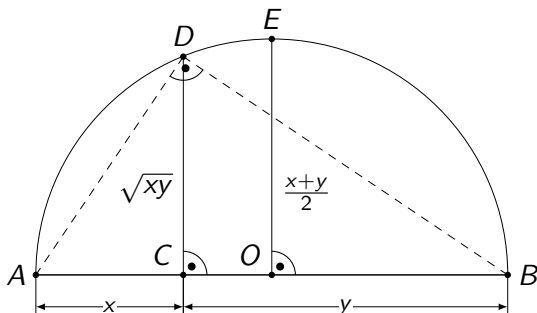
Suvaliste mittenegatiivsete reaalarvude x ja y korral kehtib võrratus

$$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}.$$

Selles võrratuses kehtib võrdus parajasti siis, kui $x = y$.

Tõestus 1: $(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \geq 0$.

Tõestus 2:



AK-GK võrratuse teised kujud

Harjutus

Tõesta, et iga positiivse reaalarvu x korral kehtib võrratus

$$x + \frac{1}{x} \geq 2.$$

Millal kehtib võrdus?

AK-GK võrratuse teised kujud

Harjutus

Tõesta, et iga positiivse reaalarvu x korral kehtib võrratus

$$x + \frac{1}{x} \geq 2.$$

Millal kehtib võrdus?

Harjutus

Tõesta, et kõigi reaalarvude x ja y korral kehtib võrratus

$$x^2 + y^2 \geq 2xy,$$

kusjuures võrdus kehtib parajasti siis kui $x = y$.

AK-GK võrratuse üldkuju

Teoreem

Olgu antud $n \geq 2$ mittenegatiivset reaalarvu x_1, x_2, \dots, x_n . Siis kehtib võrratus

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdot \dots \cdot x_n}.$$

Võrdus kehtib parajasti siis, kui $x_1 = x_2 = \dots = x_n$.

Ülesanded

Piirkonnavoor 2010, 10. klass

Tõesta, et mis tahes reaalarvude x ja y korral kehtib võrratus

$$x^2 + y^2 \geq \frac{3}{2}xy .$$

Ülesanded

Piirkonnavoor 2010, 10. klass

Tõesta, et mis tahes reaalarvude x ja y korral kehtib võrratus

$$x^2 + y^2 \geq \frac{3}{2}xy.$$

Lõppvoor 2003, 10. klass

Olgu a , b ja c positiivsed reaalarvud, mis ei ole suuremad arvust 2.

Tõesta, et kehtib võrratus $\frac{abc}{a+b+c} \leq \frac{4}{3}$.

Ülesanded

Piirkonnavoor 2010, 10. klass

Tõesta, et mis tahes reaalarvude x ja y korral kehtib võrratus

$$x^2 + y^2 \geq \frac{3}{2}xy.$$

Lõppvoor 2003, 10. klass

Olgu a , b ja c positiivsed reaalarvud, mis ei ole suuremad arvust 2.

Tõesta, et kehtib võrratus $\frac{abc}{a+b+c} \leq \frac{4}{3}$.

Lõppvoor 2003, 11. klass

Tõesta, et mistahes positiivsete reaalarvude a , b ja c korral kehtib võrratus

$$\sqrt[3]{abc} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 2\sqrt{3}.$$

Millal kehtib siin võrdus?