Polünoomid

Jan Willemson

https://varamu.eu

Polünoomi mõiste

Definitsioon

n. astme *polünoomiks* (ehk *hulkliikmeks*) *muutuja x suhtes nimetame avaldist*

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0\,,$$

kus kordajad a_i kuuluvad mingisse etteantud hulka A. Kui polünoomi pealiige $a_n = 1$, siis ütleme, et tegemist on taandatud polünoomiga.

Polünoomi mõiste

Definitsioon

n. astme polünoomiks (ehk *hulkliikmeks) muutuja x suhtes nimetame avaldist*

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0 \,,$$

kus kordajad a_i kuuluvad mingisse etteantud hulka A. Kui polünoomi pealiige $a_n = 1$, siis ütleme, et tegemist on taandatud polünoomiga.

- Koolis tavaliselt $A = \mathbb{Z}$ või $A = \mathbb{R}$.
- Aga A võib olla ka polünoomide hulk mingi teise muutuja suhtes; siis on tulemuseks mitmemuutujapolünoomid. Näiteks: polünoomi $x^2y^2 + x^2y - xy^2 - xy + 3x$ saame kirjutada nii kujul

  $$(y^2 + y)x^2 - (y^2 + y - 3)x$$

  kui ka kujul

  $$(x^2 - x)y^2 + (x^2 - x)y + 3x \,.$$

Vahepala

Küsimus

Miks polünoome üldse vaja on?

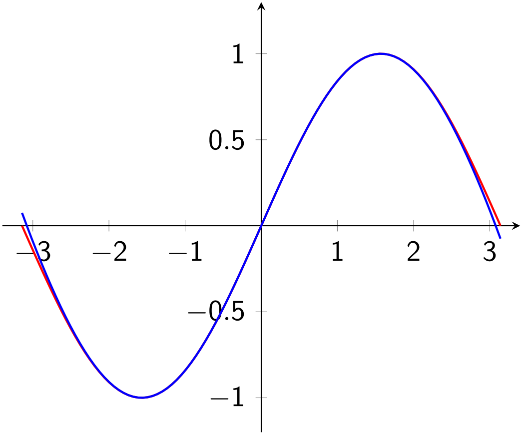
Vahepala

Küsimus

Miks polünoome üldse vaja on?

- Sest polünoome on ühest küljest *lihtne arvutada*, aga teisest küljest on polünoomide klass piisavalt rikas, et paljusid huvitavaid funktsioone hästi *lähendada*.
- Arvutiprotessor oskab madalal tasemel ainult liita-lahutada ja korrutada. Iga vähegi keerukamat funktsiooni arvutatakse teatud polünoomi abil!

Näide: siinusfunktsioon



- Polünoom

$$P(x) = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \frac{1}{5040}x^7 \,.$$

lähendab vahemikus $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ siinusfunktsiooni nii hästi, et viga jääb alla 0,02%.

Tehted polünoomidega

- Polünoome saab liita, lahutada ja korrutada.

Tehted polünoomidega

- Polünoome saab liita, lahutada ja korrutada.
- Polünoome saab ka jäägiga jagada.

Näide

Jagame polünoomi $x^4 + 2x^3 - x + 3$ polünoomiga $x^2 - x - 3$, st otsime niisuguseid polünoome $Q(x)$ ja $R(x)$, et

$$x^4 + 2x^3 - x + 3 = (x^2 - x - 3) \cdot Q(x) + R(x) \, .$$

Tehted polünoomidega

- Polünoome saab liita, lahutada ja korrutada.
- Polünoome saab ka jäägiga jagada.

Näide

Jagame polünoomi $x^4 + 2x^3 - x + 3$ polünoomiga $x^2 - x - 3$, st otsime niisuguseid polünoome $Q(x)$ ja $R(x)$, et

$$x^4 + 2x^3 - x + 3 = (x^2 - x - 3) \cdot Q(x) + R(x)\,.$$

$$\begin{array}{rrrrrl}
x^4 & +2x^3 & & -x & +3 & = \left(x^2 - x - 3\right)\left(x^2 + 3x + 6\right) + 14x + 21 \\
-x^4 & +x^3 & +3x^2 & & & \\
\hline
 & 3x^3 & +3x^2 & -x & & \\
 & -3x^3 & +3x^2 & +9x & & \\
\hline
 & & 6x^2 & +8x & +3 & \\
 & & -6x^2 & +6x & +18 & \\
\hline
 & & & 14x & +21 &
\end{array}$$

Polünoomide jaguvus ja taanduvus

Definitsioon

Ütleme, et polünoom $P(x)$ *jagub* polünoomiga $Q(x)$ ja kirjutame $P(x) \vdots Q(x)$, kui nende jagamisel tekkiv jääk on 0, st leidub selline polünoom $S(x)$, et

$$P(x) = S(x) \cdot Q(x)\,.$$

Sama seose kohta ütleme ka, et polünoom $Q(x)$ *jagab* polünoomi $P(x)$, ja kirjutame $Q(x) \mid P(x)$.

Definitsioon

Ütleme, et n. astme polünoom $P(x)$ on *taanduv*, kui leiduvad polünoomid $R(x)$ ja $S(x)$ nii, et nende aste on vähemalt 1 ja

$$P(x) = R(x) \cdot S(x)\,.$$

Kui niisuguseid polünoome $R(x)$ ja $S(x)$ ei leidu, nimetame polünoomi $P(x)$ *taandumatuks*.

Polünoomide tegurdamine

Teoreem

Kui ruutvõrrandil $ax^2 + bx + c = 0$ on lahendid x_1 ja x_2, siis kehtib iga reaalarvu x korral võrdus

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)\,.$$

Polünoomide tegurdamine

Teoreem

Kui ruutvõrrandil $ax^2 + bx + c = 0$ on lahendid x_1 ja x_2, siis kehtib iga reaalarvu x korral võrdus

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)\,.$$

Lõppvoor 1995, 9. klass

Leia kõik täisarvud n, mille korral $4n^2 + 16n - 65$ on algarv.

Bézout' (väike) teoreem

- ... aitab lihtsasti leida polünoomide lineaartegureid.

Bézout' teoreem

Polünoomi $P(x)$ jagamisel vahega $x - a$ tekkiv jääk on $P(a)$. Muuhulgas on a polünoomi $P(x)$ juureks parajasti siis, kui $(x - a) \mid P(x)$.

Bézout' (väike) teoreem

- ...aitab lihtsasti leida polünoomide lineaartegureid.

Bézout' teoreem

Polünoomi $P(x)$ jagamisel vahega $x - a$ tekkiv jääk on $P(a)$. Muuhulgas on a polünoomi $P(x)$ juureks parajasti siis, kui $(x - a) \mid P(x)$.

Teoreem

Polünoomi kordajate summa võrdub tema väärtusega kohal 1.

Bézout' (väike) teoreem

- . . . aitab lihtsasti leida polünoomide lineaartegureid.

Bézout' teoreem

Polünoomi $P(x)$ jagamisel vahega $x - a$ tekkiv jääk on $P(a)$. Muuhulgas on a polünoomi $P(x)$ juureks parajasti siis, kui $(x - a) \mid P(x)$.

Teoreem

Polünoomi kordajate summa võrdub tema väärtusega kohal 1.

Järeldus

Arv 1 on polünoomi $P(x)$ juureks (ja seega ka $P(x) \,\vdots\, (x - 1)$) parajasti siis, kui selle polünoomi kordajate summa on 0.

Ülesandeid

Lõppvoor 2021, 9. klass

Lahenda võrrand

$$x^2 + 11 = 6\left(x + \frac{1}{x}\right).$$

Ülesandeid

Lõppvoor 2021, 9. klass

Lahenda võrrand

$$x^2 + 11 = 6\left(x + \frac{1}{x}\right).$$

Piirkonnavoor 2018, 10. klass

Leia võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} x^2 + y - 2 = 0 \\ y^2 + x - 2 = 0 \end{cases}$$

kõik reaalarvulised lahendid.

Ülesandeid

Lõppvoor 2021, 9. klass

Lahenda võrrand

$$x^2 + 11 = 6\left(x + \frac{1}{x}\right).$$

Piirkonnavoor 2018, 10. klass

Leia võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} x^2 + y - 2 = 0 \\ y^2 + x - 2 = 0 \end{cases}$$

kõik reaalarvulised lahendid.

Lõppvoor 2013, 10. klass

Kas hulkliiget $x^4 + x^2 + 1$ saab esitada korrutisena hulkliikmetest, kus muutuja x astendaja on väiksem kui 4 ja kõik kordajad on reaalarvud?

Ülesandeid

Piirkonnavoor 2021, 11. klass

Leia täisarvuliste kordajatega mittenullpolünoom, mille üks juur on $\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$.

Ülesandeid

Piirkonnavoor 2021, 11. klass

Leia täisarvuliste kordajatega mittenullpolünoom, mille üks juur on $\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}$.

Piirkonnavoor 1997, 10. klass

On teada, et võrrandil $ax^2+bx+c=0$ puuduvad reaalarvulised lahendid ja $a+b+c>0$. Tõesta, et $c>0$.

Viète'i valemid

- ...aitavad omavahel siduda polünoomi kordajaid ja juuri.

Viète'i valemid ruutpolünoomi jaoks

Kui taandatud ruutpolünoomi $x^2 + px + q$ juured on x_1 ja x_2, siis kehtivad seosed

$$p = -(x_1 + x_2)\,,$$
$$q = x_1 x_2\,.$$

Viète'i valemid kuuppolünoomi jaoks

Kui taandatud kuuppolünoomi $x^3 + px^2 + qx + r$ juured on x_1, x_2 ja x_3, siis kehtivad seosed

$$p = -(x_1 + x_2 + x_3)\,,$$
$$q = x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1\,,$$
$$r = -x_1 x_2 x_3\,.$$

Ülesandeid

Piirkonnavoor 2019, 10. klass

Olgu p ja q sellised reaalarvud, et ruutvõrrandil $x^2 - px + q = 0$ on kaks reaalarvulist lahendit x_1 ja x_2. Leia $x_1^3 + x_2^3$.

Ülesandeid

Piirkonnavoor 2019, 10. klass

Olgu p ja q sellised reaalarvud, et ruutvõrrandil $x^2 - px + q = 0$ on kaks reaalarvulist lahendit x_1 ja x_2. Leia $x_1^3 + x_2^3$.

Piirkonnavoor 2020, 10. klass

Leia kõik reaalarvude paarid (p, q), mille korral ruutvõrrandil $x^2 + px + q = 0$ on kaks erinevat lahendit $\frac{p}{3}$ ja q.

Ülesandeid

Piirkonnavoor 2019, 10. klass

Olgu p ja q sellised reaalarvud, et ruutvõrrandil $x^2 - px + q = 0$ on kaks reaalarvulist lahendit x_1 ja x_2. Leia $x_1^3 + x_2^3$.

Piirkonnavoor 2020, 10. klass

Leia kõik reaalarvude paarid (p, q), mille korral ruutvõrrandil $x^2 + px + q = 0$ on kaks erinevat lahendit $\frac{p}{3}$ ja q.

Piirkonnavoor 2012, 9. klass

Leia ruutvõrrandi $x^2 + px + 12 = 0$ kordaja p kõik väärtused, mille korral selle ruutvõrrandi lahendite vahe on 1.

Ülesandeid

Piirkonnavoor 2019, 10. klass

Olgu p ja q sellised reaalarvud, et ruutvõrrandil $x^2 - px + q = 0$ on kaks reaalarvulist lahendit x_1 ja x_2. Leia $x_1^3 + x_2^3$.

Piirkonnavoor 2020, 10. klass

Leia kõik reaalarvude paarid (p, q), mille korral ruutvõrrandil $x^2 + px + q = 0$ on kaks erinevat lahendit $\frac{p}{3}$ ja q.

Piirkonnavoor 2012, 9. klass

Leia ruutvõrrandi $x^2 + px + 12 = 0$ kordaja p kõik väärtused, mille korral selle ruutvõrrandi lahendite vahe on 1.

Lõppvoor 2000, 11. klass

Leia kõik a väärtused, mille korral võrrandil $x^3 - x + a = 0$ on kolm erinevat täisarvulist lahendit.

Ülesandeid

Piirkonnavoor 2019, 10. klass

Olgu p ja q sellised reaalarvud, et ruutvõrrandil $x^2 - px + q = 0$ on kaks reaalarvulist lahendit x_1 ja x_2. Leia $x_1^3 + x_2^3$.

Piirkonnavoor 2020, 10. klass

Leia kõik reaalarvude paarid (p, q), mille korral ruutvõrrandil $x^2 + px + q = 0$ on kaks erinevat lahendit $\frac{p}{3}$ ja q.

Piirkonnavoor 2012, 9. klass

Leia ruutvõrrandi $x^2 + px + 12 = 0$ kordaja p kõik väärtused, mille korral selle ruutvõrrandi lahendite vahe on 1.

Lõppvoor 2000, 11. klass

Leia kõik a väärtused, mille korral võrrandil $x^3 - x + a = 0$ on kolm erinevat täisarvulist lahendit.