Matemaatika õpivara 7.-9. klassile

Jan Willemson

https://varamu.eu

Sisukord

1 Defineerimine ja tõestamine **5**
1.1 Definitsioonid ja defineerimine 5
1.2 Väidete tõestamine 9
1.3 Eeldus ja väide 11
1.4 Teoreemi pöördteoreem 12
1.5 Vastuväiteline tõestus 14
1.6 Olulisi tulemusi geomeetrias 15
1.6.1 Nurgapoolitaja võrdhaarses kolmnurgas 16
1.6.2 Kolmnurga välisnurga omadus 17
1.6.3 Kolmnurgas on pikema külje vastas suurem nurk 17
1.6.4 Punkti kaugus sirgest 18
1.6.5 Teoreem nurgapoolitaja punktidest 19
1.6.6 Ringjoone puutuja on risti raadiusega 21
1.6.7 Puutujalõigud on võrdsed 21
1.6.8 Kolmnurgavõrratus 22
1.6.9 Mediaan poolitab kolmnurga pindala 23
1.7 Ülesandeid harjutamiseks 24
1.8 Lahendused 24

2 Kesk- ja piirdenurk. Thalese teoreem **33**

3 Joonestame sirkli ja joonlauaga **39**
3.1 Kolmnurga joonestamine etteantud küljepikkuste järgi 40
3.2 Lahendused 41

4 Ratsionaalarvud ja irratsionaalarvud **43**
4.1 Naturaalarvud ja täisarvud 43
4.2 Ratsionaalarvud 44
4.3 Ratsionaalarvud ja kümnendmurrud 45
4.4 Irratsionaalarvud. Ruutjuur 47
4.4.1 Projektülesanne: A0, A1, A2, A3, A4, A5, ... 49
4.4.2 Projektülesanne: kuldlõige 50

4.4.3 Projektülesanne: Fibonacci arvud 51
4.5 Lahendused 52

5 Ruutvõrrand **59**
5.1 Mittetäielik ruutvõrrand kujul $ax^2 + bx = 0$ 59
5.2 Mittetäielik ruutvõrrand kujul $ax^2 + c = 0$ 60
5.3 Ruutvõrrand kujul $x^2 + 2dx + e = 0$ 60
5.4 Ruutvõrrand üldkujul $ax^2 + bx + c = 0$ 62
5.5 Lahendused 63

6 Pythagorase teoreem **67**
6.1 Pythagorase teoreem ja pöördteoreem 67
6.2 Pythagorase kolmikud 68
6.3 Järeldusi Pythagorase teoreemist 68
6.4 Lahendused 69

7 Sarnased kolmnurgad **71**
7.1 Pindalade meetod 71
7.2 Kolmnurkade sarnasus 72

8 Täisnurkse kolmnurga trigonomeetria **79**
8.1 Lahendused 82

Indeks **87**

Kirjandus **89**

PEATÜKK 1

Defineerimine ja tõestamine

1.1 Definitsioonid ja defineerimine

Igapäevastes vestlustes kasutame paljusid mõisteid ilma, et me nende täpse määratluse üle pikemalt pead murraks. Koer on koer ja auto on auto ning kuni mõlemad vestluspartnerid asjadest enam-vähem ühtmoodi aru saavad, polegi palju rohkem seletada vaja.

Paraku esineb praktikas tihti ka olukordi, kus mõistete täpsem määratlemine osutub möödapääsmatuks. Näiteks pole küsimusele „Kui palju on Eestis metsa?“ võimalik vastata ilma, et lepikisme enne kokku, misasi täpselt on mets.

Nii sätestab Metsaseadus 2025. aasta redaktsioonis[1], et metsamaa „on maatükk pindalaga vähemalt $0{,}1$ hektarit, millel kasvavad puittaimed kõrgusega vähemalt $1{,}3$ meetrit ja puuvõrade liitusega vähemalt 30 protsenti.“ Ka see määratlus pole lõpuni üheseltmõistetav. Nii näiteks on täpsustamata, kuidas maatüki pindala mõõta või kuidas hinnata puuvõrade suurust – vastavast metoodikast võib piiripealsetel juhtudel sõltuda, kas meie ees seisev võserik kvalifitseerub metsaks või mitte.

Matemaatikas on võetud eesmärgiks käsitletavate mõistete täiesti täpne ja üheseltmõistetav määratlemine ehk *defineerimine*; vastavat määratlust ennast nimetatakse *definitsiooniks*.

Täielikul täpsusel on ka oma hind. Nii pole võimalik kõigile üheselt mõistetavalt defineerida reaalseid füüsilisi objekte (nagu puu või maja), sest erinevad inimesed võivad neid tajuda erineval moel. Lisaks esineb füüsilises maailmas alati uduseid piiripealseid juhte, mille puhul pole võimalik kindlalt otsustada, kas näiteks mingi konkreetne lobudik on maja või ei.

Legend räägib, et Vana-Kreeka filosoof Platon püüdnud inimest defineerida kui sulgedeta kahejalgset. Selle peale võtnud teine filosoof, Diogenes, kana, kitkunud ta sulgedest paljaks ja viinud Platonile, sõnades: „Näe, siin on sulle

[1] https://www.riigiteataja.ee/akt/119122024006?leiaKehtiv

inimene!“

Harjutus 1.1 Jagunege paaridesse või rühmadesse. Üks paariline või rühm püüab välja pakkuda lühikesi definitsioone igapäevastele asjadele ja nähtustele (maja, auto, tool, sõprus, jne) ning teine püüab leida näiteid, mis toodud definitsioonile vastaks, kuid mis ilmselgelt kirjeldatava mõiste alla ei mahu.

Matemaatilised definitsioonid saavad niisiis käia ainult abstraktsete, ideaalsete mõistete kohta.

Üks levinud võte uue mõiste defineerimisel on tugineda mõnele teadaolevale mõistele ning seda kitsendada. Näiteks:

Definitsioon 1.1. Ruut *on ristkülik, mille kõik küljed on võrdse pikkusega.*

Nüüd kerkib muidugi küsimus, kuidas defineerida ristkülik. Sedagi saab teha üldisema nelinurga mõiste kaudu:

Definitsioon 1.2. Ristkülik *on nelinurk, mille kõik nurgad on täisnurgad.*

Selle definitsiooni mõistmiseks on omakorda vaja nelinurga ja nurga (või vähemalt täisnurga) mõistet. Niisiis peame jätkama:

Definitsioon 1.3. Nelinurk *on nelja tipuga hulknurk.*

Definitsioon 1.4. Hulknurk *on ennast mittelõikava kinnise murdjoone poolt piiratud tasandiosa.*

Definitsioon 1.5. Murdjoon *on joon, mis koosneb järjestikku paiknevatest sirglõikudest ehk lülidest, kusjuures iga lüli lõpp-punkt on ülimalt ühe järgmise lüli alguspunkt.*

Definitsioon 1.6. Sirglõik *on sirge kahe punkti vaheline punktihulk.*

Tekib küsimus, kui kaugele sellise definitsioonide jadaga minna saab. Kas tõesti lõpmatuseni?

Lõpmatust definitsioonidejadast oleks vähe kasu, sest nii ei saaks kunagi midagi ära defineeritud. Seepärast on matemaatikud kokku leppinud teatud *algmõistetes*. Geomeetria algmõistete hulka kuuluvad näiteks *punkt*, *sirge* ja *tasand*. Nendele lisanduvad veel näiteks hulgateooria algmõisted *hulk* ja *element*.

Algmõistete baasil postuleeritakse omakorda algseosed (näiteks „*element kuulub hulka*“ „*punkt kuulub sirgele*“ ja „*punkt asub sirgel kahe teise antud punkti vahel*“) ning *algväited* ehk *aksioomid* (näiteks „*kahe erineva punkti jaoks leidub täpselt üks sirge, millele need mõlemad punktid kuuluvad*“).

Küsimus, millised väited tuleks õigupoolest aksioomideks lugeda, pole kaugeltki lihtne. Tasandi geomeetria esimese aksiomaatilise ülesehituse andis ju-

ba Eukleides[2], kuid vaidlused selle üle, millised väited tuleb täpselt aksioomidena postuleerida, kestsid üle 2000 aasta (!), kuni vene matemaatik Nikolai Lobatševski[3] asjasse 19. sajandi keskpaigas lõpuks selguse tõi.

Täpsemalt käis vaidlus niinimetatud paralleelide aksioomi üle. Defineerime kõigepealt sirgete paralleelsuse.

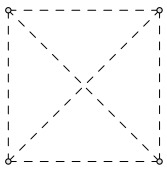
Definitsioon 1.7. *Ütleme, et kaks samal tasandil paiknevat sirget on* paralleelsed*, kui neil pole ühtegi ühist punkti.*

Paralleelide aksioomi saame nüüd sõnastada järgmiselt:

Kui punkt P ei asetse sirgel s, siis leidub nendega määratud tasandil parajasti üks sirge, mis läbib punkti P ja ei lõika sirget s.

Küsimus oli, kas seda väidet saab teistest aksioomidest tuletada või mitte. Korduvalt anti sellele väitele tõestusi ning korduvalt avastati neist tõestustest vigu, kuni Lobatševski esitas konstruktsiooni, kus kõik teised eukleidilise geomeetria aksioomid kehtivad, aga paralleelide aksioom mitte. Sellega oli näidatud, et paralleelide aksioomi ei saa teistest tuletada ning ta tuleb eraldi postuleerida.

Ükski geomeetria aksioom ei nõua otsesõnu, et tasand peab välja nägema nagu lõpmatu paberileht. On täiesti mõeldavad geomeetriad, kus on lõplik arv punkte. Vaatleme näiteks tasandit, mis koosneb neljast punktist, mis omakorda moodustavad kuus sirget:



Seda joonist tuleb mõista nii, et iga sirge koosnebki kahest puntist. Punkte ühendavad punktiirid ise ei ole sirgete osad, nad vaid markeerivad, millised punktid vastava sirge moodustavad. Muuhulgas ei tekita punktiiride lõikumine joonisel uut punkti.

Ülesanne 1.1 Kontrolli, et selle tasandi iga kahe erineva punkti jaoks leidub täpselt, üks sirge, millele need kaks punkti kuuluvad.

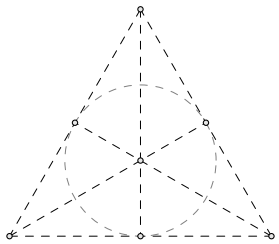
Ülesanne 1.2 Kas sellel tasandil kehtib paralleelide aksioom?

Teise näitena vaatleme *Fano tasandit*[4], millel on 7 punkti ja 7 sirget:

[2]Eukleides oli Vana-Kreeka filosoof ja matemaatik, kes elas umbes 300 aastat e.m.a. Oma teosega „Elemendid“ rajas ta süstemaatilise aluse tänapäevasele geomeetriale ja tegelikult kogu matemaatikale.

[3]Nikolai Lobatševski (1792–1856) oli vene matemaatik ja mitteeukleidilise geomeetria rajaja.

[4]Gino Fano (1871–1952) oli Itaalia matemaatik, kes on tuntud oma panuse poolest lõplike geomeetriate uurimisse.



Jällegi tuleb joonist mõista nii, et igal sirgel on kolm punkti ja punktiirid vaid markeerivad ühele sirgele kuulumist. Muuhulgas on üks „sirge“ pildil sootuks ringikujuline, aga see pole üldse tähtis.

Ülesanne 1.3 Kontrolli, et Fano tasandi iga kahe erineva punkti jaoks leidub täpselt, üks sirge, millele need kaks punkti kuuluvad.

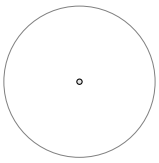
Ülesanne 1.4 Kas Fano tasandil kehtib paralleelide aksioom?

Tuleme nüüd tagasi harjumuspärase „lõpmatu paberilehe“ moodi tasandi juurde ja anname sellel ringjoone definitsiooni.

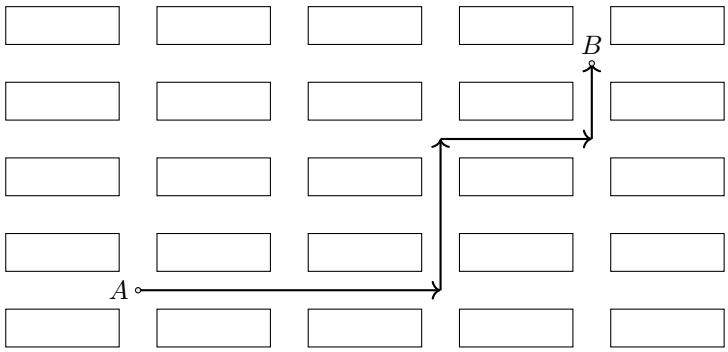
Definitsioon 1.8. Ringjooneks *nimetame tasandi punktide hulka, mis asuvad ühest fikseeritud punktist O fikseeritud kaugusel r. Punkti O nimetame selle ringjoone* keskpunktiks *ning pikkust r nimetame selle ringjoone* raadiuseks.

Kas ringjoone defineerimiseks piisab, kui meil on olemas tasandi, punkti ja hulga mõisted? Selgub, et ei piisa – lisaks kasutab definitsioon 1.8 ka *kauguse* mõistet.

Defineerides kauguse kui lühima võimaliku tee pikkuse tasandil, saame tuttava ümmarguse ringjoone:



Kas kauguse defineerimiseks on ka muid võimalusi? Selgub, et on küll. Mõtleme näiteks taksojuhile, kelle ülesanne on viia klient ühest kohast teise. Kas ta saab sõita otse? Enamasti mitte, sest ta peab liikuma mööda teid, mis viivad ümber majade, parkide, tiikide ja muude takistuste. New Yorgis on Manhattani linnaosa, mille ristuvad tänavad ja avenüüd jagavad korrapärasteks ristkülikukujulisteks kvartaliteks. See tähendab, et taksojuht saab liikuda ainult ühes kahest ristuvast sihist ning saab teha ainult täisnurkseid pöördeid.



Kui sõidu algus- ja lõpp-punktid on antud oma koordinaatidega vastavalt $A(x_A; y_A)$ ja $B(x_B; y_B)$, siis teepikkuseks, mille takso läbib, on tema x- ja y-telje sihis läbitud teepikkuste summa

$$|x_B - x_A| + |y_B - y_A| \,.$$

Niimoodi defineeritud kaugust tasandi punktide vahel nimetatakse *Manhattani kauguseks*.

Ülesanne 1.5 Millised näevad välja ringjooned tasandil, kui kasutada ringjoone definitsioonis 1.8 Manhattani kaugust?

1.2 Väidete tõestamine

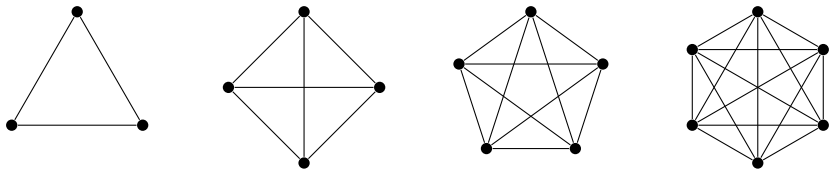
Väidete tõestamine on matemaatikas keskne kontseptsioon. Sellest johtuvalt võib öelda, et korrektselt mõtlema ja põhjendama õppimine on koolis matemaatika õpetamise kõige sügavam eesmärk üldse.

Tõestamine ei pea olema (ega tohigi olla) miski, millest rääkida kui väga keerulisest ja raskestiomandatavast teemast. Koolimatemaatika pakub palju võimalusi lihtsate (ja ilusate!) tõestuste leidmiseks ning neid võimalusi tuleks tunnis kindlasti kasutada.

Üheks võimaluseks on ülesanded, kus õpilastel lastakse näidete põhjal avastada mingi reegel ning küsitakse seejärel, kas see reegel kehtib alati. Sellised ülesanded pakuvad nii avastusrõõmu kui ka eduelamust juhul kui tõepoolest õnnestub reegli üldises kehtivuses veenduda.

Ülesanne 1.6 Kohtumisele saabus kolm ärimeest, kes kõik üksteist kättpidi tervitasid; kokku tehti kolm käepigistust. Järgmisel päeval osales kohtumisel neli ärimeest ja kui kõik kõiki tervitanud olid, loeti käepigistused jälle kokku – seekord oli tulemuseks kuus (kontrolli!). Mitu käepigistust saavad kokku viis ärimeest? Aga kuus? Kas oskad leida valemi n ärimehe käepigistuste koguarvu leidmiseks?

Lahendus. Kujutame ärimehi punktidena ja käepigistusi kriipsudena punktide vahel.



Joonte kokkulugemine annab tulemuseks järgmise tabeli:

Ärimehi	Käepigistusi
3	3
4	6
5	10
6	15

Selle tabeli reeglit pole kohe lihtne läbi näha, aga asi saab selgemaks, kui korrutada käepigistuste arvud 2-ga:

Ärimehi	2·Käepigistusi
3	6
4	12
5	20
6	30

Kui ärimehi on n, siis selles tabelis kehtib seos $2 \cdot \text{Käepigistusi} = n(n-1)$, mis annab käepigistuste arvuks $\frac{n(n-1)}{2}$. Aga kas see reegel kehtib ka üldiselt?

Osutub, et kehtib küll. Igaüks n ärimehest surub kätt igaühega $n-1$ ülejäänu seast, seega on ärimeeste kaupa lugedes käepigistusi kokku $n(n-1)$. Jääb üle tähele panna, et nõnda loendame iga käepigistust täpselt kaks korda, kord kummagi asjaosalise vaatest. Niisiis saamegi käepigistusi kokku $\frac{n(n-1)}{2}$ tükki. □

Mõnikord on reegli äraarvamine justkui lihtne, aga kas sellele õnnestub ka tõestus anda?

Ülesanne 1.7 Vali ringjoonel kaks punkti ja ühenda nad sirglõiguga. Mitmeks osaks jagab see lõik ringi? Nüüd vali ringjoonel kolm punkti ja ühenda nad kõik paarikaupa lõikudega. Mitmeks osaks ring nüüd jaguneb? Proovi sama ka ühe, nelja ja viie punktiga. Milline hüpotees tekib? Kas seda hüpoteesi õnnestub tõestada?

Siinsesse jaotisesse on autor kogunud veel rea ülesandeid, mille baasil on hea õppida eristama hüpoteesi ja tõestatud väidet. Samalaadset materjali leiab ka Lea ja Tiit Lepmanni tänuväärsest kogumikust [3].

Ülesanne 1.8 Uurime järjestikuste paaritute arvude summasid:

$$\begin{aligned} 1 &= 1\,, \\ 1+3 &= 4\,, \\ 1+3+5 &= 9\,, \\ 1+3+5+7 &= 16\,. \end{aligned}$$

Kas paned midagi tähele? Uuri, kas see tähelepanek kehtib ka järgmiste paaritute arvude korral. Kas suudad leitud reegli ka põhjendada?

Ülesanne 1.9 Uurime naturaalarvude kuupide vahesid nende arvude endiga:

$$\begin{aligned}
1^3 - 1 &= 1 - 1 = 0\,,\\
2^3 - 2 &= 8 - 2 = 6\,,\\
3^3 - 3 &= 27 - 3 = 24 = 4 \cdot 6\,,\\
4^3 - 4 &= 64 - 4 = 60 = 10 \cdot 6\,,\\
5^3 - 5 &= 125 - 5 = 120 = 20 \cdot 6\,.
\end{aligned}$$

Arvestades, et $0 = 0 \cdot 6$ ja $6 = 1 \cdot 6$, selgub, et tulemus on nende näidete puhul arvu 6 kordne (ehk jagub 6-ga). Kas see reegel kehtib alati?

Ülesanne 1.10 Joonesta (näiteks dünaamilise geomeetria programmi abil) suvaline nelinurk $ABCD$. Olgu K, L, M, N vastavalt külgede AB, BC, CD, DA keskpunktid. Pane tähele, et nelinurk $KLMN$ tuleb alati teatud liiki. Millist? Kas suudad põhjendada, miks ta alati seda liiki tuleb?

Ülesanne 1.11 Uurime avaldise $n^2 - n + 11$ väärtust $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$ korral:

$$\begin{aligned}
0^2 - 0 + 11 &= 0 + 11 = 11\,,\\
1^2 - 1 + 11 &= 0 + 11 = 11\,,\\
2^2 - 2 + 11 &= 2 + 11 = 13\,,\\
3^2 - 3 + 11 &= 6 + 11 = 17\,,\\
4^2 - 4 + 11 &= 12 + 11 = 23\,,\\
5^2 - 5 + 11 &= 20 + 11 = 31\,.
\end{aligned}$$

Kõik leitud väärtused on algarvud. Kas suudad näidata, et $n^2 - n + 11$ on algarv iga naturaalarvu n korral?

Ülesanne 1.12 Aga kuidas on lugu avaldisega $n^2 + n + 41$? Kas see annab iga naturaalarvu n korral väärtuseks algarvu?

1.3 Eeldus ja väide

Nagu nägime jaotises 1.2, ei kehti kõik väited sugugi mitte alati. Ülesandes 1.11 tuli avaldise $n^2 - n + 11$ väärtuseks algarv, kui naturaalarv n oli väiksem kui 11, aga suuremate arvude puhul enam mitte tingimata. Nii saame ülesande 1.11 väite sõnastada näiteks järgmisel kujul:

Olgu antud naturaalarv n. Kui n rahuldab võrratust $n < 11$, siis $n^2 - n + 11$ on algarv.

Matemaatilised laused pannaksegi kirja struktuuriga

Kui kehtib **VÄIDE 1**, siis kehtib **VÄIDE 2**.

VÄIDE 1 kannab seejuures nime *eeldus*, **VÄIDE 2** aga lihtsalt *väide*. Traditsiooni kohaselt võivad matemaatilised laused ise kanda erinevaid nimesid. Mõnikord öeldakse lause kohta *teoreem*, mõnikord aga ka *lemma*. Enamasti tähistab sõna *teoreem* olulisemat iseseisvat tulemust, sellal kui *lemma* on pigem abilause, mida läheb vaja mõne teoreemi tõestamisel.[5]

Ülesande 1.11 jaoks saame vastavast lausest eelduse ja väite eraldada näiteks järgmiselt.

Olgu antud naturaalarv n. Kui $n < 11$, siis $n^2 - n + 11$ on algarv.

Ülesanne 1.13 Eralda eeldus ja väide ülesannete 1.6, 1.8, 1.10 ja 1.12 tulemustele vastavatest lausetest.

Lausekonstruktsiooni „Kui … siis …“ kirjutatakse sageli ka matemaatilise sümboliga $\Rightarrow$. Tähistades naturaalarvude hulka tähega $\mathbb{N}$ ning algarvude hulka tähega $\mathbb{P}$, saame ülesande 1.11 lause kirjutada lühidalt näiteks kujul

$$n \in \mathbb{N} : n < 11 \Rightarrow n^2 - n + 11 \in \mathbb{P}\,.$$

Kui väide kehtib kõigi vaadeldava hulga elementide jaoks, ei pruugita eeldust alati ilmutatult välja kirjutadagi ja lause sõnastusse jääb sisuliselt alles ainult väide. Näiteks ülesandele 1.9 vastava lause saame sõnastada kujul

Iga naturaalarvu n korral jagub arv $n^3 - n$ arvuga 6.

Teisalt võime ka elemendi kuulumist konkreetsesse hulka pidada lause eelduseks ja sõnastada

Kui n on naturaalarv, siis jagub arv $n^3 - n$ arvuga 6.

Selline lähenemine on põhjendatud juhul, kui kõne all on erinevaid hulki ja meil on vaja eristada olukorda, kus näiteks n on just nimelt naturaal-, aga mitte ratsionaalarv.

1.4 Teoreemi pöördteoreem

Uurime paaritute naturaalarvude ruutude jääke jagamisel 4-ga.

$$\begin{aligned} 1^2 &= 1, & 1 : 4 &= 0, \text{ jääk } 1\,,\\ 3^2 &= 9, & 9 : 4 &= 2, \text{ jääk } 1\,,\\ 5^2 &= 25, & 25 : 4 &= 6, \text{ jääk } 1\,,\\ 7^2 &= 49, & 49 : 4 &= 8, \text{ jääk } 1\,. \end{aligned}$$

See, et kogu aeg tekib jääk 1, ei ole juhus. Sõnastame ja tõestame järgmise teoreemi.

[5] See ei tähenda, et lemmat oleks tingimata lihtsam tõestada! Matemaatikas juhtub tihti, et lemma tõestus on pikk ja keeruline, misjärel teoreem järeldub sellest vaid mõne lihtsa sammuga.

Teoreem 1.1 Olgu antud naturaalarv n. Kui n on paaritu, siis n^2 jääk jagamisel 4-ga on 1.

Tõestus. Paaritu naturaalarvu n saame kirjurada üldkujul $n = 2k + 1$, kus k on mingi teine naturaalarv. Uurime tema ruutu:

$$n^2 = (2k+1)^2 = (2k)^2 + 2 \cdot 2k + 1^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4(k^2 + k) + 1\,.$$

Kui k on naturaalarv, siis on seda ka $k^2 + k$, mistõttu $4(k^2 + k)$ on 4-ga jaguv naturaalarv. Niisiis annab $4(k^2 + k) + 1$ arvuga 4 jagamisel jäägi 1. □

Nüüd võime küsida, kas saame tõese lause ka siis, kui vahetame omavahel teoreemi 1.1 eelduse ja väite. Osutub, et praegusel juhul niimoodi saadav *pöördlause* (*pöördteoreem*) tõepoolest kehtib.

Teoreem 1.2 Olgu antud naturaalarv n. Kui n^2 jääk jagamisel 4-ga on 1, siis n on paaritu.

Tõestus. Kuna iga naturaalarv on kas paaris või paaritu ja paaritute naturaalarvude ruudud annavad teoreemi 1.1 põhjal 4-ga jagades jäägiks 1, piisab, kui uurime, mis toimub paarisarvude ruutudega.

Paarisarvu n saame üldkujul esitada $n = 2k$ ja tema ruudu seega kujul

$$n^2 = (2k)^2 = 4k^2\,,$$

mis jagub 4-ga, st mille jääk jagamisel 4-ga on 0. Seega kui mingi naturaalarvu ruut annab 4-ga jagamisel jäägi 1, peab see arv ise kindlasti paaritu olema. □

Tõestame veel ühe lihtsa teoreemi.

Teoreem 1.3 Olgu antud naturaalarvud m ja n. Kui m ja n on paaritud, siis $m + n$ on paaris.

Tõestus. Paaritud arvud m ja n saame üldkujul kirjutada $m = 2k+1$ ja $n = 2\ell+1$, kus k ja ℓ on mingid teised naturaalarvud. Siis

$$m + n = 2k + 1 + 2\ell + 1 = 2k + 2\ell + 2 = 2(k + \ell + 1)\,,$$

mis on paarisarv. □

Teoreemi 1.3 pöördteoreem aga ei kehti! Selles veendumiseks piisab, kui leiame pöördväite „Olgu antud naturaalarvud m ja n. Kui $m + n$ on paaris, siis m ja n on paaritud.“ jaoks *kontranäite*, st antud juhul kaks naturaalarvu, mille puhul väide ei kehti.

Ülesanne 1.14 Leia naturaalarvud m ja n millede summa on paarisarv, aga mis ei ole paaritud.

Niisiis näeme, et matemaatilise lause pöördlause on iseseisev väide, mille tõesus ei järeldu automaatselt algse lause tõesusest.

Ülesanne 1.15 Uuri, kas ülesannete 1.11 ja 1.12 lausete pöördlaused kehtivad.

Ülesanne 1.16 Tõesta, et kahe paarisarvu korrutis on paaris. Kas kehtib ka selle lause pöördlause?

Ülesanne 1.17 Tõesta, et kahe paaritu arvu korrutis on paaritu. Kas kehtib ka selle lause pöördlause?

Ülesannete 1.16 ja 1.17 väited saab üldistada järgmiseks tulemuseks.

Ülesanne 1.18 Tõesta, et kui kaks naturaalarvu annavad naturaalarvuga $t \geqslant 2$ jagades jäägi 0 (või 1), siis annab ka nende korrutis t-ga jagades jäägi 0 (või 1). Kas sama väide jääb üldjuhul kehtima, kui 0 või 1 asendada mõne teise jäägiga?

Ülesanne 1.19 Kui kahe naturaalarvu korrutis annab mingi naturaalarvuga t jagades jäägi 1, siis kas võib kindlalt väita, et kumbki algsetest arvudest annab arvuga t jagades jäägi 1?

1.5 Vastuväiteline tõestus

Tõestusi, mida siiani kohanud oleme, võib nimetada mingis mõttes otsesteks – oletame, et eeldus kehtib, ja järeldame siis samm-sammult teoreemi väite kehtivuse.

Vahel on lihtsam liikuda teises suunas – eeldame, et teoreemi väide ei kehti, ja näitame, et siis ei saa kehtida ka eeldus. Miks selline võte teoreemi tõestab?

Teoreemi tõestamiseks on meil tarvis välistada olukord, kus eeldus kehtib, aga väide mitte. Tõestades, et väite mittekehtivusest järeldub eelduse mittekehtimine, olemegi selle olukorra välistanud!

Niisugust võtet nimetatakse *vastuväiteliseks tõestuseks*. Vaatleme järgnevalt näidetena paari vastuväitelist tõestust.

Kõigepealt tõestame ühe lihtsa, kuid väga kasuliku tulemuse – Dirichlet'[6] printsiibi.

Teoreem 1.4 **(Dirichlet' printsiip)** Olgu n positiivne täisarv. Kui vähemalt $n+1$ objekti jagada n rühma, siis leidub rühm, millesse satub vähemalt kaks objekti.

Tõestus. Oletame väitevastaselt, et sellist rühma ei leidu. Siis saab igas rühmas olla ülimalt 1 objekt, mis tähendab, et n rühma peale kokku saab olla ülimalt n objekti. Jõudsime vastuoluni eeldusega, et antud on vähemalt $n+1$ objekti. □

Dirichlet' printsiip leiab palju kasutust võistlusülesannete lahendamisel.

Ülesanne 1.20 (Lõppvoor 2000, 9. klass) Tasandil on antud 2000 sirget. Tõesta, et nende hulgas leidub kaks sellist, millel on ühepalju erinevaid lõikepunkte ülejäänud sirgetega.

[6] Peter Gustav Lejeune Dirichlet [diriklee] oli 19. sajandi saksa matemaatik.

Ülesanne 1.21 (Piirkonnavoor 2011, 9.klass) Naturaalarvude $1, 4, 7, 10, \ldots, 97, 100$ hulgast valitakse välja mingid 20 arvu. Tõesta, et leiduvad kaks erinevat valitud arvu, mille summa on 104.

Ülesanne 1.22 (Piirkonnavoor 1999, 10. klass) Esimesest $2n$ positiivsest täisarvust märgitakse ära rohkem kui pooled. Tõesta, et leiduvad kaks märgitud arvu, mille summa on $2n + 1$.

Suurema valiku Dirichlet' printsiibi rakendusi leiab lugeja „Võistlusmatemaatika põhivara" 5. peatükist [7].

Järgmiseks tõestame teoreemi, mida tundis juba Eukleides.

Teoreem 1.5 Algarve on lõpmata palju.

Sellise sõnastusega on kaks probleemi. Esiteps pole ta kujul „Kui eeldus, siis väide", niisiis pole selge, mida täpsemalt eelduseks võtta. Ja teiseks – mida õigupoolest tähendab „lõpmata palju"? Niisugust naturaalarvu nagu „lõpmatus" ei ole ju olemas.

Teoreemi 1.5 saame sõnastada täpsemalt, kui asendame fraasi „lõpmata palju" fraasiga „rohkem kui ükski lõplik hulk". Muuhulgas aitab see meil eelduse ja väite selgemini esile tuua.

Kui on antud suvaline lõplik hulk algarve $P = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$, siis leidub algarv, mis hulka P ei kuulu.

Tõestus. Oletame väitevastaselt, et mingi algarvude hulk $P = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ on lõplik ja ammendav, st sisaldab kõik võimalikud algarvud. Vastuolu saamiseks konstrueerime hulgast P lähtudes uue algarvu, mida selles hulgas ei ole.

Vaatleme hulga P algarvude korrutist. Kuna hulk P on lõplik, peab tema elementide korrutis olema mingi naturaalarv. Liidame sellele korrutisele arvu 1:

$$M = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n + 1\,.$$

Kui M jaguks algarvuga p_1, peaks sama algarvuga jaguma ka vahe

$$M - p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n = 1\,,$$

aga 1 ei jagu ühegi algarvuga, niisiis ei saa ka M jaguda p_1-ga. Täpselt sama moodi näitame, et M ei saa jaguda ühegi teise algarvuga loendist $p_2, p_3, \ldots, p_n$. Järelikult peab kas M ise olema algarv või vähemalt jaguma mõne algarvuga, mida hulgas $P = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ ei ole. Igal juhul oleme saanud vastuolu oletusega, et lõplik hulk P sisaldab kõik algarvud. □

Veel ühe klassikalise vastuväitelise tõestuse anname teoreemile 4.3.

1.6 Olulisi tulemusi geomeetrias

Siinses jaotises tutvume veel mõnede lausete tõestustega. Ühest küljest annab see täiendavaid näiteid, mille baasil tõestamist õppida, teisest küljest aga on ka tõestatavad tulemused ise matemaatikas olulisel kohal.

1.6.1 Nurgapoolitaja võrdhaarses kolmnurgas

Jaotistes 1.3 ja 1.4 eristasime selguse huvides ilmutatult teoreemide eeldused ja väited. Tavaliselt kasutatakse matemaatiliste lausete sõnastamisel rohkem loomuliku keele konstruktsioone ning eelduse ja väite eristamine jäetakse lugeja hooleks.

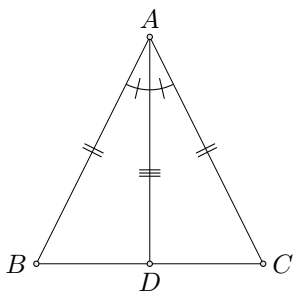
Teoreem 1.6 Võrdhaarse kolmnurga tipunurgast tõmmatud nurgapoolitaja jagab selle kolmnurga kaheks võrdseks kolmnurgaks.

Sama teoreemi saame muidugi sõnastada ka veidi pikemal kujul

Olgu antud kolmnurk. Kui see kolmnurk on võrdhaarne, siis selle kolmnurga tipunurgast tõmmatud nurgapoolitaja jagab antud kolmnurga kaheks võrdseks kolmnurgaks.

Nüüdsest alates hakkame teoreemide, järelduste ja teiste väidete sõnastusi kirjutama siiski pigem kompaktsemalt.

Tõestus. Olgu ABC võrdhaarne kolmnurk tipunurgaga A ning lõigaku sellest tipust tõmmatud nurgapoolitaja alust punktis D.



Eelduse järgi on vaadeldava kolmnurga haarad võrdsed, st $|AB| = |AC|$. Konstruktsiooni põhjal teame lisaks, et $\angle DAB = \angle CAD$.

Vaatleme kolmnurki BAD ja CAD. Neil on kaks paari võrdseid külgi ($|AB| = |AC|$ ning külg AD langeb kokku) ja nende külgede vahelised nurgad on võrdsed. Niisiis on kolmnurgad ABD ja ACD tunnuse KNK alusel võrdsed. □

Teoreemist 1.6 saame mitu huvitavat järeldust.

Järeldus 1.1 Võrdhaarse kolmnurga alusnurgad on võrdsed.

Tõestus. Teoreemi 1.6 tõestuses nägime, et kolmnurgad ABD ja ACD on võrdsed. Muuhulgas on võrdsed nende vastavad nurgad $\angle ABD = \angle ACD$, millest järeldub, et $\angle ABC = \angle ACB$. □

Järeldus 1.2 Võrdhaarse kolmnurga tipunurga poolitaja on ühtlasi mediaan.

Tõestus. Teoreemi 1.6 tõestuses nägime, et kolmnurgad ABD ja ACD on võrdsed. Muuhulgas on võrdsed nende vastavad küljed, st $|BD| = |CD|$, aga see tähendab, et AD on mediaan. □

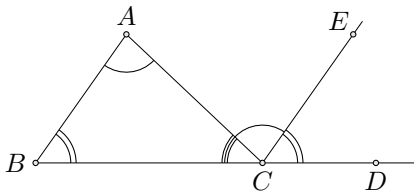
Ülesanne 1.23 Tõesta, et võrdhaarse kolmnuga tipunurga poolitaja on ka selle kolmnurga kõrgus.

Kehtib ka ülesande 1.23 pöördväide, mille tõestame ülesandes 1.28.

1.6.2 Kolmnurga välisnurga omadus

Teoreem 1.7 Kolmnurga ühe nurga juures asuva välisnurga suurus on võrdne kahe ülejäänud nurga suuruste summaga.

Tõestus. Pikendame kolmnurga ABC külge BC üle tipu C; olgu D suvaline punkt sellel pikendusel. Seega tuleb näidata, et $\angle ACD = \angle CAB + \angle ABC$.



Tõmbame tipust C kiirega BA paralleelse kiire CE. Põiknurkade omadusest teame, et $\angle ACE = \angle CAB$, kaasnurkade omadusest aga, et $\angle ECD = \angle ABC$. Kokkuvõtes

$$\angle ACD = \angle ACE + \angle ECD = \angle CAB + \angle ABC\,,$$

mida oligi tarvis tõestada. □

Teoreemist 1.7 saame kaks väga olulist järeldust.

Järeldus 1.3 Kolmnurga sisenurkade summa võrdub sirgnurgaga $180°$.

Tõestus. Kasutades teoreemi 1.7 joonist ja tähiseid saame

$$\angle CAB + \angle ABC + \angle BCA = \angle ACE + \angle ECD + \angle BCA = 180°\,.$$

□

Järeldus 1.4 Kolmnurga tipu juures asuv välisnurk on suurem kui kumbki ülejäänud nurk.

Tõestus. Teoreemi 1.7 tähistes peame tõestama, et $\angle ACD > \angle CAB$. Kasutame teoreemi 1.7:

$$\angle ACD = \angle CAB + \angle ABC > \angle CAB\,,$$

sest kolmnurga nurgad (sh ABC) on positiivse suurusega.

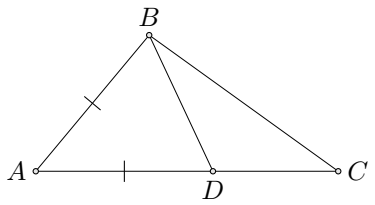
Analoogiliselt tõstame, et $\angle ACD > \angle ABC$. □

1.6.3 Kolmnurgas on pikema külje vastas suurem nurk

Teoreem 1.8 Kolmnurgas on pikema külje vastas suurem nurk.

Tõestus. Vaatleme kolmnurka ABC, kus $|AC| > |AB|$, ja tõestame, et $\angle CBA > \angle ACB$.

Valime küljel AC punkti D nii, et $|AB| = |AD|$. Kuna eelduse põhjal $|AC| > |AB|$, asub punkt D kindlasti lõigu AC sisepiirkonnas. Seega $\angle CBA = \angle CBD + \angle DBA$



Kuna $|AB| = |AD|$, on kolmnurk ABD võrdhaarne. Järelduse 1.1 põhjal saame $\angle DBA = \angle ADB$.

Nurk ADB on nurga BDC välisnurk kolmnurgas BDC, seega järelduse 1.4 põhjal $\angle ADB > \angle DCB$.

Kõike tõestatut kokku pannes saame

$$\angle CBA = \angle CBD + \angle DBA > \angle DBA = \angle ADB > \angle DCB = \angle ACB\,,$$

kust järeldubki $\angle CBA > \angle ACB$.

□

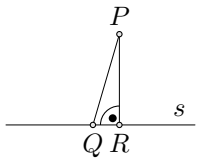
1.6.4 Punkti kaugus sirgest

Definitsioon 1.9. *Olgu tasandil antud punkt P ja sirge s. Vaatleme sirgel s niisugust punkti Q, mille korral lõigu PQ pikkus on vähim võimalik. Seda lõigupikkust $|PQ|$ nimetatakse* punkti P kauguseks sirgest s.

On selge, et punkti kaugus sirgest on 0 parajasti siis, kui antud punkt kuulub vaadeldavale sirgele. Muudel juhtudel saame uurida sirge s ja kaugust realiseeriva lõigu PQ omavahelist asendit.

Teoreem 1.9 Kui definitsiooni 1.9 püstituses $P \notin s$, siis selles definitsioonis määratud punkti Q korral on s ja PQ risti.

Tõestus. Oletame väitevastaselt, et sirge s ja lõik PQ ei ole risti. Tõmbame punktist P sirgele s ristlõigu PR; siis $R \neq Q$ ning punktid P, Q ja R moodustavad kolmnurga.



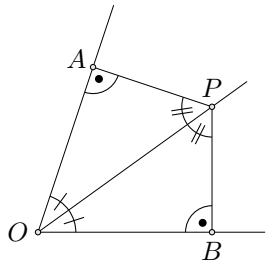
Kuna konstruktsiooni põhjal $PR \perp s$, on kolmnurk PQR täisnurkne täisnurgaga tipu R juures. Kuna kolmnurga nurkade summa on $180°$, peab nurga PQR suurus olema väiksem kui $90°$. Teoreemi 1.8 abil aga järeldub siit, et lõik PR peab olema lühem kui PQ. Saime vastuolu punkti Q valikuga. Niisiis peab tegelikult kehtima seos $PQ \perp s$. □

Teoreemi 1.9 tõestusest näeme muuhulgas, et punktist P sirgele s tõmmatud ristlõigu pikkus vastabki täpselt punkti P kaugusele sirgest s.

1.6.5 Teoreem nurgapoolitaja punktidest

Teoreem 1.10 Nurga poolitaja iga punkt asub nurga haaradest samal kaugusel.

Tõestus. Olgu nurga tipp O ning vaatleme suvalist punkti P selle nurga poolitajal. Olgu punktist P nurga haaradele tõmmatud ristlõikude alused vastavalt A ja B. Kuna punkti P kaugused nurga haaradest on $|AP|$ ja $|BP|$, tuleb tõestada, et $|AP| = |BP|$.



Et P asub nurga AOB poolitajal, saame $\angle AOP = \angle POB$. Teisest küljest konstruktsiooni põhjal $\angle PAO = 90° = \angle OBP$. Niisiis on kolmnurkadel AOP ja BOP kaks paari vastavalt võrdseid nurki. Kuna kõigi kolmnurkade nurkade summa on $180°$, peab võrduma ka kolmas paar nurki, st $\angle OPA = \angle BPO$.

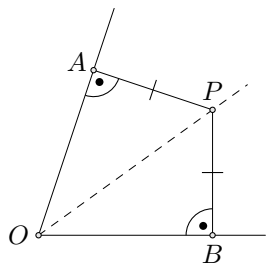
Et külg OP on kolmnurkadel AOP ja BOP ühine, on need kolmurgad võrdsed tunnuse NKN alusel. Järelikult on võrduvad ka nende teised küljed; muuhulgas $|AP| = |BP|$, mida oligi tarvis tõestada.

□

Kehtib ka teoreemi 1.10 pöördteoreem, mille võime sõnastada järgmiselt:

Teoreem 1.11 Kui nurga sisepiirkonna punkt asub nurga haaradest võrdsel kaugusel, asub see punkt ka antud nurga poolitajal.

Pöördteoreemi tõestamine aga ei lähe niisama libedalt. Olgu antud punktist P nurga haaradele tõmmatud ristlõikude alused jälle A ja B.



Nüüd teame kolmnurkades AOP ja BOP, et $\angle PAO = 90° = \angle OBP$ ja $|AP| = |BP|$ ning et külg OP on ühine. Aga kuna täisnurk pole vastavalt võrdsete külgede vahel, ei saa me otse KNK tunnuse abil järeldada, et kolmnurgad AOP ja BOP on võrdsed.

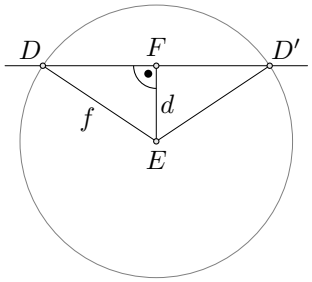
Antud juhul see võrdsus siiski kehtib. Selleks piisab, kui suudame näidata, et ka $|AO| = |BO|$. Üks võimalus on siinkohal kasutada Pythagorase teoreemi, aga seda õpime alles teoreemina 6.1 jaotises 6.1.

Teine võimalus on sõnastada ja tõestada järgmine abitulemus ehk lemma.

Lemma 1.1 Täisnurkse kolmnurga hüpotenuus ja üks kaatet määravad teise kaateti pikkuse üheselt ära.

Tõestus. Olgu antud täisnurkse kolmnurga DEF kaateti pikkus d ja hüpotenuusi pikkus f. Joonestame kaateti EF pikkusega d ning tõmbame talle punktist F ristsirge. Kolmnurga kolmas tipp D peab siis asuma sellel sirgel.

Kuna teisest küljest peab hüpotenuusi DE pikkus olema f, peab punkt D asuma ringjoonel, mille keskpunkt on E ning raadius f.



Et kaatet asub teravnurga, hüpotenuus aga täisnurga vastas, on kaatet teoreemi 1.8 põhjal hüpotenuusist lühem, st $d < f$. Seega lõikuvad joonestatud ristsirge ja ringjoon kahes punktis; olgu need punktid D ja D'.

Niisiis on etteantud kaatetile etteantud pikkusega hüpotenuusiga täisnurkse kolmnurga joonestamiseks kaks võimalust; joonise tähistes tekivad kolmnurgad DEF ja $D'EF$. Lemma tõestamiseks peame näitama, et teise kaateti pikkus on üheselt määratud, st $|DF| = |D'F|$.

Kolmnurk DED' on võrdhaarne ja EF on selle kõrgus. Ülesandest 1.23 järeldub, et EF peab siis olema ka nurga DED' poolitaja. Järeldusest 1.2 saame omakorda, et EF peab olema ka mediaan, st F poolitab lõigu DD'. Sellega oleme lemma väite tõestanud. □

Tulles tagasi teoreemi 1.11 juurde järeldub lemmast 1.1 võrdus $|OA| = |OB|$ ning seega ka kolmnurkade AOP ja BOP võrdsus. Muuhulgas $\angle AOP = \angle BOP$, st P asub nurga AOB poolitajal. Sellega on teoreem 1.11 tõestatud.

1.6.6 Ringjoone puutuja on risti raadiusega

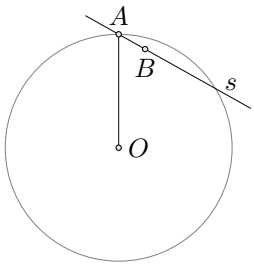
Definitsioon 1.10. *Ringjoone* puutujaks *nimetame sirget, millel on ringjoonega täpselt üks ühine punkt.*

Teoreem 1.12 Ringjoone puutuja on risti puutepunktist tõmmatud raadiusega.

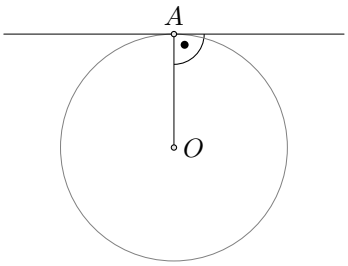
Tõestus. Olgu antud ringjoon keskpunktiga O. Valime ringjoonel punkti A ning tõmbame ringjoonele sellest puutuja s. Peame tõestama, et $s \perp OA$.

Selleks saame kasutada teoreemi 1.9, mille põhjal piisab näidata, et A on sirge s punktidest punktile O kõige lähemal. (On selge, et punti O ise ei asu sirgel s, muidu peaks sirgel s olema ringjoonega kaks lõikepunkti.)

Oletame väitevastaselt, et leidub punkt $B \in s$ nii, et $|OB| < |OA|$. Muuhulgas järeldub siit, et B peab asuma ringjoonega piiratud ringi sisepiirkonnas. See aga tähendab omakorda, et sirge AB (ehk sirge s) peab ringjoont lõikama kahes punktis ega saa seetõttu olla puutuja.



Oleme saanud vastuolu eeldusega $|OB| < |OA|$, järelikult peab A tõepoolest olema punktile O lähim punkt sirgel s. Teoreemi 1.9 põhjal tähendab see, et $s \perp OA$. □

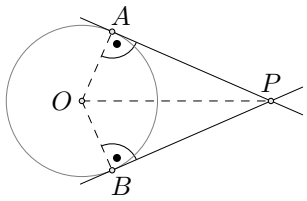


1.6.7 Puutujalõigud on võrdsed

Ringjoonest väljaspool asuvast punktist P saab ringjoonele tõmmata kaks puutujat. Olgu puutepunktid vastavalt A ja B, siis lõike PA ja PB nimetatakse *puutujalõikudeks*.

Teoreem 1.13 Ringjoonele samast punktist tõmmatud puutujalõigud on võrdse pikkusega.

Tõestus. Olgu vaadeldava ringjoone keskpunkt O. Teeme joonise.



Teoreemist 1.12 teame, et kolmnurgad OAP ja OBP on täisnurksed. Nende hüpotenuusid langevad kokku ja lisaks on neil üks paar võrdse pikkusega kaateteid OA ja OB. Lemma 1.1 põhjal järeldub siit, et võrdsed peavad olema ka teised kaatetid, st $|AP| = |BP|$, mida oligi tarvis tõestada. □

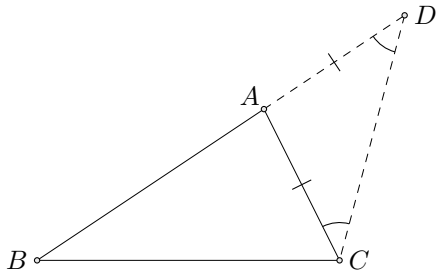
1.6.8 Kolmnurgavõrratus

Kolmnurgavõrratus on lihtne erijuht tähelepanekust, et kõige lühem tee tasandi kahe punkti vahel on sirglõik.

Teoreem 1.14 **(Kolmnurgavõrratus)** Kolmnurgas ABC kehtib võrratus

$$|AB| + |AC| > |BC| \,.$$

Tõestus. Pikendame külge AB üle tipu A kuni punktini D, nii et $|AD| = |AC|$.



Kolmnurk ACD on konstruktsiooni põhjal võrdhaarne, seega $\angle ACD = \angle CDA$ ja järelikult

$$\angle BCD > \angle ACD = \angle CDA = \angle CDB \,.$$

Kolmnurgas BCD on teoreemi 1.8 põhjal suurema nurga vastas pikem külg, mistõttu $|BD| > |BC|$. Teisest küljest aga $|BD| = |AB| + |AD| = |AB| + |AC|$, millest järeldubki tõestatav väide. □

Loomulikult kehtib kolmnurgavõrratus ka teiste külgede jaoks, st $|AC| + |BC| > |AB|$ ja $|AB| + |BC| > |AC|$.

Kolmnurgavõrratust saab üldistada juhule, kus tasandi punktid A,B ja C asuvad ühel sirgel ega moodusta kolmnurka. Sel juhul saab kehtida ka võrdus $|AB| + |AC| = |BC|$, mis on nii parajasti siis, kui punkt A asub lõigul BC. Kui punkt A asub sirgel BC väljaspool lõiku BC, kehtib endiselt $|AB| + |AC| > |BC|$. Kokkuvõttes kehtib tasandi kolme suvalise punkti A, B ja C korral võrratus $|AB| + |AC| \geqslant |BC|$.

Ülesanne 1.24 (Talvine lahtine võistlus 2008, noorem rühm) Kumera nelinurga kujulise aia sisse tuleb püstitada jõulukuusk ning kinnitada see nelja maapinnast ühel ja samal kõrgusel jooksva nööriga aia nurkades olevate postide külge. Millisesse punkti tuleb jõulukuusk paigutada, et nende nelja nööri pikkuste kogusumma oleks võimalikult väike?

Märkus. Hulknurka nimetame *kumeraks*, kui ta asub igast oma küljega määratud sirgest täielikult ühel pool. Hulknurga kumerus on samaväärne tingimusega, et kõik tema sisenurgad on väiksemad kui $180°$.

Lahendus. Vastus: kuusk tuleb paigutada nelinurga diagonaalide lõikepunkti.

Vaatleme aiale vastavat kujundit tasandil kumera nelinurgana $ABCD$. Selle tasandi suvalise punkti P jaoks kehtivad kolmnurgavõrratuse tõttu võrratused

$$|AP| + |CP| \geqslant |AC|\,,$$
$$|BP| + |DP| \geqslant |BD|\,.$$

Neid võrratusi liites saame

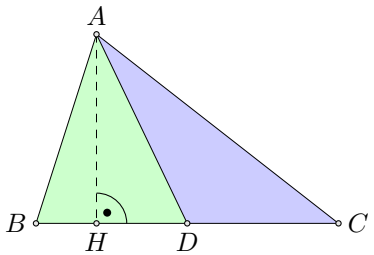
$$|AP| + |BP| + |CP| + |DP| \geqslant |AC| + |BD|\,,$$

st ülesandes nõutud lõigupikkuste summa on alati vähemalt niisama suur kui nelinurga diagonaalide pikkuste summa. Seejuures saab võrdus kehtida ainult siis, kui mõlemas esialgses võrratuses kehtib võrdus. See aga on nii parajasti siis, kui P asub nii lõigul AC kui ka lõigul BD, st ta on nelinurga $ABCD$ diagonaalide lõikepunkt. □

1.6.9 Mediaan poolitab kolmnurga pindala

Teoreem 1.15 Kolmnurga tipust vastasküljele tõmmatud mediaan jagab selle kolmnurga kaheks pindvõrdseks osaks.

Tõestus. Olgu D kolmnurga ABC külje BC keskpunkt. Siis on AD selle kolmnurga mediaan ning teoreemi tõestamiseks tuleb näidata, et $S_{ABD} = S_{ADC}$. Tõmbame tipust A sirgele BC ristlõigu AH; siis on selge, et AH on kõrguseks nii kolmnurgas ABD kui ADC.



Nüüd saame võrrelda kolmnurkade ABD ja ADC pindalasid, arvestades, et $|BD| = |DC|$:

$$S_{ABD} = \frac{|BD| \cdot |AH|}{2} = \frac{|DC| \cdot |AH|}{2} = S_{ADC}\,,$$

mida oligi tarvis tõestada. □

Selle teoreemi üldistuse tõestame jaotises 7.1.

Ülesanne 1.25 Sõnasta teoreemi 1.15 pöördteoreem. Kas ka see pöördteoreem kehtib?

1.7 Ülesandeid harjutamiseks

Ülesanne 1.26 Joonesta täisnurkne kolmnurk ja tõmba talle täisnurga tipust hüpotenuusi keskpunkti mediaan. Mõõda ära selle mediaani ja hüpotenuusi pikkused. Kas paned midagi tähele? Näita, et see tähelepanek kehtib iga täisnurkse kolmnurga korral. (Vihje: pööra kolmnurka hüpotenuusi keskpunkti suhtes $180°$ võrra. Mis liiki hulknurk tekib?)

Ülesanne 1.27 Tõesta, et kui kolmnurgas langevad samast tipust kõrgus ja mediaan kokku, on kolmnurk võrdhaarne.

Ülesanne 1.28 Tõesta, et kui kolmnurgas langevad samast tipust kõrgus ja nurgapoolitaja kokku, on kolmnurk võrdhaarne.

Ülesanne 1.29 (Lõppvoor 2018, 11. klass) Olgu p kolmnurga ABC poolümbermõõt. Tõesta, et tasandi suvalise punkti Q korral kehtib võrratus

$$|AQ| + |BQ| + |CQ| > p\ .$$

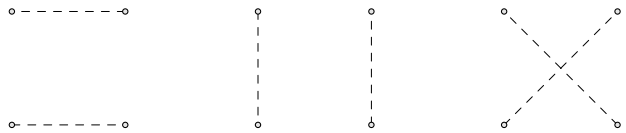
Vaata ka ülesannet 3.2.

1.8 Lahendused

1.1

1.2 Vastus: jah.

Muuhulgas jagunevad vaadeldava tasandi kuus sirget omavahel mittelõikuvate (ehk paralleelsete!) sirgete paaridesse:



Tuletame meelde, et kuigi kolmandal joonisel punktiirid lõikuvad, ei tähenda see uuritavas geomeetrias, et vastavatel sirgetel oleks ühiseid punkte!

1.3

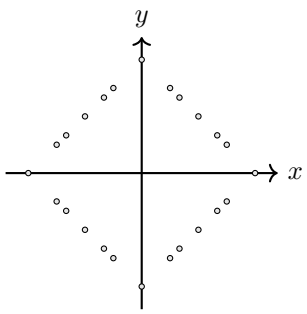
1.4 Vastus: ei.

Lihtne on kontrollida, et Fano tasandil omavad iga kaks (erinevat) sirget alati ühte ühist punkti. Seega ei saa paralleelide aksioom siin kehtida.

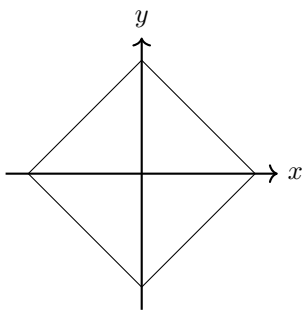
1.5 Olgu otsitava ringjoone keskpunkt $O(0;0)$ ning valime ringjoone raadiuseks mingi positiivse arvu r. Punkt $A(x;y)$ asub Manhattani kauguse definitsiooni põhjal uuritaval ringjoonel parajasti siis, kui

$$|x-0|+|y-0|=r \quad \text{ehk} \quad |x|+|y|=r\,.$$

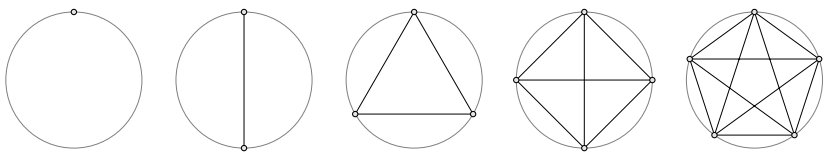
Niisiis asuvad otsitavalt ringjoonel näiteks punktid $(0;r)$, $(0;-r)$, $(r;0)$ ja $(-r;0)$, aga ka $(\pm\frac{r}{2};\pm\frac{r}{2})$, $(\pm\frac{r}{3};\pm\frac{2r}{3})$, $(\pm\frac{2r}{3};\pm\frac{r}{3})$, $(\pm\frac{r}{4};\pm\frac{3r}{4})$ ja $(\pm\frac{3r}{4};\pm\frac{r}{4})$. Kanname kõik need punktid koordinaatteljestikku.



Nüüd näeme, et lisades juurde ka kõikvõimalikud teised tingimust $|x|+|y|=r$ rahuldavad punktid, on Manhattani kaugusele vastavaks ringjooneks hoopis ruut!



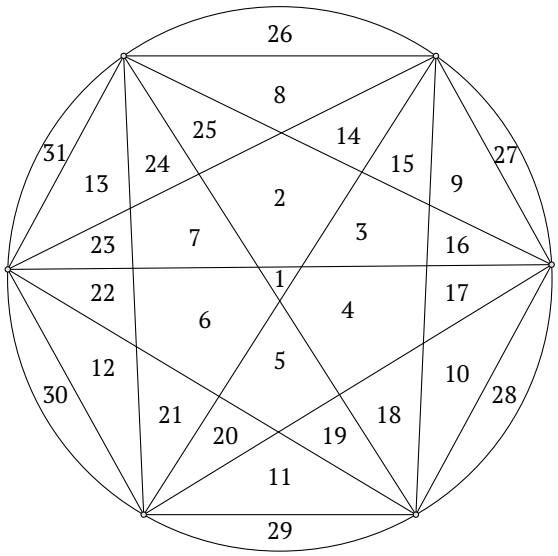
1.7 Joonistame olukorra juhtudel $n=1,2,3,4,5$ välja ning loeme ringi osad kokku.



1 2 4 8 16

Näeme, et punktide arvu n suurenemisel suureneb tükkide arv nende näidete puhul igal sammul 2 korda, nii et ühe valemina saab tükkide arvu $n=1,2,3,4,5$ korral esitada kujul 2^{n-1}.

Pole aga sugugi selge, kuidas seda valemit üldjuhul tõestada. Osutub, et väide ei kehtigi alati, ja kontranäite annab juba $n=6$, kus tükkide arvuks osutub mitte $2^5=32$, vaid 31:



On võimalik tõestada, et n punkti vahele tõmmatud lõikude abil saab ringi jagada $\frac{1}{24}(n^4-6n^3+23n^2-18n+24)$ tükiks. Kontrolli iseseisvalt näiteks arvuti või kalkulaatori abil, et $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ korral annab see valem meile juba tuttavad väärtused $1, 2, 4, 8, 16, 31$.

1.8 Võrduste paremates pooltes tunneme ära järjestikused ruutarvud ja veel paari väärtust proovides veendume, et nii on see järgmiste paaritute arvude lisandumisel.

Aga kas me saame olla kindlad, et reegel kehtib tõepoolest kõigi paaritute arvude jaoks kuni lõpmatuseni ja kui jah, siis miks? „Miks” ongi matemaatilise mõtlemise alusküsimus ja kui õpilased õpivad seda küsimust õige koha peal küsima, on nad matemaatika olemuse ära tabanud.

Selle ülesande formaalne lahendus kasutab matemaatilist induktsiooni, mida on 8. klassis ehk veidi vara sisse tuua, aga intuitiivselt pole siin midagi keerulist. Me oleme mõnede väiksemate n väärtuste jaoks juba kontrollinud, et

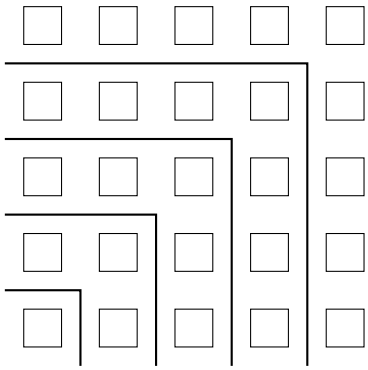
$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2 \,.$$

Kui nüüd liita juurde järgmine paaritu arv $2n + 1$, saame

$$n^2 + (2n + 1) = (n + 1)^2 \,,$$

mis ongi järgmine ruutarv! Niisiis kehtib reegel tõepoolest alati.

Seda arutelu saab esitada ka ilusa ilma-sõnadeta-tõestusena järgmise joonise abil.

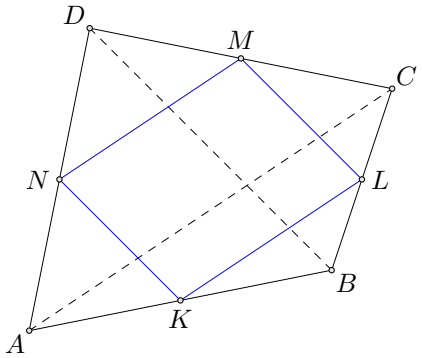


1.9 Jah, see reegel kehtib. Tõestuseks uurime naturaalaru n kuubi ja arvu enda vahe avaldist ning tegurdame selle:

$$n^3 - n = n(n^2 - 1) = (n-1)n(n+1)\,.$$

Näeme, et tegemist on kolme järjestkuse naturaalarvu korrutisega. Kolmest järjestikusest naturaalarvust jagub üks alati 2-ga ja üks alati 3-ga, seega jagub korrutis alati kindlasti 6-ga.

1.10 Osutub, et $KLMN$ on alati (st suvalise algse nelinurga $ABCD$ korral) rööpkülik. Selle põhjendamiseks vaatleme lisaks antud nelinurga diagonaale.



Paneme tähele, et KL on kolmnurga ABC kesklõik, MN aga kolmnurga ACD kesklõik. Järelikult $KL \parallel AC \parallel NM$ ja lisaks $|KL| = \frac{1}{2}|AC| = |NM|$. Sama moodi näitame, et $LM \parallel BD \parallel KN$ ja $|LM| = \frac{1}{2}|BD| = |KN|$. Niisiis on nelinurgal $KLMN$ kaks paari vastavalt paralleelseid ja võrdse pikkusega külgi, mistõttu on tegemist rööpkülikuga.

1.11 Arvutame veel mõned ülesande avaldise väärtused:

$$\begin{aligned}
6^2 - 6 + 11 &= 30 + 11 = 41\,,\\
7^2 - 7 + 11 &= 42 + 11 = 53\,,\\
8^2 - 8 + 11 &= 56 + 11 = 67\,,\\
9^2 - 9 + 11 &= 72 + 11 = 83\,,\\
10^2 - 10 + 11 &= 90 + 11 = 101\,.
\end{aligned}$$

Tõepoolest, ka need väärtused on kõik algarvulised! Aga üldist väidet ei õnnestu sellegipoolest tõestada, sest $n = 11$ korral saame

$$11^2 - 11 + 11 = 121\,,$$

mis ei ole algarv.

Tegelikult paistab juba avaldisest $n^2 - n + 11$ välja, et ta jagub 11-ga alati kui arv n jagub 11-ga. Niisiis oleks kohe võinud proovida, kas $n = 11$ annab kontranäite, ega oleks pidanud vahepealseid väärtusi uurimagi.

1.12 Hakates leidma avaldise $n^2 + n + 41$ väärtusi $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ korral, tulevad nad kõik algarvulised kuni arvuni $n = 39$. Aga $n = 40$ puhul

$$40^2 + 40 + 41 = 40 \cdot (40 + 1) + 41 = 40 \cdot 41 + 41 = (40 + 1) \cdot 41 = 41 \cdot 41$$

ei ole enam algarv.

Analoogiliselt ülesandega 1.11 võime muidugi veenduda, et kontranäiteks sobib ka $n = 41$, sest siis $n^2 \vdots 41$ ja $n \vdots 41$, mistõttu ka $n^2 + n + 41 \vdots 41$. Loomulikult peab see arv ise 41-st suurem olema, mistõttu ta ei saa olla algarv.

1.13 Ülesande 1.6 lause: „Olgu antud naturaalarv n. Kui $n \geqslant 3$, siis n ärimeest suruvad omavahel kätt $\frac{n(n-1)}{2}$ korda.“

Mõtle, kas seda lauset saab ka üldistada. Kas väidet tuleb muuta, kui $n = 1$ või $n = 2$?

Ülesande 1.8 lause: „Olgu antud naturaalarv n. Kui $n \geqslant 1$, siis $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$.“

Võrratus $n \geqslant 1$ eelduses on oluline, sest $n = 0$ korral pole selge, mida tähendab avaldis $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1)$, kuivõrd sel juhul $2n - 1 = -1$.

Ülesande 1.10 lause: „Olgu antud nelinurk $ABCD$. Kui K, L, M, N on külgede AB, BC, CD, DA keskpunktid, siis $KLMN$ on rööpkülik.“

Ülesande 1.12 lause: „Olgu antud naturaalarv n. Kui $n < 40$, siis $n^2 + n + 41$ on algarv.“

1.14 Kontranäiteks sobivad kaks suvalist paarisarvu. Näiteks $2 + 2 = 4$, kus mõlemad liidetavad on paarisarvud.

1.15 Vastus: ei kehti.

Ülesande 1.11 kontranäite jaoks tuleb leida naturaalarv n, mille korral $n^2 - n + 11$ on algarv, kuid mille jaoks $n \geqslant 12$. Arvuti või kalkulaatori abil on lihtne kontrollida, et $n = 13$ korral saame $13^2 - 13 + 11 = 167$, mis on algarv.

Sama moodi peame ülesande 1.12 kontranäiteks leidma naturaalarvu n, mille korral $n^2 + n + 41$ on algarv, kuid mille jaoks $n \geqslant 40$. Sobib $n = 42$, mis annab algarvu $42^2 + 42 + 41 = 1847$.

1.16 Paarisarve m ja n saab üldkujul esitada $m = 2k$ ja $n = 2\ell$, kus k ja ℓ on mingid teised naturaalarvud (või täisarvud, kui uurime täisarve!). Nende korrutis avaldub kujul

$$m \cdot n = 2k \cdot 2\ell = 4k\ell = 2 \cdot 2k\ell\,,$$

mis on paarisarv.

Pöördlause üldjuhul ei kehti. Kontranäiteks piisab leida kaks arvu, mille korrutis on paaris, aga milledest vähemalt üks on paaritu. Näiteks sobib $m = 2$ ja $n = 3$, sest $mn = 6$ on paaris, aga $n = 3$ mitte.

1.17 Paarituid arve m ja n saab üldkujul esitada $m = 2k+1$ ja $n = 2\ell+1$, kus k ja ℓ on mingid teised naturaalarvud (või täisarvud, kui uurime täisarve!). Nende korrutis avaldub kujul

$$m \cdot n = (2k+1) \cdot (2\ell+1) = 4k\ell + 2k + 2\ell + 1 = 2 \cdot (2kl + k + l) + 1\,,$$

mis on paaritu arv.

Kehtib ka pöördlause. Kui kahe (naturaal- või täis)arvu korrutis on paaritu, ei saa kumbki neist paaris olla, sest muidu oleks ka korrutis paarisarv (tõesta!). Niisiis peavad mõlemad tegurid olema paaritud.

1.18 Kui (naturaal- või täis)arvud m ja n annavad arvuga t jagamisel jäägi r, saab nad esitada kujul $m = tk + r$ ja $n = t\ell + r$, kus k ja ℓ on mingid teised naturaalarvud (või täisarvud, kui uurime täisarve). Nende korrutis avaldub seega kujul

$$m \cdot n = (tk + r) \cdot (t\ell + r) = t^2 k\ell + tkr + t\ell r + r^2 = t \cdot (tkl + kr + lr) + r^2\,.$$

See arv annab t-ga jagamisel sama jäägi kui r^2. Kui $r = 0$ või $r = 1$, siis $r^2 = r$, millest järeldubki ülesande väide.

Muude r väärtuste puhul väide aga üldjuhul ei kehti. Kontranäidete konstrueerimiseks piisab valida selline t väärtus, et r ja r^2 annavad arvuga t jagades erinevad jäägid. Selleks omakorda piisab, kui t on piisavalt suur, näiteks sobib $t = r^2 + 1$; vastavateks jääkideks tulevadki siis lihtsalt r ja r^2.

1.19 Vastus: ei.

Kontranäiteid on palju; sobib näiteks $m = n = 3$ ja $t = 8$. Siis $m \cdot n = 9$ annab 8-ga jagades jäägi 1, aga mõlemad tegurid annavad jäägi 3.

1.20 Ühel sirgel saab olla ülejäänutega $0, 1, \ldots, 1999$ erinevat lõikepunkti. Paneme tähele, et 0 ja 1999 ei saa korraga realiseeruda. Tõepoolest, sirge, millel on 1999 lõikepunkti, peab lõikuma kõigi ülejäänutega, seega ei saa leiduda sirget, mis ühegi teisega ei lõiku.

Järelikult saab sirgete lõikepunktide arvudel olla ülimalt 1999 erinevat väärtust ja Dirichlet' printsiibi põhjal peab antud 2000 sirge seas leiduma kaks, mille korral see arv on sama.

1.21 Lihtne on näha, et suurema osa antud arvudest saab jagada paaridesse, mille liikmete summa on 104: $(4, 100), (7, 97), \ldots, (49, 55)$. Üle jäävad ainult 1 ja 52. Kuna välja valitakse 20 arvu, siis vähemalt 18 neist pole 1 ega 52 ja kuuluvad seega mingisse paari. Et paare on aga kokku 16, peavad Dirichlet' printsiibi põhjal kaks valitud arvu ühte paari kuuluma.

1.22 Moodustame esimesest $2n$ positiivsest täisarvust n paari, kus iga paari liikmete summa on $2n+1$:

$$(1, 2n), (2, 2n-1), \ldots, (n, n+1)\,.$$

Kuna märgitud arve on rohkem kui n, peavad kaks neist Dirichlet' printsiibi järgi samasse paari sattuma. Need kaks arvu sobivadki ülesande lahendiks.

1.23 Teoreemi 1.6 tõestuses nägime, et kolmnurgad ABD ja ACD on võrdsed. Muuhulgas on võrdsed nende vastavad nurgad $\angle BDA = \angle CDA$. Kuna lisaks $\angle BDA + \angle CDA = 180°$, peavad mõlemad nurgad olemas suurusega $90°$, st AD on vaadeldava kolmnurga kõrgus.

1.25 Teoreemi 1.15 pöördteoreemi saame sõnastada näiteks järgmiselt.

Teoreem 1.16 Olgu antud kolmnurk ABC ning olgu tipust A küljele BC tõmmatud lõik AD nii, et $S_{ABD} = S_{ADC}$. Siis on AD kolmnurga mediaan, st $|BD| = |DC|$.

Ka see teoreem kehtib ja me saame anda talle vastuväitelise tõestuse.

Oletame väitevastaselt, et AD ei ole mediaan. Olgu D' lõigu BC keskpunkt, st AD' on mediaan, aga $D \neq D'$. Teoreemist 1.15 teame siis, et

$$S_{ABD'} = S_{AD'C} = \frac{S_{ABC}}{2}\,.$$

Tõestatava teoreemi eeldusest saame samas ka

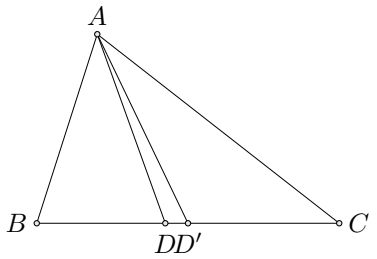
$$S_{ABD} = S_{ADC} = \frac{S_{ABC}}{2}\,.$$

Niisis $S_{ABD'} = S_{ABD}$; see võrdus aga pole võimalik, kui $D \neq D'$. Selles veendumiseks vaatame läbi kaks juhtu.

Punkt D peab asuma lõigul BC, aga mitte selle keskpunktis D'. Niisiis peab ta asuma kas lõigu BD' või lõigu $D'C$ sisepiirkonnas. Esimesel juhul saame

$$S_{ABD'} = S_{ABD} + S_{ADD'} > S_{ABD}\,,$$

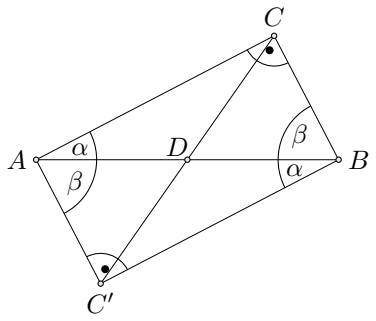
sest $S_{ADD'} > 0$, kui $D \neq D'$. See aga pole võimalik, kuivõrd $S_{ABD'} = S_{ABD}$



Juhul, kus punkt D asub lõigu $D'C$ sisepiirkonnas, saame analoogilise vastuolu. Seega peab AD olema mediaan.

1.26 Selgub, et täisnurksest tipust tõmmatud mediaani pikkus on pool hüpotenuusi pikkusest.

Selle väite tõestamiseks pöörame vaadeldavat täisnurkset kolmnurka ABC hüpotenuusi keskpunti D suhtes $180°$ võrra.

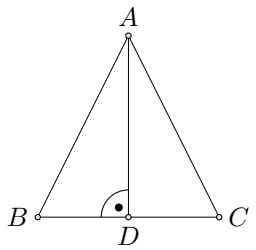


Pööramisel tekib kolmnurgaga ABC võrdne kolmnurk BAC'. Muuhulgas $\angle AC'B = 90°$, $\angle C'BA = \angle CAB = \alpha$ ja $\angle BAC' = \angle ABC = \beta$. Järelikult

$$\angle CAC' = \alpha + \beta = 90° \quad \text{ja} \quad \angle C'BC = \alpha + \beta = 90° \,.$$

Niisiis on nelinurgal $AC'BC$ neli täisnurka, mistõttu ta on ristkülik. Ristküliku diagonaalid on võrdsed ning poolitavad teineteist, seega saame $|CD| = \frac{1}{2}|CC| = \frac{1}{2}|AB|$, mida oligi tarvis tõestada.

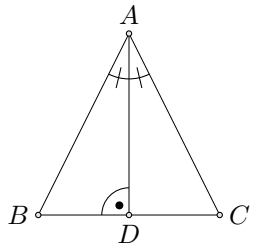
1.27 Vaatleme kolmnurka ABC ning punkti D küljel BC nii, et AD on ühtlasi nii kõrgus kui ka mediaan.



Uurime kolmnurki ABD ja ACD.

Kuna AD on kolmnurga ABC mediaan, kehtib võrdus $|BD| = |CD|$, ja kuna AD on ka sama kolmnurga kõrgus, saame lisaks $\angle ADB = 90° = \angle ADC$. Külg AD on kolmnurkadel ABD ja ACD ühine, niisiis on neil kolmnurkadel kaks paari võrdseid külgi ning võrdne on ka nurk nende külgede vahel. Järelikult on kolmnurgad ABD ja ACD tunnuse KNK alusel võrdsed. Muuhulgas $|AB| = |AC|$, st kolmnurk ABC on võrdhaarne.

1.28 Selle ülesande lahendus on üsna sarnane ülesande 1.27 omaga. Teeme jälle joonise, kus AD on kolmnurgas ABC ühtlasi nii kõrgus kui nurgapoolitaja.



Seekord näeme, et külg AD on kolmnurkadel ABD ja ACD ühine, teisest küljest aga $\angle BAD = \angle CAD$ ja $\angle ADB = 90^\circ = \angle ADC$. Niisiis on kolmnurgad ABD ja ACD võrdsed tunnuse NKN alusel. Muuhulgas $|AB| = |AC|$, st kolmnurk ABC on võrdhaarne.

1.29 Olgu Q kolmnurga ABC tasandi suvaline punkt. Siis kehtivad vastavalt kolmnurkades QAB, QBC ja QCA võrratused

$$\begin{aligned} |AQ| + |BQ| &\geqslant |AB| \,, \\ |BQ| + |CQ| &\geqslant |BC| \,, \\ |CQ| + |AQ| &\geqslant |CA| \,. \end{aligned}$$

Nende võrratuste liitmisel saame

$$2(|AQ| + |BQ| + |CQ|) \geqslant 2p \,.$$

Selleks, et viimases võrratuses kehtiks võrdus, peaks punkt Q asuma korraga lõikudel AB, BC ja CA, mis ei ole võimalik. Seega kehtib tegelikult

$$2(|AQ| + |BQ| + |CQ|) > 2p \,,$$

mis on samaväärne ülesande võrratusega.

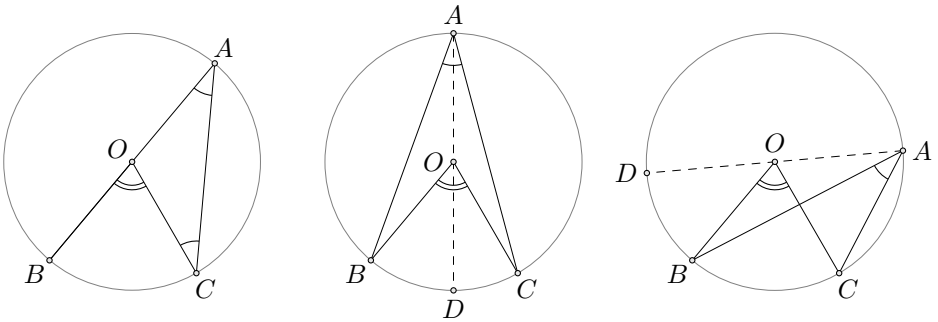
PEATÜKK 2

Kesk- ja piirdenurk. Thalese teoreem

Suur osa ringjoontega seotud nurkade teooriast tugineb järgmisele lihtsale tulemusele.

Teoreem 2.1 Kesknurk on kaks korda suurem kui samale kaarele/kõõlule samalt poolt toetuv piirdenurk.

Tõestus. Vaatame läbi kolm võimalikku juhtu.



Asugu ringjoone keskpunkt O kõigepealt piirdenurga ühel haaral (näiteks AB; vt vasakpoolne joonis). Kuna $|OA| = |OC|$, on kolmnurk AOC võrdhaarne, mistõttu

$$\angle CAB = \angle CAO = \angle OCA.$$

Teisest küljest on AOB sirgnurk, järelikult

$$\begin{aligned}\angle COB &= 180^\circ - \angle AOC = 180^\circ - (180^\circ - \angle CAO - \angle OCA) = \\ &= \angle CAO + \angle OCA = 2\angle CAO = 2\angle CAB\,,\end{aligned}$$

nagu oligi tarvis.

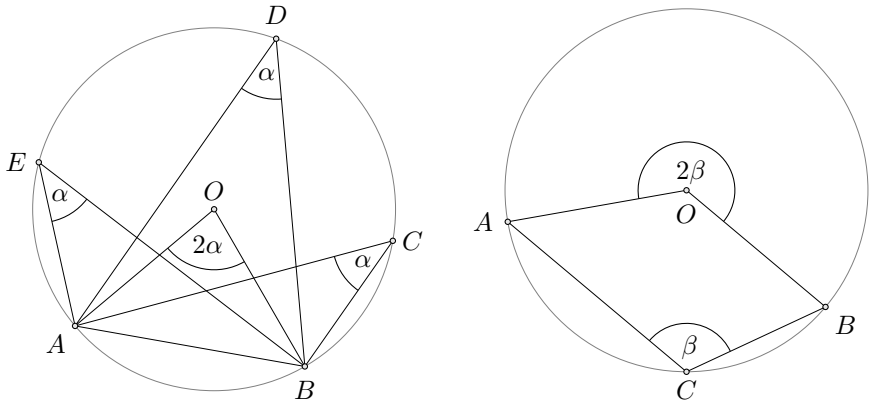
Kui ringjoone keskpunkt asub piirdenurga sees (vt keskmine joonis), vaatleme tipust A ringjoonele tõmmatud diameetrit; olgu tema teine otspunkt D. Siis saame äsjatõestatu põhjal

$$\angle COB = \angle COD + \angle DOB = 2\angle CAD + 2\angle DAB = 2(\angle CAD + \angle DAB) = 2\angle CAB\,.$$

Kui ringjoone keskpunkt asub piirdenurgast väljas (vt parempoolne joonis), olgu tipust A ringjoonele tõmmatud diameetri teine otspunkt jälle D. Siis saame teise juhuga analoogiliselt

$$\angle COB = \angle COD - \angle BOD = 2\angle CAD - 2\angle BAD = 2(\angle CAD - \angle BAD) = 2\angle CAB\,.$$

Sellega oleme näidanud teoreemi kehtivuse kõigil võimalikel juhtudel. □



Joonis 2.1

Joonisel 2.1 vasakul on tüüpiline olukord, kus kõõlule (või kaarele) AB toetub mitu piirdenurka. Kuna nad moodustavad poole vastavast kesknurgast, on nad kõik ka omavahel võrdsed. Tegemist on olulise väitega, mis väärib sõnastamist omaette järeldusena.

Järeldus 2.1 Samale kõõlule (või kaarele) samalt poolt toetuvad piirdenurgad on võrdsed.

Kehtib ka vastupidine väide: kõik sirge AB suhtes samal pooltasandil asuvad punktid, millest lõik AB paistab sama nurga all, asuvad ühel ja samal ringjoone kaarel. Selle väite tõestame erijuhuna üldisemast teoreemist **??**.

Kuna võrdse pikkusega kõõle (ja ühesuuruseid kaari) saab üksteiseks viia pöördega ringjoone keskpunkti ümber, on lihtne mõista, et järeldust 2.1 saab veidi üldistada järgmises sõnastuses (kus „samalt poolt“ tähendab „samalt poolt pärast pööret“):

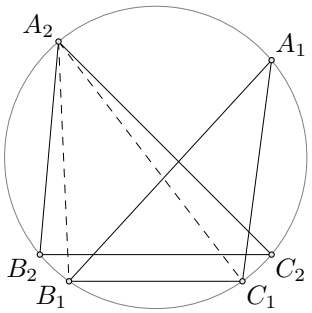
Järeldus 2.2 Ühepikkustele kõõludele (või ühesuurustele kaartele) samalt poolt toetuvad piirdenurgad on võrdsed.

Võistlusülesannetes läheb vahel vaja ka järelduse 2.2 pöördväidet.

Järeldus 2.3 Samal ringjoonel võrdsete piirdenurkade poolt piiratud kõõlud (või kaared) on võrdse pikkusega.

Tõestus. Oletame, et tõestatav väide ei kehti üldjuhul. Siis peavad leiduma kaks ühise ümberringjoonega kolmnurka $A_1B_1C_1$ ja $A_2B_2C_2$ nii, et $\angle C_1A_1B_1 = \angle C_2A_2B_2$, kuid $|B_1C_1| \neq |B_2C_2|$.

Pöörame kolmnurki ringjoone keskpunkti ümber nii, et küljed B_1C_1 ja B_2C_2 on paralleelsed, näiteks horisontaalsed, ning piirdenurgad $C_1A_1B_1$ ja $C_2A_2B_2$ piiravad neid samalt poolt. Kuna $|B_1C_1| \neq |B_2C_2|$, peab üks neist kõõludest jääma teisest allapoole; olgu selleks üldisust kitsendamata B_1C_1.



Et piirdenurgad $C_1A_1B_1$ ja $C_1A_2B_1$ toetuvad kõõlule B_1C_1, on nad järelduse 2.1 tõttu võrdsed. Väitevastasest eeldusest saime samas $\angle C_1A_1B_1 = \angle C_2A_2B_2$, mistõttu ka $\angle C_1A_2B_1 = \angle C_2A_2B_2$. See aga pole võimalik, sest

$$\angle C_2A_2B_2 = \angle C_2A_2C_1 + \angle C_1A_2B_1 + \angle B_1A_2B_2$$

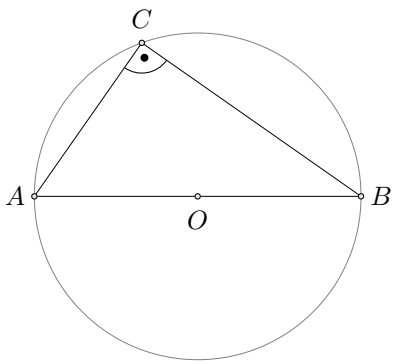
ja $\angle C_2A_2C_1, \angle B_1A_2B_2 > 0°$, kuivõrd kõõl B_1C_1 asub allpool kõõlu B_2C_2. □

Kesk- ja piirdenurga vahelise seose (teoreem 2.1) tõestus läheb läbi ka juhul, kui piirdenurk on üle $90°$; siis lihtsalt on ka vastav kesknurk üle $180°$. Seda olukorda illustreerib joonis 2.1 paremal.

Kui kesknurga suurus on täpselt $180°$, saame tähtsa erijuhu, mida tuntakse Thalese teoreemina.[1]

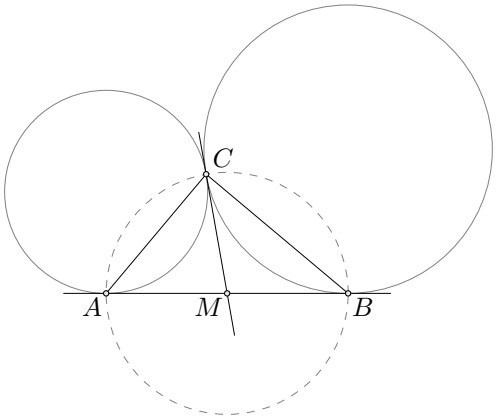
Teoreem 2.2 Ringjoone diameetrile toetuv piirdenurk on täisnurk.

[1] Thales (u. 625-547 eKr) oli Vana-Kreeka filosoof. Suure tõenäosusega polnud ta temale omistatava teoreemi esmaavastaja, sest vastavat väidet tunti juba Vana-Egiptuses ja Babüloonias. Tol ajal aga ei hoolitud eriti sellest, kes teoreemi sõnastas või tõestas. Tulemus omistati lihtsalt kellelegi, keda peeti targaks inimeseks. Sama lugu oli ju ka Pythagorase teoreemiga, mida Vana-Egiptuses ammu enne Pythagorast teati ja kasutada osati.



Ülesanne 2.1 (Piirkonnavoor 2022, 12. klass, a)-osa) Kaks ringjoont puutuvad teineteist välimiselt punktis C ning mingit üht ja sama sirget vastavalt punktides A ja B , kus $A \neq B$. Tõesta, et kolmnurk ABC on täisnurkne.

Lahendus. Tõmbame ringjoontele ühise puutuja läbi punkti C. Olgu M selle puutuja lõikepunkt sirgega AB.

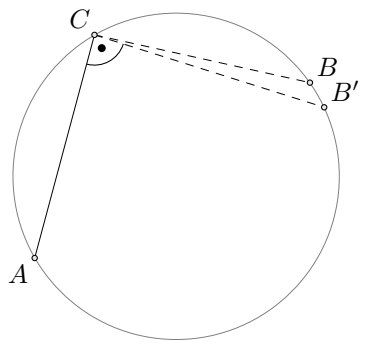


Puutujalõikude võrdsusest saame $|AM| = |CM|$ ja $|BM| = |CM|$. Niisiis asuvad punktid A,B ja C samal ringjoonel keskpunktiga M. Lõik AB kui keskpunkti läbiv kõõl on selle ringjoone diameetriks, mistõttu Thalese teoreemi järgi $\angle ACB = 90°$. □

Väga oluline on ka Thalese teoreemi pöördteoreem.

Teoreem 2.3 Ringjoones täisnurkse piirdenurga poolt piiratud kõõl on selle ringjoone diameetriks.

Tõestus. Olgu ACB ringjoone täisnurkne piirdenurk. Leiame ringjoonel niisuguse punkti B', et AB' on diameeter. Siis Thalese teoreemi põhjal $\angle ACB' = 90°$. See aga tähendab, et $\angle ACB = 90° = \angle ACB'$. Läbi punkti C saab tõmmata ainult ühe sirge, mis on risti sirgega AC. Kuna sirgel saab ringjoonega olla ülimalt kaks ühist punkti, peab kehtima $B = B'$, mistõttu AB peab olema vaadeldava ringjoone diameeter.



□

Kuna hüpotenuusi keskpunkt on ka kogu ringjoone keskpunktiks, saame teoreemist 2.3 järgmise sageli kasutatava järelduse.

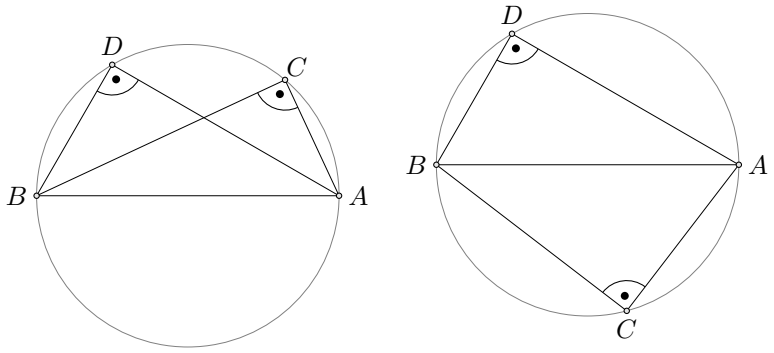
Järeldus 2.4 Täisnurkse kolmnurga ümberringjoone keskpunkt asub tema hüpotenuusi keskpunktis.

Teoreemi 2.3 teine oluline järeldus tekib olukorras, kus samale lõigule toetub kaks täisnurka.

Järeldus 2.5 Olgu tasandil antud lõik AB ning punktid C ja D nii, et $\angle ACB = \angle ADB = 90°$. Siis asuvad punktid A,B,C ja D ühel ringjoonel diameetriga AB.

Tõestus. Vaatleme kolmnurkade ACB ja ADB ümberringjooni. Vastavalt teoreemile 2.3 on lõik AB mõlema ringjoone diameetriks, järelikult langevad need ringjooned kokku.

Paneme tähele, et tõestatava väite olukorrale vastab kaks põhimõtteliselt erinevat joonist olenevalt sellest, kas punktid C ja D asuvad sirgest samal või erineval pool. Toodud tõestus töötab mõlemal juhul.

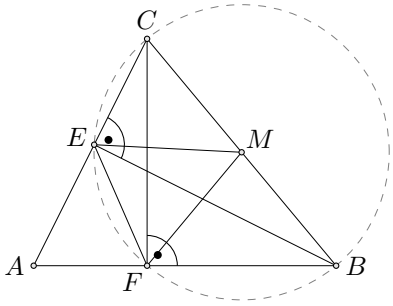


□

Selle järelduse üldistuse annab teoreem 29.1 „Võistlusmatemaatika põhivarast“ [7].

Ülesanne 2.2 (Piirkonnavoor 2020, 9. klass) Olgu ABC teravnurkne kolmnurk. Olgu külje BC keskpunkt M ning tippudest B ja C tõmmatud kõrguste aluspunktid vastavalt E ja F. Tõesta, et $\angle MEF = \angle MFE$.

Lahendus. Kuna $\angle BFC = \angle BEC = 90°$, asuvad punktid B,C,E,F järelduse 2.5 põhjal ühel ringjoonel diameetriga BC. Selle diameetri ja järelikult ka vaadeldava ringjoone keskpunkt on M. Niisiis $|ME| = |MF|(= |MB| = |MC|)$, millest omakorda järeldubki vajalik võrdus $\angle MEF = \angle MFE$.



□

PEATÜKK 3

Joonestame sirkli ja joonlauaga

Eukleidilise geomeetria aksioomid postuleerivad hulga objekte (punkt, sirge, tasand) ning objektidevahelisi seoseid (näiteks et läbi iga kahe erineva punkti saab tõmmata täpselt ühe sirge). Lisaks saame defineerida keerukamaid jooni (näiteks ringjoon) ja kujundeid (kolmnurk, ruut jne).

Selleks, et geomeetriliste objektide üle arutleda, on kasulik nad üles joonestada. Peale pliiatsi Saab ja tuleb joonestamisel kasutada abivahendeid, milledest kõige levinumad on muidugi sirkel ja joonlaud.

Nende funktsiooni jooniste tegemisel pole raske mõista. Joonlauaga saab kahe punkti järgi tõmmata neid ühendava lõigu, kiire või sirge (viimasest kahest muidugi ainult selle osa, mis paberile ära mahub). Sirkliga aga saame keskpunkti ja raadiuse põhjal tõmmata ringjoone või tema kaare. Ringjoone definitsiooni järgi (vt definitsioon 1.8) tähendab see kas kõigi või osade punktide leidmist, mis asuvad keskpunktist fikseeritud kaugusel.

Aga kuidas joonisega pihta hakata, kui ees on puhas paberileht? Selleks valime (ehk konstrueerime!) kõigepealt mõned punktid. Seejuures võib punkte konstrueerida nii, et nad vastaksid teatud tingimustele. Peamised punkti valimise võimalused on järgmised.

P1 Valime tasandil suvalise punkti (mis erineb eelnevalt konstrueeritud punktidest).

P2 Valime suvalise punkti mingil eelnevalt konstrueeritud joonel (nt lõigul, sirgel või ringjoonel).

P3 Valime punkti, mis asub mitmel eelnevalt konstrueeritud joonel, st tekib nende joonte (nt sirgete või ringjoonte) lõikumisel. Kui lõikepunkte on mitu, võime neist valida suvalise või ühe, mis vastab kindlatele kriteeriumitele (nt asub etteantud pooltasandil).

P4 Valime suvalise punkti, mis ei asu mõnel konkreetsel eelnevalt konstrueeritud joonel (nt valime punkti väljaspool sirget).

P5 Valime suvalise punkti, mis asub eelnevalt konstrueeritud joontega eraldatud tasandiosal (nt pooltasandil või antud ringjoonest väljaspool).

Sirglõigu (kiire, sirge) joonestamiseks on sisuliselt ainult üks võimalus.

S1 Võtame kaks eelnevalt valitud/konstrueeritud punkti ning ühendame nad sirglõiguga (või kiirega, mis algab ühest neist punktidest ja läbib teist, või sirgega, mis läbib neid punkte).

Ka ringjoone või selle kaare joonestamiseks on kaks võimalust.

R1 Võtame kaks eelnevalt valitud/konstrueeritud punkti ning määrame nende järgi sirkli haarade vahelise laiuse. Siis võtame kolmanda eelnevalt valitud/konstrueeritud punkti ja joonestame ringjoone keskpunktiga selles punktis ning raadiusega, mille määrab sirkli haarade vahe.

R2 Võtame kaks eelnevalt valitud/konstrueeritud punkti ja joonestame ringjoone (või kaare), mille keskpunkt on ühes neist punktidest ja mis läbib teist.

Konstruktsiooni R2 võib vaadelda ka konstruktsiooni R1 erijuhuna, kus esimene ja kolmas valitud punkt langevad kokku.

Järgnevalt uurime, kuidas nendest joonestussammudest panna kokku keerukamaid konstruktsioone.

3.1 Kolmnurga joonestamine etteantud küljepikkuste järgi

(a) Olgu tasandil antud lõigud pikkustega a, b ja c. Olgu pikkusega c lõigu otspunktid A ja B.

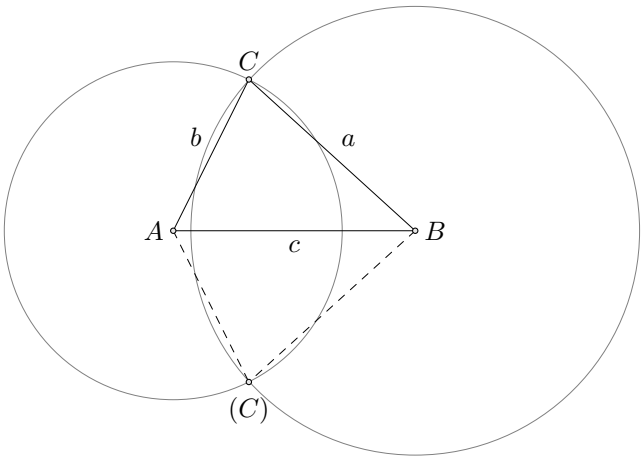
(b) Võtame sirkli haarade vahele lõigu b pikkuse ning joonestame ringjoone keskpunktiga A ja raadiusega b (konstruktsioon R1).

(c) Võtame sirkli haarade vahele lõigu a pikkuse ning joonestame ringjoone keskpunktiga B ja raadiusega a (konstruktsioon R1).

(d) Olgu nende kahe ringjoone üks lõikepunkt C (konstruktsioon P3). Kui lõikepunkte on kaks, valime neist suvalise. Kui lõikepunkte on üks või null, pole kolmnurga konstrueerimine võimalik.

(e) Tõmbame joonlaua abil lõigud AC ja BC (konstruktsioon S1).

(f) Kolmnurga ABC küljed on piikustega $|AB| = c$, $|BC| = a$ ja $|CA| = b$, sest tänu konstruktsioonile asub punkt C punktidest B ja A vastavalt kaugustel a ja b.



Praktikas pole alati vaja ringjooni täielikult välja joonestada. Piisab, kui silma järgi hinnata, kuhu lõikepunkt enam-vähem tulla võiks, ja siis tõmmata ringjoontest vastavasse piirkonda ainult kaared.

Ülesanne 3.1 Olgu tasandil antud lõik pikkusega a. Joonesta võrdkülgne kolmnurk küljepikkusega a.

Ülesanne 3.2 Milline seos peab kehtima lõigupikkuste a, b ja c vahel selleks, et kolmnurga konstrueerimine oleks võimalik?

3.2 Lahendused

3.1 Tegemist on erijuhuga jaotise 3.1 konstruktsioonist. Joonestame antud lõigust lähtudes kaks ringjoont raadiustega a ning keskpunktidega antud lõigu otspunktides. Nende ringjoonte kumbki lõikepunkt sobib otsitava kolmnurga kolmandaks tipuks.

3.2 Teoreemi 1.14 (ehk kolmnurgavõrratuse) põhjal peab kolmnurga kahe külje pikkuste summa peab olema suurem kui kolmanda külje pikkus, st antud juhul $a + b > c$. See ülesanne annab kolmnurgavõrratusele konstruktiivse tõlgenduse – kui lõigupikkuste vahel kolmnurgavõrratus ei kehti, ei teki konstruktsioonis ringjoontel kahte lõikepunkti.

PEATÜKK 4

Ratsionaalarvud ja irratsionaalarvud

4.1 Naturaalarvud ja täisarvud

Koolimatemaatikas antakse naturaalarvudele tavaliselt järgmine definitsioon (vt nt [1]):

Definitsioon 4.1. Naturaalarvud *on arvud, mille me saame lõplike hulkade elemente loendades. Naturaalarvude hulka tähistame*

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}.$$

Nagu ütleb definitsioon 4.1, väljendavad naturaalarvud ideed, et meil *on* mingeid objekte – ostukärus on 2 pakki hapukoort, klassis on 24 õpilast, Kristuse sünnist on piiblilegendi järgi möödunud 2025 aastat. Eraldi kokkuleppe järgi loeme naturaalarvuks ka tühja hulga elementide arvu null; nii näiteks on Tallinna loomaaias 0 kaelkirjakut.

Naturaalarve saab *liita* ja *korrutada*, kusjuures tulemuseks on alati jälle naturaalarv (selle kohta ütleme, et liitmine ja korrutamine on naturaalarvude hulgal *hästidefineeritud*). Liitmine vastab ideele, et me paneme olemasolevale midagi juurde, korrutamine aga ideed, et me paneme midagi juurde korduvalt, kusjuures iga kord sama palju.

Liitmise pöördoperatsioon on *lahutamine*, mis väljendab ideed, et midagi võetakse ära. Vahel on ka lahutamise tulemus naturaalarv (kui 5st kommist 2 ära võtta, jääb 3 järele ehk $5 - 2 = 3$), aga mitte alati (niisiis ei ole lahutamine naturaalarvudel hästidefineeritud). Kui püüda 5 st kommist ära võtta 7, pole kohe selge, mida see õigupoolest tähendada võiks.

Samas võime mõelda nii, et kui oled lubanud sõbrale anda 7 kommi, aga sul on täna kaasas ainult 5, pead oma lubaduse täitmiseks homme veel 2 kommi juurde tooma. Niisiis püüame kirjeldada olukorda, kus midagi jääb *puudu*: jooksja jäi rekordile alla 5 sekundiga, põranda värvimiseks ostetud 3st värvipotist ei piisa ja 1 tuleb juurde tuua, firma kulud ületavad tulusid 1000 euro

võrra.

Neid olukordi saame väljendada *negatiivsete* arvudega. Kui firma kulud ületavad tulusid 1000 euro võrra, tuleb vahe katta omanike taskust või pangalaenuga. Firma seisukohast on tema eelarves -1000 eurot, sest see võlg tuleb kunagi (näiteks tuleviku kasumi arvel) tagasi maksta. Kui sa oled sõbrale lubanud 7 kommi, aga täna on sul anda ainult 5, on sul mingis mõttes -2 kommi, sest lubaduse täitmiseks jääb 2 kommi puudu. Seda olukorda saame matemaatiliselt väljendada võrdusega $5 - 7 = -2$.

Nõnda saame peale naturaalarvude anda sisu ka nende vastandarvudele.

Definitsioon 4.2. *Naturaalarvu n vastandarvuks nimetame niisugust arvu m, et $n + m = 0$. Arvu n vastandarvu tähistame ka $-n$.*

Niisiis saame definitsioonist 4.2, et iga naturaalarvu n korral kehtib võrdus

$$n + (-n) = 0\,.$$

See vastab meile juba tuttavale sulgude avamise reeglile, mille põhjal $n+(-n) = n - n = 0$.

Arvu 0 vastandarvuks on tema ise, sest $0 + 0 = 0$ (seega võime kirjutada $-0 = 0$). Positiivsete naturaalarvude vastandarvud aga pole enam naturaalarvud, vaid uut liiki, *negatiivsed* arvud.

Ülesanne 4.1 Mis on arvu $-a$ vastandarv?

Definitsioon 4.3. *Naturaalarvud ja nende vastandarvud moodustavad* täisarvude *hulga, mida tähistame*

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}\,.$$

Tühja majja siseneb kaks inimest, aga väljub kolm. Bioloog, füüsik ja matemaatik selgitavad seda nähtust.

Bioloog: „Nad paljunesid!“

Füüsik: „Tegemist on mõõtmisveaga!“

Matemaatik: „Kui majja läheb veel üks inimene, on maja jälle tühi!“

4.2 Ratsionaalarvud

Täisarve saab liita, lahutada ja korrutada, kusjuures tulemus on alati täisarv (arvestades kokkulepet, et kahe negatiivse arvu korrutis on positiivne).

Korrutamise pöördtehe on jagamine. Kui korrutamine vastab ühe suuruse korduvale lisamisele, siis jagamise puhul küsime, millist suurust tuleb korduvalt lisada, et tulemuseks oleks soovitav lõppkogus.

Jagades üht täisarvu teisega, on vahel tulemuseks täisarv. Kui mul on 3 venda ja 15 kommi, saan ma anda igaühele võrdselt 5 kommi. Kui mul on panga ees 1000-eurone võlg (ehk -1000 eurot), saan võla tasa, kui maksan 10 kuud igas kuus 100 eurot võla põhiosa. Neid tehteid võime matemaatiliselt kirjutada vastavalt

$$15 : 3 = 5 \quad \text{ja} \quad -1000 : 10 = -100\,.$$

Alati aga ei õnnestu jagamine nii, et jagatis oleks täisarv. 15 kommi ei saa kahe venna vahel täpselt jagada. Üks komm tuleb pooleks teha ning kumbki vend saab 7 ja pool kommi.

Niisuguse olukorra kirjeldamiseks on kasutusele võetud *murdarvud*. Tähistades jagamist murrujoone abil, võime kirjutada

$$\frac{15}{2} = 7\frac{1}{2}\,.$$

Eraldi tuleb uurida, millal kaks harilikku murdu võrduvad. Kui mul oleks 30 kommi ja 4 venda, saaks igaüks neist võrdse jagamise korral sama palju ehk 7 ja pool kommi. (Kontrollime: $4 \cdot 7 = 28$, 4 poolt annab kokku 2 ning $28 + 2 = 30$.) Niisiis saame kirjutada, et

$$\frac{15}{2} = \frac{30}{4}\,.$$

Täpselt sama tulemuse saaksime ka 45 kommi ja 6 venna puhul. Üldisemalt võime öelda, et kui suurendada k korda nii suurust, mida me jagame, kui osade arvu, milleks me jagame, saame sama suured osad. Matemaatiliselt kirjutades

$$\frac{k \cdot a}{k \cdot b} = \frac{a}{b}\,.$$

Definitsioon 4.4. Ratsionaalarvude *hulk on defineeritud kui*

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} : a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}\,,$$

kusjuures ratsionaalarve $\frac{a}{b}$ *ja* $\frac{c}{d}$ *loeme võrdseteks parajasti siis, kui* $a \cdot d = c \cdot b$.

4.3 Ratsionaalarvud ja kümnendmurrud

Ratsionaalarv $\frac{a}{b}$ vastab täisarvude a ja b jagatisele. Seega peab neid saama jagada! Kui meil veab, on jagatis lõplik, näiteks $\frac{1}{5} = 0{,}2$ ja $\frac{7}{4} = 1{,}75$.

Teisest küljest on lihtne näha, et igale lõplikule kümnendmurrule vastab ka ratsionaalarv, näiteks $7 = \frac{7}{1}$, $1{,}37 = \frac{137}{100}$ ja $-2{,}345 = \frac{-2345}{1000} = \frac{-469}{200}$.

Alati aga ei tule jagatis lõplik.[1] Uurime, millisele kümnendarvule vastab näiteks ratsionaalarv $\frac{2}{11}$ ja teeme samm-sammult läbi pika jagamise.

$$\begin{array}{l} 2{,}0 : 11 = 0{,}1 \\ \underline{1{,}1} \\ \quad 9 \end{array}$$

Esimene jääk on 9. Jagatise järgmise kümnendkoha leidmiseks paneme tähele, et 11 mahub 90-sse 8 korda ja jääk on 2:

$$\begin{array}{l} 2{,}00 : 11 = 0{,}18 \\ \underline{1{,}1} \\ \quad 90 \\ \quad \underline{88} \\ \quad\;\; 2 \end{array}$$

[1] On võimalik näidata, et jagatis tuleb lõplik parajasti siis, kui jagaja teguritekslahutusse kuuluvad algarvudena ainult 2 ja 5.

Järgmiseks näeme, et 11 mahub 20-sse 1 korra ja jääk on jälle 9:

$$\begin{array}{l} 2{,}000 : 11 = 0{,}181 \\ \underline{1{,}1} \\ \quad 90 \\ \quad \underline{88} \\ \quad\ 20 \\ \quad\ \underline{11} \\ \quad\ \ 9 \end{array}$$

Niisiis hakkavad jäägid 2 ja 9 vahelduma, mistõttu jagatises vahelduvad numbrid 1 ja 8. Kokkuvõttes võime kirjutada, et

$$\frac{2}{11} = 2 : 11 = 0{,}18181818\ldots .$$

Niisiis tekib jagatises *periood*, mida tähistame lühidalt sulgude abil kujul $0{,}(18)$.

Ülesanne 4.2 Arvuta jagatised välja kuni perioodi tekkimiseni:

(a) $\frac{1}{3} = 1 : 3$,

(b) $\frac{2}{3} = 2 : 3$,

(c) $\frac{5}{9} = 5 : 9$,

(d) $\frac{14}{11} = 14 : 11$,

(e) $\frac{4}{37} = 4 : 37$.

Ülesanne 4.3 Arvuta kuni perioodi tekkimiseni välja jagatised

$$\frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{4}{7}, \frac{5}{7}, \frac{6}{7}.$$

Kas märkad midagi huvitavat?

Kas kahe (positiivse) täisarvu jagamisel tekib alati tsükkel? Lihtne on mõista, et tekib küll. Jagamise igal sammul tekib jääk, mis on ühest küljest vähematl 0 ja teisest küljest väiksem kui jagaja. Niisiis on jäägil lõplik arv võimalikke väärtusi ja niipea kui kordub jääk, tekib ka tsükkel. Kui jagatavast ja jagajast üks on negatiivne, jääb tulemuse ette lihtsalt miinus, aga tsükkel tekib ikkagi. Kui nii jagatav kui jagaja on negatiivsed, on tulemus positiivne, aga jällegi tsükliline. Niisiis oleme põhjendanud järgmise lause.

Teoreem 4.1 Igale ratsionaalarvule vastab perioodiline kümnendmurd.

Paneme tähele, et ka ratsionaalarvudest, millele vastav jagamistehe on lõplik, võime mõelda kui perioodilistest arvudest nulliga perioodis, näiteks $\frac{1}{2} = 0{,}5 = 0{,}5(0)$ ja $\frac{1}{25} = 0{,}04 = 0{,}04(0)$.

Tekib loomulik küsimus, kas kehtib ka teoreemi 4.1 pöördväide? Osutub, et kehtib küll. Selles veendumiseks anname konstruktsiooni, mis võimaldab leida igale perioodilisele kümnendmurrule vastava hariliku murru (ehk ratsionaalarvu).

Vaatleme näiteks lõpmatut perioodilist kümnendmurdu

$$x = 0{,}(259) = 0{,}259259259\ldots .$$

Korrutame vaadeldavat arvu 1000-ga ja saame

$$1000x = 259{,}259259259\ldots .$$

Näeme, et lahutamistehte $1000x - x$ tulemusena koonduvad kõik komajärgsed kümnendkohad välja! Seega võime kirjutada

$$999x = 1000x - x = 259\,,$$

kust saame

$$x = \frac{259}{999}\,,$$

mis on ratsionaalarv. Pärast taandamist võime lisaks tähele panna, et $\frac{259}{999} = \frac{7}{27}$, aga see pole arvu x ratsionaalarvulisuse tõestamise seisukohast enam tegelikult olulinegi.

Lihtne on mõista, et sama võte aitab iga perioodilise kümnendmurru puhul. Kui perioodi pikkus on k, võime vaadeldavat perioodilist kümnendmurdu x korrutada arvuga 10^k ja lahutamistehe $10^k x - x$ annab meile lõpliku kümnendmurru, mis on kindlasti esitatav kahe täisarvu jagatisena kujul $\frac{a}{b}$. Niisiis saame

$$\frac{a}{b} = 10^k x - x = (10^k - 1)x = \underbrace{999\ldots9}_{k} \cdot x\,,$$

millest omakorda

$$x = \frac{a}{b \cdot 999\ldots9}$$

ja see on samuti ratsionaalarv.

Kokkuvõttes oleme näidanud, et kehtib järgmine tulemus.

Teoreem 4.2 Ratsionaalarvud on üksüheses vastavuses perioodiliste kümnendmurdudega.

Ülesanne 4.4 Avalda ratsionaalarvudena. Kui saab, taanda vastavad murrud!

(a) $11{,}(0)$;

(b) $-7{,}5(0)$;

(c) $1{,}(1)$;

(d) $-0{,}(027)$;

(e)

4.4 Irratsionaalarvud. Ruutjuur

Jaotises 4.3 nägime, et ratsionaalarvud on üksüheses vastavuses perioodiliste kümnendmurdudega. Ka mitteperioodilised kümnendmurrud väärivad omaette nime.

Definitsioon 4.5. *Mitteperioodilisi kümnendmurde nimetame* irratsionaalarvudeks. *Kõigi irratsionaalarvude hulka tähistame* $\mathbb{I}$.

Definitsioon 4.6. *Kümnendmurde nimetame* reaalarvudeks. *Kõigi reaalarvude hulka tähistame* $\mathbb{R}$.

Kuna iga kümnendmurd on kas perioodiline või mitteperioodiline (aga mitte mõlemat korraga!), saame arvhulkade vahel seosed $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$ ja $\mathbb{Q} \cap \mathbb{I} = \varnothing$.

Kui olulised irratsionaalarvud tegelikult on? Osutub, et vägagi. Näiteks ei piisa ratsionaalarvude vallast juba siis, kui me otsime arvu, mille ruut oleks 2. Sõnastame ja tõestame vastava tulemuse teoreemina.

Teoreem 4.3 Ei leidu niisugust ratsionaalarvu, mille ruut oleks 2.

Tõestus. Oletame väitevastaselt, et leidub niisugune raatsionaalarv q, mille korral $q^2 = 2$. See tähendab, et peavad leiduma sellised täisarvud a ja b, et $q = \frac{a}{b}$. Üldisust kitsendamata võime eeldada, et a ja b on positiivsed (kui üks neist on negatiivne, võime ta asendada vastandarvuga, ilma et q^2 muutuks); samuti võime eeldada, et murd $\frac{a}{b}$ on taandatud (vastasel juhul võime ta lihtsalt ära taandada ning võtta a ja b rolli taandatud murru lugeja ja nimetaja).

Seega saame

$$2 = q^2 = \left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2}\,.$$

Kuna murru $\frac{a^2}{b^2}$ väärtus on paaris täisarv 2, peab ka a olema paarisarv. Muuhulgas jagub a^2 koguni 4-ga, aga kuna $\frac{a^2}{b^2}$ ei jagu 4-ga, peab ka b^2 olema paarisarv. Sellest omakorda järeldub, et b peab olema paarisarv; siis aga ei ole murd $\frac{a}{b}$ taandatud, sest nii a kui ka b jaguvad 2-ga. Oleme saanud vasuolu, mis näitab, et ühegi ratsionaalarvu q korral ei saa võrdus $q^2 = 2$ kehtida. □

Ülesanne 4.5 Kas leidub ratsionaalarv, mille ruut on 3?

Ülesanne 4.6 Kas leidub ratsionaalarv, mille ruut on 4?

Milliste reaalarvude x jaoks leidub selline reaalarv y, et $y^2 = x$? Kuna iga reaalarvu y korral on y^2 mittenegatiivne, siis peab x kindlasti mittenegatiivne olema. Osutub, et rohkem kitsendusi polegi.

Definitsioon 4.7. *Olgu antud mittenegatiivne reaalarv* x. *Arvu* x ruutjuureks *nimetatakse niisugust mittenegatiivset reaalarvu* y, *et* $y^2 = x$. *Arvu* x *ruutjuurt tähistame* $\sqrt{x}$.

Niisiis võime kirjutada $\sqrt{4} = 2$ ja $\sqrt{2{,}25} = 1{,}5$.

Ülesanne 4.7 Leia järgmised ruutjuured:

(a) $\sqrt{9}$;

(b) $\sqrt{25}$;

(c) $\sqrt{1{,}21}$;

(d)

Aga millise lõpmatu mitteperioodilise kümnendmurruga õigupoolest võrdub $\sqrt{2}$? Tema kõiki kümnendkohti polegi võimalik välja arvutada (ta on lõpmatu!), niisiis kasutatakse praktilistes arvutustes tema lähendeid.

Paneme näiteks tähele, et $1^2 = 1$ ja $2^2 = 4$, seega peab $\sqrt{2}$ olema kusagil 1 ja 2 vahel. Kuivõrd $1{,}5^2 = 2{,}25$, siis peab $\sqrt{2}$ jääma isegi 1 ja $1{,}5$ vahele. Et samas $1{,}4^2 = 1{,}96$ ja $1{,}96 < 2 < 2{,}25$, siis ka $1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5$. Sama moodi jätkates saame, et

$$\begin{aligned}
1{,}41^2 &= 1{,}9881 < 2 < 2{,}0164 = 1{,}42^2\,, && \text{järelikult} \quad 1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42\,;\\
1{,}414^2 &= 1{,}999396 < 2 < 2{,}002225 = 1{,}415^2\,, && \text{järelikult} \quad 1{,}414 < \sqrt{2} < 1{,}415\,,\\
1{,}4142^2 &= 1{,}99996164 < 2 < 2{,}00024449 = 1{,}4143^2\,, && \text{järelikult} \quad 1{,}4142 < \sqrt{2} < 1{,}4143\,.
\end{aligned}$$

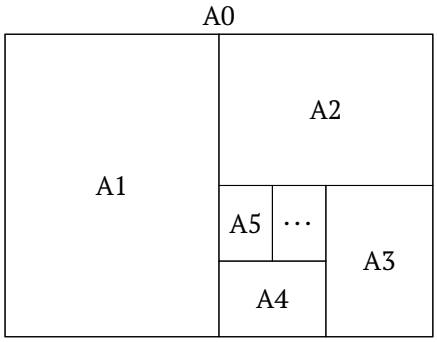
Niimoodi jätkates saame arvule $\sqrt{2}$ järjest parema ja parema kümnendlähendi, näiteks

$$\sqrt{2} \approx 1{,}4142135623730950488016887242096980785696718753769480731766 8\,.$$

Ülesanne 4.8 Leia katsetades sellise reaalarvu y ligikaudne väärtus täpsusega kolm kohta peale koma, et $y^2 = 3$.

4.4.1 Projektülesanne: A0, A1, A2, A3, A4, A5, ...

Rahvusvaheline standard ISO 216 määrab paberilehtede tüüpformaadid; tavaline printeripaberileht näiteks on formaadis A4. Formaadid A0, A1, A2, A3, A4, A5, ... on määratud nii, et reas järgmise saame eelmisest, kui murrame eelmise pikemast küljest pooleks. Seejuures on mõlema ristküliku külgede suhted samad (st ristkülikud on *sarnased*).



Kui näiteks A4 formaadi pikem külg on pikkusega a ja lühem b, siis A5 paberileht on mõõtudega vastavalt b ja $\frac{a}{2}$, kusjuures

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{a/2}\,.$$

Ülesanne 4.9 Leia A-seeria paberilehe külgede suhe $\frac{a}{b}$.

Ülesanne 4.10 Võta A4 paberileht ning mõõda ära tema kõrgus ja laius. Kui suur tuleb nende mõõtmete suhe?

Ülesanne 4.11 Murra A4 paberileht pikemast küljest pooleks, nii et moodustub A5 formaadis leht. Mõõda ka selle pikkus ja laius. Kas nende mõõtude suhe tuleb ligikaudu sama kui A4 korral?

Ülesanne 4.12 A0 paberilehe pindala on $1\mathrm{m}^2$. Leia A0 paberilehe mõõtmed.

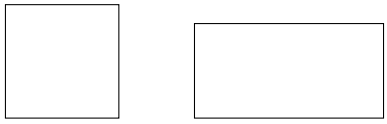
Ülesanne 4.13 Tõesta, et ruutjuur positiivsest irratsionaalarvust on samuti irratsionaalne. (Vihje: kasuta vastuväitelist tõestust.)

Huvitaval kombel on A-seeria paberiformaadi standardil oma seos ka Eestiga. Leheküljemõõtude suhte $\sqrt{2}$ pakkus 20. sajandi alul välja Wilhelm Ostwald, ainuke Nobeli preemia saanud Tartu Ülikooli professor. Tema ettepanekut ei võetud küll kohe vastu, sest tollal kasutati väga paljusid erinevaid paberiformaate, aga lõpuks jõudis see Sakamaa standardisse DIN 476 ning sealt ka täna kasutatavasse rahvusvahelisse standardisse ISO 216.

4.4.2 Projektülesanne: kuldlõige

Seda projektülesannet alustame küsimusest, milline ristkülik on ilus. Ilu pole muidugi matemaatiliselt defineeritav mõiste, aga kunstnike aastatuhandete pikkune kogemus näitab, et mõnda vormi tajub inimene millegipärast meeldivamana kui mõnda teist.

Näiteks ruut (st ristkülik külgede suhtega $1:1$) võib tunduda liiga kandiline ja sümmeetriline, ristkülik külgede suhtega $2:1$ aga liiga pikergune.



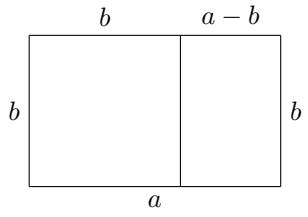
Suhete $1:1$ ja $2:1$ vahel on muidugi lõpmata palju teisi võimalusi. Jaotises 4.4.1 nägime, et standardse paberilehe mõõdud suhtuvad nagu $\sqrt{2}:1$ ehk umbes $1{,}414:1$. See aga pole ainus disainis ja kunstis sageli kasutatav suhe. Siinses projektülesandes tutvume lisaks suhtega, mida nimetatakse kuldlõikeks.

Definitsioon 4.8. *Kui ristküliku pikem külg suhtub lühemasse sama moodi nagu lühem suhtub nende külgede pikkuste vahesse, ütleme, et tegu on* kuldlõike *suhtega.*

Tähistades ristküliku pikema külje pikkust a ja lühema külje pikkust b, saame definitsiooni 4.8 tingimuse kirjutada võrdusena

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{a-b}\,. \tag{4.1}$$

Geomeetriliselt tähendab kuldlõikes ristkülik seda, et kui tema ühest otsast lõigata ära ruut, jääb järele algsega sarnane ristkülik.



Osutub, et tingimus (4.1) määrab suhte $\frac{a}{b}$ üheselt ära.

Ülesanne 4.14 Tõesta, et kui a ja b rahuldavad seost (4.1), siis suhe $\varphi = \frac{a}{b}$ rahuldab seost

$$\varphi - 1 = \frac{1}{\varphi}\,.$$

Ülesanne 4.15 Leia katsetades positiivse reaalarvu φ ligikaudne väärtus täpsusega kolm kohta peale koma, kui

$$\varphi - 1 = \frac{1}{\varphi}\,.$$

Ülesanne 4.16 Näita, et kuldlõike suhe φ on irratsionaalarv. (Vihje: kasuta vastuväitelist tõestust ja seost (4.1).)

Ülesanne 4.17 Kuldlõige esineb tihti looduses. Mõõda näiteks enda pikkus ja kõrgus maast nabani. Kui suur on nende mõõtude suhe?

Ülesanne 4.18 Mõõda ära pangakaardi pikkus ja laius. Kui suur tuleb nende suhe?

Ülesanne 4.19 Aga kuidas on lugu mängukaartidega?

4.4.3 Projektülesanne: Fibonacci arvud

Leonardo Fibonacci (1170 - u. 1250) oli üks väljapaistvamaid keskaegse Itaalia matemaatikuid. Tema peateos „Liber abaci“ (mida võib tõlkida umbes kui „Raamat arvtamisest“) mängis võtmerolli selles, et Euroopas võeti rooma numbrite asemel kasutusele araabia numbrid. Samast raamatust leiame aga ka palju huvitavaid ülesandeid, millest kuulsaimaks on kahtlemata saanud järgmine.

Ülesanne 4.20 Ühel talumehel oli paar noori küülikuid. On teada, et iga küülikupaar annab alates teisest elukuust igal kuul järglaseks uue paari küülikuid, kes samuti teisest elukuust alates sama moodi edasi paljuneb. Mitu küülikupaari on talumehel n. kuul?

Lahendus. Esimesel kuul on talumehel 1 küülikupaar, kes teiseks kuuks annab paari järglasi; niisiis on teiseks kuuks kokku 2 paari küülikuid. Neist esimene paljuneb ka kolmandal kuul, andes kokku 3 küülikupaari.

Edasi läheb huvitavamaks. Neljandal kuul paljunevad esimene ja teine paar, niisiis saab talumehel olema $3+2=5$ paari küülikuid. Viiendal kuul paljunevad need paarid, kes olid sündinud kolmandaks kuuks, st lisandub 3 paari küülikuid, andes kokku $5+3=8$ paari.

Nüüd hakkab muster välja paistma. Tähistades küülikupaaride arvu n. kuul Leonardo Fibonacci auks F_n, saame esimesteks väärtusteks

$$F_1 = 1, F_2 = 2, F_3 = 3, F_4 = 5, F_5 = 8\,.$$

n. kuul on endiselt elus kõik need F_{n-1} paari, kes eelmisel kuulgi, ja lisaks annab iga paar, kes oli olemas üleelmisel kuul, veel ühe paari järglasi. Seega on n. kuul talumehel kokku $F_{n-1}+F_{n-2}$ paari; niisiis saame kirjutada seose

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}\,.$$

Nõnda näiteks

$$F_6 = F_5 + F_4 = 8 + 5 = 13\,, \quad F_7 = F_6 + F_5 = 13 + 8 = 21 \quad \text{jne.}$$

□

Tekkivat jada F_n nimetatakse *Fibonacci jadaks*, kuigi tegelikult polnud Leonardo Fibonacci kaugeltki esimene, kes selle jada peale tuli.

Ülesanne 4.21 Umbes 2. sajandil e.m.a. uuris India matemaatik Pingala sanskriti värsimõõte. Teatud tüüpi värssides võib esineda pikki ja lühikesi silpe, kusjuures pikk silp kestab täpselt kaks korda kauem kui lühike. Lugedes lühikese ja pika silbi kestuseks vastavalt 1 ja 2 lööki, küsis Pingala, mitu erinevat rütmivõimalust on n-löögilise värsi koostamiseks. Aita Pingalal sellele küsimusele vastata!

Ülesanne 4.22 Leia kalkulaatori või arvuti abil järjestikuste Fibonacci arvude suhted, st (ligikaudsed) väärtused

$$\frac{F_2}{F_1}, \frac{F_3}{F_2}, \frac{F_4}{F_3}, \frac{F_5}{F_4}, \frac{F_6}{F_5}, \frac{F_7}{F_6}, \frac{F_8}{F_7}, \frac{F_9}{F_8}, \ldots\,.$$

Kas paned midagi tähele?

4.5 Lahendused

4.1 Vastus: arvu $-a$ vastandarv on a.

Tõepoolest, definitsiooni 4.2 järgi peame arvu $-a$ jaoks leidma niisuguse arvu, mille summa arvuga $-a$ oleks 0. Aga me teame, et $a+(-a)=0$, seega sobibki a arvu $-a$ vastandarvuks ehk

$$-(-a) = a\,.$$

Paneme tähele, et arvu ette märgi $-$ kirjutamine on formaalne operatsioon, mille sisu annabki just definitsioon 4.2.

4.2 Vastus: $\frac{1}{3} = 0{,}(3)$, $\frac{2}{3} = 0{,}(6)$, $\frac{5}{9} = 0{,}(5)$, $\frac{14}{11} = 1{,}(27)$, $\frac{4}{37} = 0{,}(108)$.

4.3 Vastus:

$$\frac{1}{7} = 0{,}(142857)\,, \qquad \frac{4}{7} = 0{,}(571428)\,,$$
$$\frac{2}{7} = 0{,}(285714)\,, \qquad \frac{5}{7} = 0{,}(714285)\,,$$
$$\frac{3}{7} = 0{,}(428571)\,, \qquad \frac{6}{7} = 0{,}(857142)\,.$$

Selgub, et kõik tekkivad tsüklid on sama pikad, kusjuures nad on kõik üksteise tsüklilised ümberpaigutused!

Arvutiülesanne 4.1. Uuri arvuti või kalkulaatori abil, kas midagi sarnast juhtub ka teiste jagajatega. Näiteks leia, milliste kümnendmurdudega võrduvad arvud $\frac{1}{13}$, $\frac{2}{13}$, $\frac{3}{12}$, $\frac{4}{13}$ jne.

4.5 Vastus: ei.

Tõestus on analoogiline teoreemi 4.3 tõestusega.

4.6 Vastus: jah.

Sobib näiteks ratsionaalarv $q = 2$.

4.7

4.8 Vastus: $\sqrt{3} \approx 1{,}732$.

4.9 Vastus: $\frac{a}{b} = \sqrt{2}$.

Teisendame võrdust

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} &= \frac{b}{a/2}\,, \\ \frac{a^2}{2} &= b^2\,, \\ \frac{a^2}{b^2} &= 2\,, \\ \left(\frac{a}{b}\right)^2 &= 2\,, \qquad |\sqrt{} \\ \frac{a}{b} &= \sqrt{2}\,. \end{aligned}$$

4.10 A4 paberi kõrgus on 297 ja laius 210 millimeetrit. Vastav suhe on

$$\frac{297\,\mathrm{mm}}{210\,\mathrm{mm}} \approx 1{,}414285714\,,$$

mis on väga lähedal väärtusele $\sqrt{2} \approx 1{,}414213562$.

Ülesanne 4.23 Murru $\frac{297}{210}$ kümnendesituses esineb numbrijärjestus 142857. Sama järjestust nägime ka ülesandes 4.3. Kas see on juhuslik kokkusattumus või on siin sügavam põhjus?

4.11 A5 paberilehe laius on $\frac{297\,\mathrm{mm}}{2} \approx 148\,\mathrm{mm}$ ja pikkus $210\,\mathrm{mm}$. Nende mõõtude suhteks saame

$$\frac{210\,\mathrm{mm}}{148\,\mathrm{mm}} \approx 1{,}418918\,.$$

4.12 Olgu A0 paberilehe mõõtmed vastavalt a ja b meetrit. Siis saame võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} \dfrac{a}{b} = \sqrt{2} \\ ab = 1\mathrm{m}^2 \end{cases}.$$

Süsteemi võrrandite korrutamisel saame

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} \cdot ab &= \sqrt{2} \cdot 1\,, \\ a^2 &= \sqrt{2}\,, \\ a &= \sqrt{\sqrt{2}}\,. \end{aligned}$$

Kalkulaatori või arvuti abil leiame, et $\sqrt{\sqrt{2}} \approx 1{,}189\,\mathrm{m}$ ehk $1189\,\mathrm{mm}$.

Süsteemi esimesest võrdusest saame nüüd

$$b = \frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}} \approx 0{,}841\mathrm{m}$$

ehk $841\mathrm{mm}$.

Teine võimalus on kasutada A0 ja A4 lehtede omavahelist seost. Arvestades järjestikust poolitamist näeme, et A0 leht on mõlemas mõõtmes 4 korda pikem kui A4. Selline autelu annab A0 lehe pikkuseks

$$4 \cdot 297\mathrm{mm} = 1188\,\mathrm{mm}$$

ja laiuseks

$$4 \cdot 210\mathrm{mm} = 840\,\mathrm{mm}\,.$$

Standardis defineeritud A0 mõõdud on siiski $1189 \times 841\,\mathrm{mm}$ ja väiksemate lehtede mõõdud on ümardatud täismillimeetriteni.

4.13 Olgu r positiivne irratsionaalarv. Oletame väitevastaselt, et $\sqrt{r}$ on ratsionaalne, st leiduvad täisarvud a ja b nii, et

$$\sqrt{r} = \frac{a}{b}\,.$$

Järelikult

$$r = \left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2}$$

on samuti kahe täisarvu jagatis. Niisiis on ka r ratsionaalarv; vastuolu.

4.14 Teisendame võrdust (4.1):

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} &= \frac{b}{a-b}\,, \\ a(a-b) &= b^2\,, \\ a^2 - ab &= b^2\,, \qquad \mid : ab \\ \frac{a}{b} - 1 &= \frac{b}{a}\,, \\ \frac{a}{b} - 1 &= \frac{1}{a/b}\,, \end{aligned}$$

mida oligi tarvis näidata.

4.15 Vastus: $\varphi \approx 1{,}618$.

4.16 Oletame väitevastaselt, et φ on ratsionaalarv, st leiduvad sellised täisarvud a ja b, et $\varphi = \frac{a}{b}$. Nagu teoreemi 4.3 tõestuseski võime eeldada, et a ja b on positiivsed ning et murd $\frac{a}{b}$ on taandatud (selle olukorra kohta ütleme ka, et a ja b on *ühistegurita*).

Ülesande 4.14 lahenduses nägime, et seosest (4.1) järeldub võrdus

$$a(a-b) = b^2\,.$$

Kuna a on arvu b^2 tegur, aga a ja b on ühistegurita, on ainus võimalus, et $a = 1$.

Teisest küljest saame sama võrduse ümber kirjutada kui

$$\begin{aligned} a^2 - ab &= b^2\,, \\ a^2 &= b^2 + ab\,, \\ a^2 &= b(a+b)\,. \end{aligned}$$

Täpselt sama moodi arutledes jõuame järeldusele, et kuna a ja b on ühistegurita, aga b on arvu a^2 tegur, peab kehtima ka võrdus $b = 1$. Järelikult ka $\varphi = \frac{a}{b} = \frac{1}{1} = 1$. Samas on selge, et $\varphi = 1$ ei rahulda võrdust

$$\varphi - 1 = \frac{1}{\varphi}\,.$$

Oleme saanud vastuolu eeldusega, et φ on ratsionaalarv.

4.18 Pangakaardi täpsed mõõtmed on $3{,}37 \times 2{,}125$ tolli ehk $85{,}6 \times 53{,}98$ sentimeetrit.

$$\frac{85{,}6}{53{,}98} \approx 1{,}586\,,$$

mis on üsna lähedal kuldlõikele.

4.19 Mängukaartide suurus pole nii rangelt standarditud kui pangakaartide oma. Sageli leiame näiteks mängukaarte, mille mõõdud on $3{,}5 \times 2{,}25$ tolli ehk $8{,}89 \times 5{,}71$ sentimeetrit külgede suhtega

$$\frac{8{,}89}{5{,}71} \approx 1{,}557\,,$$

mis on samuti kuldlõikele suhteliselt lähedal.

4.23 Muidugi pole see juhus. Kuna nii 297 kui 210 jaguvad 3-ga, saame murru taandada ja teisendada:

$$\frac{297}{210} = \frac{99}{70} = 1\frac{29}{70}\,.$$

Kuna

$$\frac{29}{7} = 4\frac{1}{7} = 4{,}(142857)\,,$$

siis

$$1\frac{29}{70} = 1{,}4(142857)\,.$$

4.21 Tähistades lühikest silpi - ja pikka —, saame väikeste n väärtuste korral järgmised võimalused.

- Juhul $n = 1$ on 1 võimalus: -.
- Juhul $n = 2$ on 2 võimalust: -- ja —.
- Juhul $n = 3$ on 3 võimalust: ---, —- ja -—.
- Juhul $n = 4$ on 5 võimalust: ----, —--, -—-, --— ja ——.
- Juhul $n = 5$ on 8 võimalust: -----, —---, -—--, --—-, ---—, ——-, —-— ja -——.

Näeme, et vähemalt jada esimesed liikmed $1, 2, 3, 5, 8$ langevad kokku Fibonacci jadaga. Tähistades n-löögiliste värsiskeemide arvu V_n, tuleb veel näidata, et ka nende puhul kehtib seos

$$V_n = V_{n-1} + V_{n-2}\,.$$

Selles pole raske veenduda. Iga värss algab kas lühikese või pika silbiga. Nende n-löögiliste värsiskeemide arv, mis algavad lühikese silbiga, on täpselt V_{n-1}, sest lühike silp võtab värsi algusest enda alla ühe löögi. Sama moodi näeme, et kuna pikk silp võtab kaks lööki, on n-löögiliste värsiskeemide arv, mis algavad pika silbiga, täpselt $n - 2$. Seega tõepoolest $V_n = V_{n-1} + V_{n-2}$, mida oligi tarvis tõestada.

4.22 Leiame järjestikuste Fibonacci arvude suhete ligikaudsed väärtused:

$$\frac{F_2}{F_1} = \frac{2}{1} = 2\,, \qquad \frac{F_6}{F_5} = \frac{13}{8} = 1{,}625\,,$$
$$\frac{F_3}{F_2} = \frac{3}{2} = 1{,}5\,, \qquad \frac{F_7}{F_6} = \frac{21}{13} \approx 1{,}615\,,$$
$$\frac{F_4}{F_3} = \frac{5}{3} \approx 1{,}667\,, \qquad \frac{F_8}{F_7} = \frac{34}{21} \approx 1{,}619\,,$$
$$\frac{F_5}{F_4} = \frac{8}{5} = 1{,}6\,, \qquad \frac{F_9}{F_8} = \frac{55}{34} \approx 1{,}618\,.$$

Näeme, et see suhe liigub järjest lähemale kuldlõike konstandile φ! On võimalik tõestada, et jada $\frac{F_n}{F_{n-1}}$ elementide väärtuste abil saab arvu φ lähendada tõepoolest kuitahes hästi (täpsemalt, see jada *koondub* arvuks φ).

Selleks, et arvutusi kiiremini sooritada, võime koostada programmi. Näiteks Pythonis saame järjestikuseid suhteid $\frac{F_n}{F_{n-1}}$ arvutada nii:

```
f = 1
g = 2

for i in range(100):
    print(g/f)
    f,g = g,f+g
```

Mis siin toimub? Kõigepealt omistame muutujatele `f` ja `g` vastavalt F_1 ja F_2 väärtused ehk 1 ja 2. Siis trükime `for`-tsükli esimesel sammul välja nende suhte ning seejärel uuendame `f` ja `g` väärtusi. Python lubab meil ühel sammul teha kaks omistamist korraga, andes muutujale `f` muutuja `g` vana väärtuse (ehk F_2) ning muutuja `g` uueks väärtuseks saab `f+g` ehk $F_1 + F_2 = F_3$. Niimoodi tsüklit 100 korda läbi tehes leiamegi järgmistel sammudel suhted $\frac{F_3}{F_2}, \frac{F_4}{F_3}, \ldots, \frac{F_{101}}{F_{100}}$.

PEATÜKK 5

Ruutvõrrand

Definitsioon 5.1. Ruutvõrrand *on võrrand kujul* $ax^2 + bx + c = 0$*, kus* $a \neq 0$*,* a,b,$c \in \mathbb{R}$ *ning kus muutuja* x *väärtust otsime samuti reaalarvude hulgast.*

Ruutvõrrandit (ja üldse igasuguse astme võrrandeid) saab vaadelda ka üle teiste arvuvaldade. Mauruse 9. klassi tööraamatus [5] on ruutvõrrand defineeritud ainult ratsionaalarvuliste kordajate jaoks, kuid see on 9. klassi jaoks liiga kitsendav. Esiteks on irratsionaalarvud selleks hetkeks juba sisse toodud ja teiseks tekivad irratsionaalarvud ka ratsionaalarvuliste kordajatega võrrandite lahenditena nagunii. Seega soovitame tuua tunnis sisse reaalarvud ning nendega ka ruutvõrrandite puhul töötada.

Üldkujulise lahendivalemi tuletamiseni soovitame liikuda sammsammuliselt, mittetäielike ruutvõrrandite kaudu.

5.1 Mittetäielik ruutvõrrand kujul $ax^2 + bx = 0$

Õpetaja kirjutab võrrandi tahvlile ning võib seejärel küsida, kas keegi oskab kohe öelda muutuja x mõne väärtuse, mis seda võrrandit kindlasti rahuldab. Ühise arutelu järel jõutakse arusaamiseni, et $x = 0$ annab tõepoolest avaldise $ax^2 + bx$ väärtuseks 0.

Kas on veel võimalikke lahendeid? Nende leidmiseks võib võrrandi vasaku poole tegurdada, viies võrrandi kujule $x(ax + b) = 0$. Kahe reaalarvu korrutis saab olla 0 ainult siis, kui üks teguritest on 0. Esimene võimalus annab juba leitud lahendi $x_1 = 0$, teisest tegurist saame aga

$$\begin{aligned} ax + b &= 0\,, \\ ax &= -b\,, \\ x &= -\frac{b}{a}\,, \end{aligned}$$

mis annabki teise võimaliku lahendi $x_2 = -\frac{b}{a}$. Paneme tähele, et see lahend on kindlasti määratud, sest $a \neq 0$.

Metoodiliselt on oluline mitte tuupida õpilastele pähe konkreetsele võrrandi tüübile vatavaid lahendite kujusid, vaid toetada neid lahendusmeetodi sügavamal mõistmisel. Antud juhul on oluline uuritava avaldise tegurdamine ja õpilased peaksid õppima lihtsamaid tegurdusi läbi nägema.

Ülesanne 5.1 Leia kõik reaalarvud, mis võrduvad iseenda ruuduga.

Lahendus. Vastus: 0 ja 1.

Olgu x otsitav reaalarv, siis on ülesande tingimus kirja pandav võrrandiga $x^2 = x$. Teisendame seda võrrandit:

$$\begin{aligned} x^2 &= x\,, \\ x^2 - x &= 0\,, \\ x(x-1) &= 0\,. \end{aligned}$$

Kuna kahe reaalarvu korrutis saab olla 0 ainult siis, kui üks teguritest on 0, saame kaks võimalust: $x_1 = 0$ ja $x_2 - 1 = 0$ ehk $x_2 = 1$. □

Ülesanne 5.2 Leia kõik reaalarvud, mis võrduvad iseenda kuubiga.

5.2 Mittetäielik ruutvõrrand kujul $ax^2 + c = 0$

Õpetaja kirjutab võrrandi tahvlile ja küsib, kas keegi oskab kohe öelda muutuja x mõne väärtuse, mis seda võrrandit kindlasti rahuldab. Selgub, et $x = 0$ üldjuhul enam ei sobi, sama moodi ka $x = 1$ ega üldse ükski teine võrrandi kordajatest sõltumatu konstantne väärtus. Küll aga saab antud võrrandit veidi teisendada:

$$\begin{aligned} ax^2 + c &= 0\,, \\ ax^2 &= -c\,, \\ x^2 &= -\frac{c}{a}\,. \end{aligned}$$

Nüüd saame muutuja x väärtuse leidmiseks mõlemast võrduse poolest ruutjuure võtta, aga reaalarvulise ruutjuure leidumiseks tuleb lisaks eeldada võrratust $-\frac{c}{a} \geqslant 0$. Teiseks tuleb arvestada, et ruutjuurel on kaks vastandarvulist väärtust, nii et kokkuvõttes saame lahenditeks

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}\,.$$

5.3 Ruutvõrrand kujul $x^2 + 2dx + e = 0$

Tegemist on täieliku, kuid erikujulise taandatud ruutvõrrandiga. Selle lahendite leidmisel aitab meid tähelepanek, et kaksliikme summa ruudu valemi põhjal $(x+d)^2 = x^2 + 2dx + d^2$, mis erineb uuritava võrrandi vasakust poolest vaid

vabaliikme võrra. Niisiis saame võrrandit teisendada järgnevalt (kontrolli, et kõigi sammude järel jääb võrrand algsega samaväärseks!):

$$\begin{aligned} x^2 + 2dx + e &= 0\,, \\ x^2 + 2dx + d^2 - d^2 + e &= 0\,, \\ (x+d)^2 - d^2 + e &= 0\,. \end{aligned}$$

Kuna $-d^2+e$ on lihtsalt mingi arv, oleme sisuliselt saanud jaotises 5.2 käsitletud juhu! Seda on veidi parem näha, kasutades muutujate ümbertähistamist. Näiteks tähistades $y = x + d$ ja $c = -d^2 + e$, saame võrrandi teisendada kujule

$$y^2 + c = 0\,,$$

mille lahendid on

$$y_{1,2} = \pm\sqrt{-c} \quad (-c \geqslant 0)\,.$$

Asendades tagasi $x = -d + y$ ja $c = -d^2 + e$ (ehk $-c = d^2 - e$), saame

$$x_{1,2} = -d \pm \sqrt{d^2 - e} \quad (d^2 - e \geqslant 0)\,.$$

Siinjuures on oluline julgustada õpilasi võrrandis kaksliikme ruudu valemit ära tundma, mitte suunata neid lahendivalemit pähe tuupima.

Ülesanne 5.3 Lahenda võrrand $x^2 + 4x - 12 = 0$.

Lahendus. Vastus: $x_1 = -6$ ja $x_2 = 2$.

Eraldame kaksliikme ruudu ja teisendame võrrandit:

$$\begin{aligned} x^2 + 4x - 12 &= 0\,, \\ x^2 + 4x + 4 - 4 - 12 &= 0\,, \\ (x+2)^2 - 16 &= 0\,, \\ (x+2)^2 &= 16\,, \\ x + 2 &= \pm\sqrt{16} = \pm 4\,, \\ x &= -2 \pm 4\,, \end{aligned}$$

kust saame $x_1 = -2 - 4 = -6$ ja $x_2 = -2 + 4 = 2$.

Kontrollime saadud lahendeid: $(-6)^2 + 4 \cdot (-6) - 12 = 36 - 24 - 12 = 0$ ja $2^2 + 4 \cdot 2 - 12 = 4 + 8 - 12 = 0$, seega mõlemad lahendid sobivad. □

Ülesanne 5.4 Leia järgmiste võrrandite kõik reaalarvulised lahendid:

(a) $x^2 - 2x - 8 = 0$,

(b) $y^2 + 10y + 16 = 0$,

(c) $x^2 + 6x + 9 = 0$,

(d) $y^2 - 6y + 10 = 0$,

(e) $t^2 + t - 2 = 0$.

5.4 Ruutvõrrand üldkujul $ax^2 + bx + c = 0$

Üldkujulise ruutvõrrandi lahendusviisi saame jaotises 5.3 toodud meetodi abil. Kõigepealt tuleb antud ruutvõrrand taandada, jagades võrrandi mõlemad pooled läbi kordajaga a (seda tohib teha, sest $a \neq 0$):

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= 0\,, \quad | : a \\ x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} &= 0\,. \end{aligned}$$

Näeme, et see võrrand on nüüd kujul $x^2 + 2dx + e = 0$, kus $d = \frac{b}{2a}$ ning $e = \frac{c}{a}$. Seega saame kasutada jaotisest jaotises 5.3 tuttavat kaksliikme ruudu eraldamise võtet. Teisendame saadud võrrandit edasi:

$$\begin{aligned} x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \frac{c}{a} &= 0\,, \\ x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} &= 0\,, \\ \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} &= 0\,, \\ \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 &= \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}\,, \\ \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 &= \frac{b^2}{4a^2} - \frac{4ac}{4a^2} = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\,, \\ x + \frac{b}{2a} &= \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\,, \\ x &= -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\,. \end{aligned}$$

Oleme tuletanud ruutvõrrandi lahendivalemi. Lisaks paneme tähele, et ruutjuure reaalarvuliste väärtuste olemsoluks on tarvis, et $b^2 - 4ac \geqslant 0$.

Nüüd oleme valmis tõestama järgmise olulise tulemuse, mille sõnastame siinkohal üleandena. Iseõppimise korral soovitab autor kõigepealt ise tõestust otsida enne kui jaotisest 5.5 abi otsida.

Ülesanne 5.5 Näita, et kui ruutvõrrandi $ax^2 + bx + c = 0$ lahendid on x_1 ja x_2, kehtib võrdus

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)\,.$$

Selle ülesande (ja tegelikult üldiselt hulkliikmete käsitluse) juures on üks küsimus, millest meie õpikutes sageli üle libisetakse. Nimelt jäetakse tavaliselt defineerimata, mida õigupoolest tähendab, et kaks hulkliiget on võrdsed. Probleem seisneb selles, et hulkliikmete võrdsusel on kaks võimalikku definitsiooni. Ühest küljest võime rääkida avaldiste formaalsest kokkulangemisest, st hulkliikmete puhul kordajate vastavast võrdsusest. Teisest küljest aga esitab iga hulkliige ka mingit funktsiooni, seega võime kõnelda hulkliikmete kui funktsioonide võrdsusest igal argumendil.

Õnneks osutub, et need kaks definitsiooni on samaväärsed. Täpsemalt saab tõestada järgmise teoreemi (tõestust vaata õpikust [7], teoreem 10.2).

Teoreem 5.1 Olgu antud reaalarvuliste kordajatega n. astme hulkliikmed

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \quad \text{ja}$$
$$Q(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0 \,.$$

Järgmised väited on samaväärsed.

(a) Iga $i = 0, 1, \ldots, n$ korral $a_i = b_i$.

(b) Iga $x \in \mathbb{R}$ korral $P(x) = Q(x)$.

Ülesanne 5.6 Leia kuldlõik konstandi täpne väärtus, st niisugune positiivne reaalarv φ, et $\varphi - 1 = \frac{1}{\varphi}$ (vt ülesanded 4.14 ja 4.15). Kas leidub ka negatiivseid reaalarve, mis rahuldavad sama võrdust?

5.5 Lahendused

5.2 Vastus: 1, 0 ja -1.

Olgu x otsitav reaalarv, siis on ülesande tingimus kirja pandav võrrandiga $x^3 = x$. Teisendame seda võrrandit:

$$\begin{aligned} x^3 &= x\,, \\ x^3 - x &= 0\,, \\ x(x^2 - 1) &= 0\,. \end{aligned}$$

Viimase võrrandi vasaku poole teguris $x^2 - 1$ tunneme ära ruutude vahe, mida saame tegurdada $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$. Kokkuvõttes saame võrrandi

$$(x-1)x(x+1) = 0\,.$$

Kuna kolme reaalarvu korrutis saab olla 0 ainult siis, kui üks teguritest on 0, saame kolm võimalust: $x_1 - 1 = 0$ ehk $x_1 = 1$, $x_2 = 0$ ja $x_3 + 1 = 0$ ehk $x_3 = -1$.

5.4

5.5 Tõestatava võrduse paremat poolt lahti kirjutdes saame

$$a(x - x_1)(x - x_2) = a(x^2 - x_1 x - x_2 x + x_1 x_2) = ax^2 - a(x_1 + x_2)x + a x_1 x_2\,.$$

Ülesande väite tõestamiseks piisab, kui näitame, et $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ ja $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$.

Tuletame meelde, et antud ruutvõrrandi lahendid avalduvad kujul

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{ja} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\,.$$

Niisiis võime arvutada

$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 &= \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} + \left(\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right) = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}\,,\\
x_1x_2 &= \left(\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right) =\\
&= \frac{(-b)^2-(\sqrt{b^2-4ac})^2}{4a^2} = \frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}\,,
\end{aligned}$$

mida oligi tarvis tõestada.

5.6 Vastus: $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Antud võrrandit rahuldab ka negatiivne arv $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$
Võrduse $\varphi - 1 = \frac{1}{\varphi}$ saame ümber kirjutada kujul

$$\begin{aligned}
\varphi - 1 &= \frac{1}{\varphi}\,, \quad |\cdot\varphi\\
\varphi^2 - \varphi &= 1\,,\\
\varphi^2 - \varphi - 1 &= 0\,,
\end{aligned}$$

mis on ruutvõrrand φ suhtes. Kasutame näiteks täisruuduks teisendamise võtet:

$$\begin{aligned}
\varphi^2 - \varphi - 1 &= 0\,,\\
\varphi^2 - 2\cdot\frac{1}{2}\varphi - 1 &= 0\,,\\
\varphi^2 - 2\cdot\frac{1}{2}\varphi + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} - 1 &= 0\,,\\
\left(\varphi - \frac{1}{2}\right)^2 &= \frac{5}{4}\,,\\
\varphi - \frac{1}{2} &= \pm\sqrt{\frac{5}{4}}\,,\\
\varphi &= \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\,.
\end{aligned}$$

Kahest võimalikust väärtusest $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ja $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ on esimene positiivne ja teine negatiivne (sest $\sqrt{5} > 1$). Niisiis sobib kuldlõike konstandiks $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Harjutus 5.1 Kontrolli arvuti või kalkulaatori abil, et $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}618$.

Harjutus 5.2 Kontrolli vahetult arvutades, et ka $\frac{1-\sqrt{5}}{1}$ rahuldab võrdust $\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$.

Harjutus 5.3 Lahenda ruutvõrrand $\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$ üldkujulise ruutvõrrandi lahendivalemi abil. Kas saad sama tulemuse?

PEATÜKK 6

Pythagorase teoreem

6.1 Pythagorase teoreem ja pöördteoreem

Pythagorase teoreem (mida tunti juba ammu enne Pythagorast) on lihtne, kuid samas väga sügav tulemus, mis seob omavahel geomeetria, algebra ja arvuteooria.

Teoreem 6.1 **(Pythagorase teoreem)** Täisnurkses kolmnurgas kaatetite pikkustega a ja b ning hüpotenuusi pikkusega c kehtib võrdus

$$a^2 + b^2 = c^2 \,.$$

Teoreemi 6.1 tõestus on olemas kõigis Eesti 9. klassi õpikutes [2, 4, 5, 6].

Räägitakse, et Pythagorase teoreemil on 142 erinevat tõestust. Mida see tähendab?

See tähendab, et Pythagorase teoreem kehtib.

Õpik [4] toob Pythagorase teoreemi rakendusena jubaVana-Egiptuses tuntud meetodi, kus köiele tehti võrdsete vahemaade tagant sisse 13 sõlme ning seati 12 võrdseks osaks jagatud köis kolmnurgaks küljepikkustega $3, 4$ ja 5. Nii saadi täisnurkne kolmnurk.

Väide, et kolmnurk küljepikkustega $3, 4$ ja 5 on täisnurkne, on küll õige, kuid see ei järeldu mitte Pythagorase teoreemist, vaid Pythagorase teoreemi pöördteoreemist.

Teoreem 6.2 **(Pythagorase teoreemi pöördteoreem)** Kui kolmnurgas küljepikkustega a, b ja c kehtib võrdus

$$a^2 + b^2 = c^2 \,,$$

siis on kolmnurk täisnurkne kaatetitega a ja b.

Tõestus. Olgu antud kolmnurk küljepikkustega a, b ja c ning vaatleme lisaks teist kolmnurka, mis on täisnurkne, kaatetite pikkustega a ja b ning hüpotenuusi pikkusega c'. Teoreemi eelduse põhjal teame antud kolmnurgast, et

$$a^2 + b^2 = c^2 ,$$

Pythagorase teoreemist teise kolmnurga jaoks saame aga võrduse

$$a^2 + b^2 = c'^2 .$$

Niisiis

$$c^2 = a^2 + b^2 = c'^2 ,$$

millest järelduvad võrdused $c^2 = c'^2$ ja $c = c'$. Niisiis on vaadeldavad kolmnurgad tunnuse KKK alusel võrdsed. Muuhulgas peab antud kolmnurk olema täisnurkne kaatetitega a ja b. □

6.2 Pythagorase kolmikud

Definitsioon 6.1. Pythagorase kolmikuks *nimetatakse positiivsete täisarvude kolmikut* (a,b,c)*, mille korral kehtib võrdus* $a^2 + b^2 = c^2$.

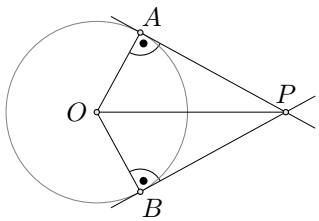
Õpikus [5] on toodud Pythagorase kolmikute mõiste ning väide, et neid kolmikuid on lõpmata palju, kuid mitte selle väite põhjendust.

Ülesanne 6.1 Tõesta, et Pythagorase kolmikuid on lõpmata palju.

6.3 Järeldusi Pythagorase teoreemist

Teoreem 6.3 Ühest punktist ringjoonele tõmmatud puutujalõigud on võrdsed.

Tõestus. Vaatleme ringjoont keskpunktiga O ning punkti P ringjoonest väljaspool. Punktist P saab ringjoonele tõmmata kaks puutujat; olgu puutepunktid vastavalt A ja B. Peame tõestama, et $|AP| = |BP|$. Teeme joonise ning tõmbame ära ka lõigud OA, OB ja OP.



Kuna raadius ja tema otspunktist tõmmatud puutuja on risti (vt teoreem 1.12), siis on kolmnurgad OAP ja OBP täisnurksed. Lisaks teame, et raadiustena $|OA| = |OB|$ ning külg OP on neil kolmnurkadel ühine. Nüüd saame Pythagorase teoreemist võrdused

$$|OA|^2 + |AP|^2 = |OP|^2 \quad \text{ja} \quad |OB|^2 + |BP|^2 = |OP|^2\,,$$

millest omakorda

$$|AP|^2 = |OP|^2 - |OA|^2 = |OP|^2 - |OB|^2 = |BP|^2\,.$$

Siit aga järeldubki vajalik võrdus $|AP| = |BP|$. □

Ülesanne 6.2 Teoreemi 6.3 idee on sisuliselt näidata, et kolmnurgad OAP ja OBP on võrdsed. Neil kolmnurkadel on kaks paari võrdseid külgi ning üks paar võrdseid nurki. Miks nende kolmnurkade võrdsuse näitamiseks ei saa kasutada KNK tunnust?

6.4 Lahendused

6.1 Ülesande väite tõestamiseks piisab, kui anname konstruktsiooni, mis genereerib lõpmata palju Pythagorase kolmikuid. Võimalikke konstruktsioone on mitu.

Näiteks võime pihta hakata suvalisest konkreetsest Pythagorse kolmikust (näiteks kasvõi $(3, 4, 5)$) ja panna tähele, et kui (a, b, c) on Pythagorase kolmik, siis on seda ka (ka,kb,kc) suvalise positiivse täisarvu k korral. Tõepoolest:

$$(ka)^2 + (kb)^2 = k^2a^2 + k^2b^2 = k^2(a^2 + b^2) = k^2c^2 = (kc)^2\,.$$

Niisiis on Pythagorase kolmikuteks peale $(3, 4, 5)$ ka $(6, 8, 10)$, $(9, 12, 15)$ jne.

Teine võimalus on kasutada ülesandes 1.8 leitud võrdust

$$n^2 + (2n + 1) = (n + 1)^2\,.$$

Selle võrduse abil Pythagorase kolmiku konstrueerimiseks piisab, kui $2n+1$ on täisruut. Jääb tähele panna, et paarituid täisruute on lõpmata palju. Näiteks kui $2n + 1 = 9$, siis $n = 4$ ja $n + 1 = 5$, niisiis saame siit juba tuttava kolmiku $(4, 3, 5)$. Aga kui võtta $2n + 1 = 25$, saame $n = 12$ ja $n + 1 = 13$ ning kokkuvõttes tekib uus kolmik $(12, 5, 13)$. Ka niisugust tüüpi kolmikuid on ilmselt lõpmata palju.

6.2 KNK tunnust ei saa kasutada, sest teadaolevad võrdsed nurgad ei asu teadaolevate võrdsete külgede vahel.

PEATÜKK 7

Sarnased kolmnurgad

7.1 Pindalade meetod

Pindalade uurimise meetodi peamine idee on siduda omavahel pindalade ja joonmõõtmete suhted. Seda lähenemist ilmestab järgmine lihtne, kuid väga kasulik tulemus.

Teoreem 7.1 Võrdsete kõrgustega kolmnurkade pindalad suhtuvad sama moodi nagu nende alused.

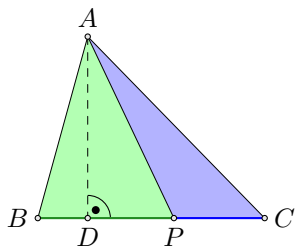
Tõestus. Olgu vaadeldavate kolmnurkade alused vastavalt a ja b ning kõrgused h. Siis nende pindalad S_1 ja S_2 suhtuvad nagu

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{\frac{a \cdot h}{2}}{\frac{b \cdot h}{2}} = \frac{a}{b}\,.$$

□

Seda teoreemi kasutatakse sageli olukorras, kus vaadeldavate kolmnurkade alused asuvad ühel sirgel ja kõrgused langevad kokku. Näiteks kui kolmnurga ABC küljel BC on võetud punkt P, kehtib võrdus

$$\frac{S_{ABP}}{S_{APC}} = \frac{|BP|}{|PC|}\,.$$

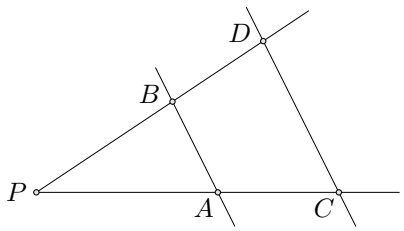


7.2 Kolmnurkade sarnasus

Definitsioon 7.1. *Kolmnurki ABC ja DEF nimetame* sarnasteks*, kui nende küljed on vastavalt võrdelised, st kehtivad võrdused $\frac{|AB|}{|DE|} = \frac{|BC|}{|EF|} = \frac{|CA|}{|FD|}$. Sel juhul kirjutame $\triangle ABC \sim \triangle DEF$. Külgede pikkuste suhet $k = \frac{|AB|}{|DE|}$ (või $k = \frac{|DE|}{|AB|}$) nimetame nende kolmnurkade* sarnasusteguriks.

Alustame peatüki teooriaosa teoreemist, mis võimaldab omavahel siduda kolmnurkade sarnasuse (st teatud lõikude pikkuste suhted) ning sirgete paralleelsuse.

Teoreem 7.2 Kui nurga haarasid lõigata paralleelsete sirgetega, tekivad sarnased kolmnurgad. Joonise 7.1 tähistes $\triangle PAB \sim \triangle PCD$.



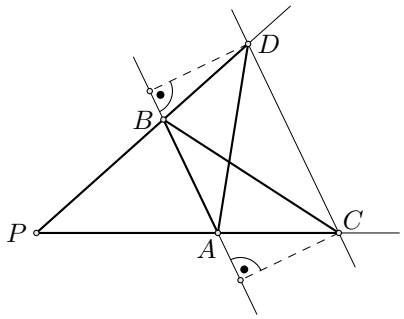
Joonis 7.1

Teoreemi 7.2 tõestuses mängib võtmerolli kiirteteoreem, millel on võistlusülesannete lahendamisel ka iseseisev tähtsus.

Teoreem 7.3 **(Kiirteteoreem)** Kui nurga haarasid lõigata paralleelsete sirgetega, tekivad haaradel vastavalt võrdeliste pikkustega lõigud. Joonise 7.1 tähistes $\frac{|PA|}{|PB|} = \frac{|PC|}{|PD|} = \frac{|AC|}{|BD|}$.

Tõestus. Kasutame pindalade meetodit. Teoreemist 7.1 saame

$$\frac{|PA|}{|PC|} = \frac{S_{ABP}}{S_{CBP}} \quad \text{ja} \quad \frac{|PB|}{|PD|} = \frac{S_{ABP}}{S_{ADP}}.$$



Kuna $AB \parallel CD$, on kolmnurkade ACB ja ADB ühisele küljele AB tõmmatud kõrgused võrdsed, mistõttu $S_{ACB} = S_{ADB}$. Järelikult ka

$$S_{CBP} = S_{ABP} + S_{ACB} = S_{ABP} + S_{ADB} = S_{ADP}\,.$$

Kokkuvõttes

$$\frac{|PA|}{|PC|} = \frac{S_{ABP}}{S_{CBP}} = \frac{S_{ABP}}{S_{ADP}} = \frac{|PB|}{|PD|}\,,$$

millest järeldubki teoreemi esimene võrdus $\frac{|PA|}{|PB|} = \frac{|PC|}{|PD|}$.

Tähistame nüüd $\frac{|PA|}{|PB|} = \frac{|PC|}{|PD|} = k$, siis $|PA| = k \cdot |PB|$ ja $|PC| = k \cdot |PD|$. Sel juhul

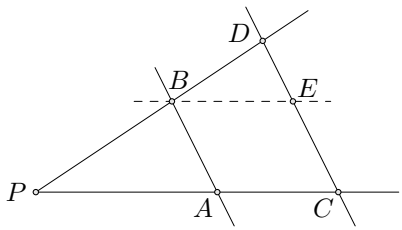
$$|AC| = |PC| - |PA| = k \cdot |PD| - k \cdot |PB| = k \cdot (|PD| - |PB|) = k \cdot |BD|$$

ehk $\frac{|AC|}{|BD|} = k$, nagu oligi teoreemi teise võrduse jaoks tarvis. □

Nüüd võime asuda teoreemi 7.2 tõestamise juurde.

Tõestus (Teoreem 7.2). Kiirteteoreemist saame, et joonisel 7.1 kehtib võrdus $\frac{|PA|}{|PC|} = \frac{|PB|}{|PD|}$. Teoreemi tõestamiseks tuleb lisaks näidata, et kehtib ka seos $\frac{|PB|}{|PD|} = \frac{|AB|}{|CD|}$.[1]

Tõmbame punktist B sirgega PC paralleelse sirge; lõigaku ta sirget CD punktis E.



Kuna $PC \parallel BE$, saame kiirteteoreemi abil nurgast tipuga D võrdused

$$\frac{|PD|}{|CD|} = \frac{|PB|}{|CE|}.$$

Et ka $AB \parallel CE$, on $ACEB$ rööpkülik, järelikult $|CE| = |AB|$ ja

$$\frac{|PD|}{|CD|} = \frac{|PB|}{|AB|}\,, \quad \text{millest omakorda} \quad \frac{|AB|}{|CD|} = \frac{|PB|}{|PD|}\,.$$

Seda aga oligi teoreemi 7.2 tõestuse lõpetamiseks vaja. □

Kehtib ka kiirteteoreemi pöördteoreem.

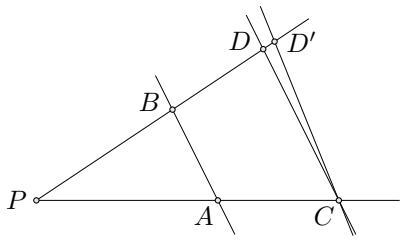
[1] Seda väidet tuntakse kooliõpikutes vahel ka *kiirteteoreemi järelduse* nime all.

Teoreem 7.4 Kui sirged lõikavad nurga haarasid nii, et ühel haaral tekkinud lõigud on võrdelised teise haara vastavate lõikudega, siis on lõikesirged paralleelsed.

Tõestus. Vaatleme nurka tipuga P ning olgu tema haaradel antud vastavalt punktid A,B,C,D nii, et $\frac{|PA|}{|PB|} = \frac{|PC|}{|PD|}$ (vt joonist). Tõmbame läbi punkti C sirgega AB paralleelse sirge ning lõigaku ta nurga teist haara punktis D'. Kiirteteoreemi põhjal teame, et kehtib võrdus $\frac{|PA|}{|PB|} = \frac{|PC|}{|PD'|}$, seega

$$|PD| = \frac{|PB| \cdot |PC|}{|PA|} = |PD'|\,.$$

Niisiis peavad punktid D ja D' tegelikult kokku langema, millest järeldubki teoreemi väide.



□

Teoreemide 7.2, 7.3 ja 7.4 järeldusena saame sõnastada järgmise tulemuse.

Teoreem 7.5 Olgu antud nurk tipuga P ning nurga haaradel vastavalt punktid A ja C ning B ja D. Siis $\triangle PAB \sim \triangle PCD$ parajasti siis, kui $AB \parallel CD$.

Sarnaste kolmnurkade tegelik jõud ülesannete lahendamisel seisneb selles, et nad võimaldavad siduda omavahel lõikude pikkuste suhteid ja nurkade suurusi. Nimelt selgub, et peale definitsiooni 7.1 leidub veel kaks mugavat tunnust kolmnurkade sarnasuse kindlakstegemiseks. Sõnastame selle tulemuse teoreemina.

Teoreem 7.6 Olgu antud kaks kolmnurka. Järgmised tingimused on samaväärsed:

(a) nende kolmnurkade küljed on vastavalt võrdelised (st kolmnurgad on sarnased; tunnus KKK),

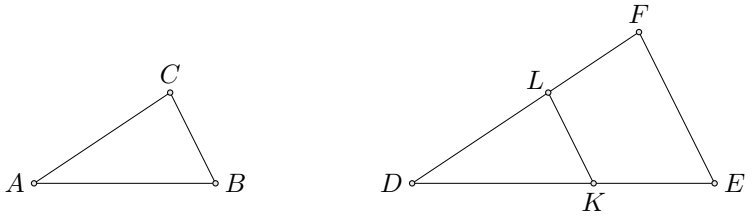
(b) nende kolmnurkade kaks paari külgi on vastavalt võrdelised ning nende külgede vahelised nurgad on võrdsed (tunnus KNK),

(c) nende kolmnurkade nurgad on vastavalt võrdsed (tunnus NNN).

Tõestus. Anname tõestuse kolmes osas, näidates tingimustevahelised järeldusvused $1. \Rightarrow 2.$, $2. \Rightarrow 3.$ ja $3. \Rightarrow 1.$.

$\boxed{1. \Rightarrow 2.}$ Olgu antud sarnased kolmnurgad ABC ja DEF nii, et $\frac{|AB|}{|DE|} = \frac{|BC|}{|EF|} = \frac{|CA|}{|FD|}$. Näitame, et $\angle CAB = \angle FDE$.

Valime kiirel DE niisuguse punkti K, et $|DK| = |AB|$, ning joonestame läbi selle punkti sirgega EF paralleelse sirge. Lõigaku ta sirget DF punktis L.



Kuna konstruktsiooni järgi $KL \parallel FE$, saame teoreemist 7.2, et $\triangle DKL \sim \triangle DEF$, st $\frac{|DK|}{|DE|} = \frac{|KL|}{|EF|} = \frac{|LD|}{|FD|}$. Kuna samuti konstruktsiooni põhjal $|DK| = |AB|$, saame kokkuvõttes võrduste ahela

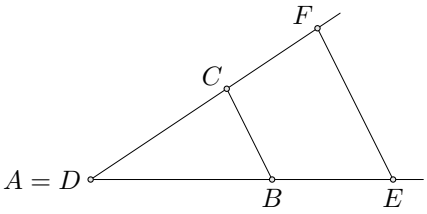
$$\frac{|KL|}{|EF|} = \frac{|LD|}{|FD|} = \frac{|DK|}{|DE|} = \frac{|AB|}{|DE|} = \frac{|BC|}{|EF|} = \frac{|CA|}{|FD|}\,.$$

Muuhulgas $\frac{|KL|}{|EF|} = \frac{|BC|}{|EF|}$ ja $\frac{|LD|}{|FD|} = \frac{|CA|}{|FD|}$, millest omakorda järelduvad võrdused $|KL| = |BC|$ ja $|LD| = |CA|$. Kokkuvõttes on kolmnurkade ABC ja DKL küljed vastavalt võrdsed, mistõttu ka need kolmnurgad ise on võrdsed. Järelikult

$$\angle FDE = \angle LDK = \angle CAB\,,$$

niisiis on kolmnurkade ABC ja DEF küljed AB ja DE ning AC ja DF vastavalt võrdelised ning tippude A ja D juures asuvad nurgad on võrdsed. Seega oleme tõestanud teoreemi 2. tingimuse kehtivuse.

$\boxed{2. \Rightarrow 3.}$ Rahuldagu kolmnurgad ABC ja DEF tingimusi $\frac{|AB|}{|DE|} = \frac{|CA|}{|FD|}$ ja $\angle CAB = \angle FDE$. Tänu nurkade võrdsusele saame kolmnurgad tasandil paigutada nii, et nende tipud A ja D langevad kokku, punkt B asub kiirel DE ning punkt C kiirel DF.



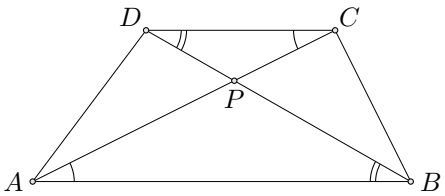
Näeme, et sirged BC ja EF lõikavad nurga haarasid nii, et tekivad võrdelised lõigud. Teoreemi 7.4 põhjal järeldub sellest, et $BC \parallel EF$. Muuhulgas tähendab see, et $\angle ABC = \angle DEF$ ja $\angle BCA = \angle EFD$, niisiis kehtib vaadeldavate kolmnurkade korral tingimus 3.

$\boxed{3. \Rightarrow 1.}$ Kehtigu kolmnurkades ABC ja DEF võrdused $\angle CAB = \angle FDE$, $\angle ABC = \angle DEF$ ja $\angle BCA = \angle EFD$. Sama moodi nagu tõestuse eelmises osas saame kolmnurgad tasandil paigutada nii, et nende tipud A ja D langevad kokku, punkt B asub kiirel DE ning punkt C kiirel DF (vt ka eelmise osa joonist). Muuhulgas järeldub tingimusest $\angle ABC = \angle DEF$, et $BC \parallel EF$. Teoreemi 7.2 abil saame nüüd aga järeldada 1. tingimuse kehtivuse. $\square$

Kuna iga kolmnurga nurkade summa on $180°$, piisab tunnuse NNN puhul muidugi ainult kahe nurga vastava võrdsuse näitamisest (mistõttu teda nimetatakse ka lihtsalt NN tunnuseks).

Teoreemi 7.6 kasutatakse sageli nii, et tõestatakse kahe kolmnurga sarnasus mingi tunnuse alusel ja siis kasutatakse mõnda teist tunnust uute seoste tuletamiseks.

Kasulik kujund, milles alati leidub kaks sarnast kolmnurka, on trapets. Vaatleme trapetsit alustega AB ja CD ning diagonaalide lõikepunktiga P.



Joonis 7.2

Tänu põiknurkade võrdsusele saame $\angle PAB = \angle PCD$ ja $\angle ABP = \angle CDP$, niisiis on kolmnurgad PAB ja PCD sarnased tunnuse NN põhjal. Siit saame tuletada vastavate külgede pikkuste võrdelisuse.

Ülesanne 7.1 (Lõppvoor 2013, 10. klass) Trapetsi $ABCD$ alused on AB ja CD ning diagonaalide lõikepunkt on P. Tõesta, et kui $\frac{|PA|}{|PD|} = \frac{|PB|}{|PC|}$, siis trapets $ABCD$ on võrdhaarne.

Lahendus. Kasutame joonist 7.2. Nagu nägime, kehtib $\triangle PAB \sim \triangle PCD$, mistõttu $\frac{|PA|}{|PC|} = \frac{|PB|}{|PD|}$ ehk $|PA| \cdot |PD| = |PB| \cdot |PC|$. Korrutades viimast võrdust ülesande võrdusega $\frac{|PA|}{|PD|} = \frac{|PB|}{|PC|}$, saame $|PA|^2 = |PB|^2$, millest järeldub $|PA| = |PB|$, st kolmnurk PAB on võrdhaarne. Kuna $\triangle PAB \sim \triangle PCD$, peab ka kolmnurk PCD olema võrdhaarne, st $|PC| = |PD|$.

Tippnurkade võrdsusest saame $\angle APD = \angle BPC$. Niisiis on kolmnurkadel APD ja BPC kaks vastavalt võrdset külge ja nende külgede vaheline võrdne nurk. Seega on need kolmnurgad võrdsed tunnuse KNK alusel, millest järeldubki $|AD| = |BC|$. $\square$

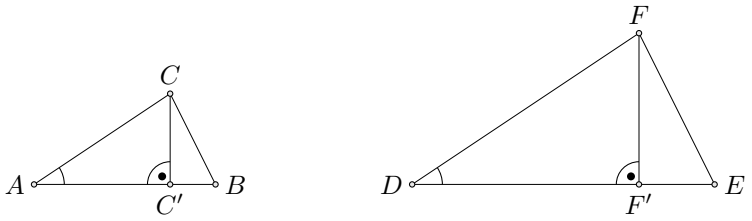
Kolmnurkade sarnasusest tulenevad seosed ei piirdu ainult külgede pikkuste suhete ja külgedevaheliste nurkade võrdsusega. Võrdelisteks osutuvad ka kõik teised vastavad joonmõõtmed ning võrdseteks kõik teised vastavad nurgad.

Selle väite üldkujuline tõestus eeldab ka sarnasuse defineerimist üldisemal kujul. Iga konkreetse joonsuuruse või nurga kohta saab reeglina muidugi anda ka omaette tõestuse.

Vaatleme näiteks sarnaseid kolmnurki ABC ja DEF sarnasusteguriga $k = \frac{|FD|}{|CA|}$ ning näitame, et nende vastavatest tippudest C ja F tõmmatud kõrguste pikkuste suhe on samuti k.

Vaatleme kõigepealt olukorda, kus tippude A ja D juures on teravnurgad; siis satuvad kõrguste aluspunktid C' ja F' sirgetele AB ja DE nii, et punktid B ja C' (vastavalt E ja F') jäävad punktist A (vastavalt punktist D) samale poole

(vt joonist).



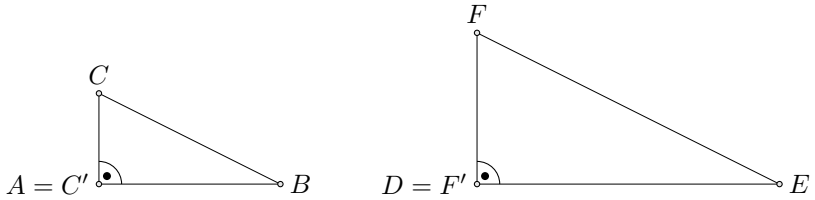
Järelikult saame nurkade võrdused $\angle CAC' = \angle CAB$ ja $\angle FDF' = \angle FDE$. Kuna kolmnurgad ABC ja DEF on sarnased, kehtib ka võrdus $\angle CAB = \angle FDE$, niisiis kokkuvõttes $\angle CAC' = \angle FDF'$. Kuna lisaks $\angle AC'C = 90^\circ = \angle DF'F$, on kolmnurgad $AC'C$ ja $DF'F$ sarnased tunnuse NN alusel. Muuhulgas saame siit

$$\frac{|FF'|}{|CC'|} = \frac{|FD|}{|CA|} = k\,,$$

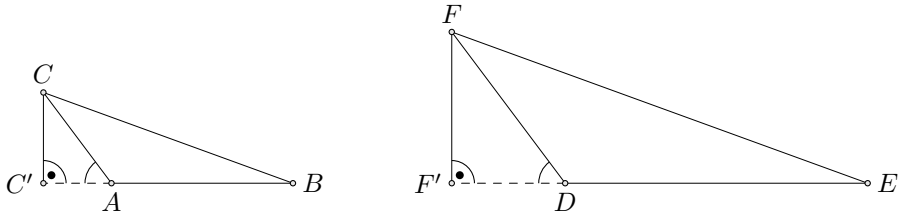
mida oligi tarvis.

Kui tippude A ja D juures on täisnurgad, saame $A = C'$ ja $D = F'$, nii et jälle

$$\frac{|FF'|}{|CC'|} = \frac{|FD|}{|CA|} = k\,.$$



Kui tippude A ja D juures on nürinurgad, tekib joonisel näidatud olukord, kus punkt A (vastavalt D) on punktide C' ja B (vastavalt F' ja E) vahel.



Nüüd saame sarnaselt esimese juhuga

$$\angle C'AC = 180^\circ - \angle CAB = 180^\circ - \angle FDE = \angle F'DF$$

ning $\angle CC'A = 90^\circ = \angle FF'D$. Niisiis on kolmnurgad ACC' ja DFF' sarnased tunnuse NN alusel, mistõttu

$$\frac{|FF'|}{|CC'|} = \frac{|FD|}{|CA|} = k\,.$$

Sellega on kõik võimalikud juhud läbi vaadatud.

Tõestatud väitest saame olulise järelduse sarnaste kolmnurkade pindalade suhte kohta. Eelpool sisseviidud tähistes võime kirjutada, et

$$|DE| = k \cdot |AB| \quad \text{ja} \quad |FF'| = k \cdot |CC'|\,,$$

mistõttu

$$S_{DEF} = \frac{|DE| \cdot |FF'|}{2} = \frac{k \cdot |AB| \cdot k \cdot |CC'|}{2} = k^2 \cdot \frac{|AB| \cdot |CC'|}{2} = k^2 \cdot S_{ABC}\,.$$

Kokkuvõttes oleme tõestanud järgmise tulemuse.[2]

Teoreem 7.7 Sarnaste kolmnurkade pindalade suhe on nende sarnasusteguri ruut.

[2]Tegelikult kehtib see teoreem kõigi (mõõtuvate) tasapinnaliste kujundite puhul. Hulknurki võib jaotada kolmnurkadeks, niisiis saab nende jaoks anda tõestuse teoreemi 7.7 abil, kasutades matemaatilist induktsiooni. Üldjuhul tuleb aga kasutada kõrgema matemaatika meetodeid, mis jäävad selle õpiku raamidest kaugele välja.

PEATÜKK 8

Täisnurkse kolmnurga trigonomeetria

Peatükis 7 nägime, et kolmnurk on sarnasuse täpsusega üheselt ära määratud, kui määrata kolmnurga kaks nurka (NN tunnus). Selles peatükis uurime täisnurkseid kolmnurki, st kolmnurki, mille üks nurk on $90°$. Täisnurkse kolmnurga äramääramiseks sarnasuse täpsusega piisab niisiis veel ainult ühe (terav)nurga täiendavast fikseerimisest.

Kolmnurga määramine sarnasuse täpsusega tähendab, et tema külgede pikkuste suhted on samuti üheselt fikseeritud. Niisiis saame vastavuse, kus igale teravnurga suuruse valikule vastab teatud kindel külgede suhe.

Ülesanne 8.1 Käivita dünaamilise geomeetria programm ja tee järgmine konstruktsioon.

(a) Joonesta lõik AB.

(b) Lisa joonisele liugur, millega saab valida nurka α (võid nurgamaksimaalseks suuruseks määrata $90°$, sest rohkem pole meil vaja).

(c) Määra punkti A juurde lõigu AB suhtes nurk α; olgu B' mingi punkt selle nurga teisel haaral (st $\angle BAB' = \alpha$).

(d) Joonesta sirge AB' ning tõmba punktist B sellele sirgele ristsirge; olgu nende kahe sirge ristumispunkt C.

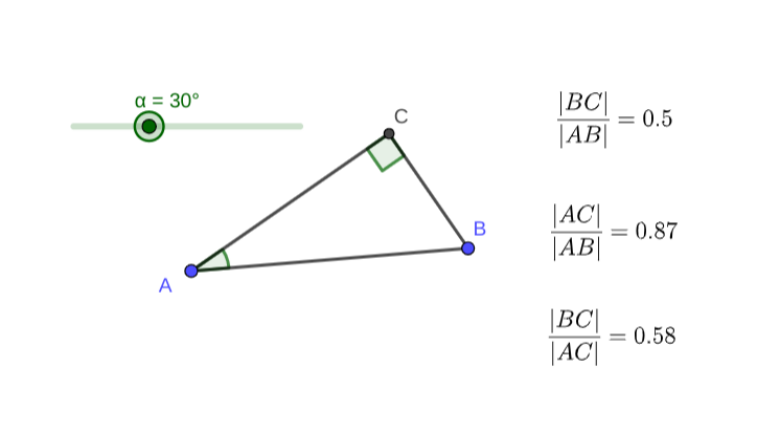
(e) Nüüd on sul täisnurkne kolmnurk ABC täisnurgaga tipu C juures ning nurgaga α tipu A juures. Võid joonist veidi korrastada, näiteks peita ära sirged AB' ja BC ning lisada lõigud AC ja BC.

(f) Lase programmil arvutada lõikude BC ja AB pikkuse suhe.

(g) Liiguta nüüd punkti B nii, et kolmnurga külgede pikkused muutuvad, aga kolmnurk jääb algsega sarnaseks. Kuidas muutub külgede BC ja AB pikkuste suhe?

(h) Muuda nüüd liuguri abil nurka α. Kas külgede BC ja AB pikkuste suhe muutub?

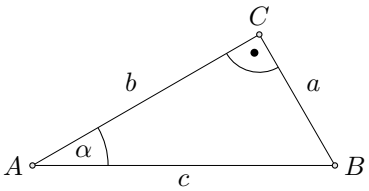
(i) Uuri sama moodi suhteid $\frac{|AC|}{|AB|}$ ja $\frac{|BC|}{|AC|}$.



Salvesta konstruktsioon ära, sest seda läheb kohe jälle vaja ülesandes 8.2.

Näeme, et teravnurk $\angle CAB = \alpha$ määrab üheselt ära täisnurkse kolmnurga külgede suhted. Niisugusel juhul, kus üks suurus määrab teise üheselt ära, ütleme, et nende suuruste vahel on *funktsionaalne sõltuvus*. Suurustevahelist vastavust omakorda nimetame *funktsiooniks*.

Tähistades vaadeldava täisnurkse kolmnurga kaatetite pikkusi vastavalt a ja b ning hüpotenuusi pikkust c, saame arvutiülesande 8.1 põhjal defineerida kolm funktsiooni.



Definitsioon 8.1. *Olgu antud kolmnurk ABC täisnurgaga tipu C juures ja nurgaga α tipu A juures.*

(a) Nurga α siinuseks *nimetame tema vastaskaateti ja hüpotenuusi suhet*

$$\sin\alpha = \frac{|BC|}{|AB|} = \frac{a}{c}\,.$$

(b) Nurga α koosinuseks *nimetame tema lähiskaateti ja hüpotenuusi suhet*

$$\cos\alpha = \frac{|AC|}{|AB|} = \frac{b}{c}\,.$$

(c) *Nurga* α tangensiks *nimetame tema vastaskaateti ja lähiskaateti suhet*

$$\tan\alpha = \frac{|BC|}{|AC|} = \frac{a}{b}\,.$$

Uurime neid funktsioone lähemalt.

Ülesanne 8.2 Jätkame ülesande 8.1 konstruktsiooniga. Koosta tabel, kuhu kirjutad siinuse, koosinuse ja tangensi väärtused nurkade $10°, 20°, \ldots, 90°$ jaoks. Ümarda väärtused tuhandikeni.

α	$10°$	$20°$	$30°$	$40°$	$50°$	$60°$	$70°$	$80°$
$\sin\alpha$								
$\cos\alpha$								
$\tan\alpha$								

Ülesanne 8.3 Paneme tähele, et $\sin 10° = \cos 80°$, $\sin 20° = \cos 70°$ jne. Näita, et see reegel kehtib ka üldiselt, st iga teravnurga α korral

$$\sin\alpha = \cos(90° - \alpha)\,.$$

Ülesanne 8.4 Milliste teravnurkade α korral kehtib võrdus $\sin\alpha = \cos\alpha$?

Ülesanne 8.5 Kontrolli ülesande 8.2 tabeli põhjal, et $\alpha = 10°, 20°, \ldots, 80°$ puhul kehtib võrdus

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\,.$$

Näita, et see võrdus kehtib iga teravnurga α korral.

Ülesanne 8.6 Ülesande 8.2 tabelis on enamus väärtusi ligikaudsed. Ainsad erandid tunduvad olema $\sin 30° = \cos 60°$, mille väärtuseks paistab $0{,}500$. Kas see väärtus on täpne või on tegemist ümardatud arvuga, mille tegelik väärtus on midagi muud? Põhjenda!

Ülesanne 8.7 Ülesande 8.2 tabelist näeme ka, et $\sin 50° \approx 0{,}766$ ja $\sin 60° \approx 0{,}866$. Tekib hüpotees, et $\sin 60° - \sin 50° = 0{,}1$. Kas see võrdus on täpne või ligikaudne?

Ülesanne 8.8 Leia $\sin 45° (= \cos 45°)$ täpne väärtus.

Ülesanne 8.9 Leia $\sin 60° (= \cos 30°)$ täpne väärtus.

Ülesanne 8.10 Ülesande 8.2 tabelis toodud teravnurkade korral jäävad siinuse ja koosinuse väärtused 0 ja 1 vahele. Tõesta, et see on nii ka üldjuhul, st iga $\alpha \in (0°; 90°)$ korral kehtivad võrratused

$$0 < \sin\alpha < 1 \quad \text{ja} \quad 0 < \cos\alpha < 1\,.$$

Ülesanne 8.11 Ülesande 8.2 tabelist näeme ka, et teravnurga tangens pole üldjuhul ülevalt 1-ga tõkestatud, sest näiteks $\tan 80^\circ \approx 5{,}671$. Kas leidub aga mõni teine reaalarv r nii, et iga $\alpha \in (0^\circ; 90^\circ)$ korral kehtiks võrratus

$$\tan\alpha < r\,?$$

Ülesanne 8.12 Leia kalkulaatori või arvuti abil ülesande 8.2 tabeli põhjal mõnede nurkade siinuste ja koosinuste ruutude summa ligikaudsed väärtused (st näiteks $(\sin 20^\circ)^2 + (\cos 20^\circ)^2 \approx 0{,}342^2 + 0{,}940^2 \approx ?$ jne). Kas paned midagi tähele? Sõnasta ja tõesta üldine reegel teravnurga siinuse ja koosinuse ruutude summa kohta.

Ülesanne 8.13 Ülesande 8.12 tulemust saab kasutada Pythagorase teoreemi tõestamiseks.

Olgu antud täisnurkne kolmnurk kaatetite pikkustega a ja b, hüpotenuusi pikkusega c ning teravnurgaga α külje a vastas. Siis $\sin\alpha = \frac{a}{c}$ ja $\cos\alpha = \frac{b}{c}$, järelikult

$$a = c\sin\alpha \quad \text{ja} \quad b = c\cos\alpha\,,$$

millest saame

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= (c\sin\alpha)^2 + (c\cos\alpha)^2 = c^2(\sin\alpha)^2 + c^2(\cos\alpha)^2 = \\ &= c^2[(\sin\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2] = c^2 \cdot 1 = c^2\,. \end{aligned}$$

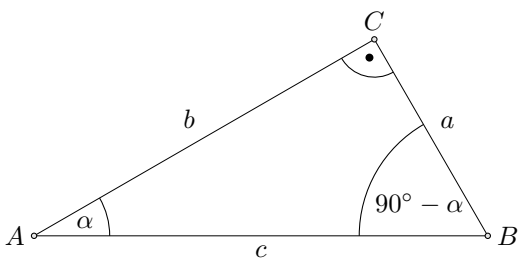
Kus peitub selles tõestuses viga?

8.1 Lahendused

8.2 Kirjutades väärtused välja kolme koha täpsusega pärast koma tuleb tabel selline:

α	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°
$\sin\alpha$	0,174	0,342	0,500	0,643	0,766	0,866	0,940	0,985
$\cos\alpha$	0,985	0,940	0,866	0,766	0,643	0,500	0,342	0,174
$\tan\alpha$	0,176	0,364	0,577	0,839	1,192	1,732	2,747	5,671

8.3 Teeme joonise.



Nurga $\angle CAB = \alpha$ siinus on tema vastaskaateti BC ja hüpotenuusi AB pikkuste suhe:

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}\,.$$

Nurga $\angle ABC = 90^\circ - \alpha$ koosinus on selle nurga lähiskaateti ja hüpotenuusi pikkuste suhe. Nurga ABC lähiskaatetiks on aga samuti BC! Niisiis saame otse definitsioonist 8.1, et

$$\sin\alpha = \frac{a}{c} = \cos(90^\circ - \alpha)\,.$$

8.4 Vastus: 45° on ainus selline teravnurk.

Kasutades definitsiooni 8.1 tähistusi kolmnurga ABC külgede ja nurkade jaoks, saame

$$\sin\alpha = \frac{a}{c} \quad \text{ning} \quad \cos\alpha = \frac{b}{c}\,.$$

Võrdusest $\sin\alpha = \cos\alpha$ saame siis

$$\begin{aligned} \frac{a}{c} &= \frac{b}{c}\,, \\ a &= b\,, \end{aligned}$$

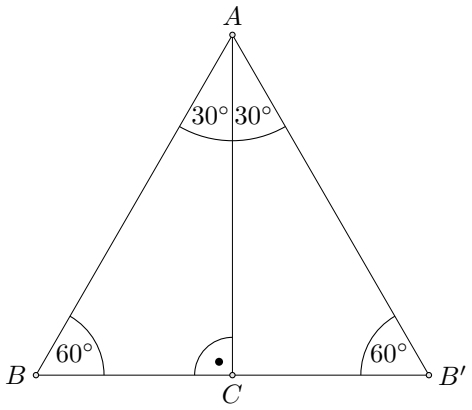
seega on ABC võrdhaarne täisnurkne kolmnurk, mille teravnurgad on suurusega 45°.

8.5 Kasutame jälle tavalisi tähiseid:

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{a/c}{b/c} = \frac{a}{b} = \tan\alpha\,.$$

8.6 Vastus: tegemist on täpse väärtusega.

Selles veendumiseks vaatleme täisnurkset kolmnnurka ABC teravnurkade suurustega 30° ja 60° ning peegeldame teda pikema kaateti suhtes.



Näeme, et tekib kolmnurk nurkadega 60°, 60° ja 60°, st võrdkülgne kolmnurk. Järelikult

$$|AB| = |BB'| = 2|BC|\,,$$

kust saamegi

$$\sin 30^\circ = \sin \angle CAB = \frac{|BC|}{|AB|} = \frac{|BC|}{2|BC|} = \frac{1}{2} = 0{,}5\,.$$

8.7 Vastus: tegemist on ligikaudse väärtusega.

Lastes arvutil leida $\sin 60^\circ$ ja $\sin 50^\circ$ täpsusega näiteks miljondikeni, saame

$$\sin 60^\circ \approx 0{,}866025 \quad \text{ja} \quad \sin 50^\circ \approx 0{,}766044\,,$$

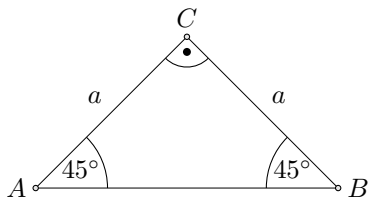
niisiis

$$\sin 60^\circ - \sin 50^\circ \approx 0{,}099981\,.$$

See arv on väga lähedal väärtusele $0{,}1$, kuid jääb sellest siiski õige natuke väiksemaks.

8.8 Vastus: $\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Moodustame täisnurkse kolmnurga ABC ühe teravnurgaga 45°. Siis peab ka teine teravnurk olema 45°. Järelikult on tegu võrdhaarse täisnurkse kolmnurgaga, st $|AC| = |BC| = a$.



Pythagorase teoreemist teame, et

$$|AB|^2 = |AC|^2 + |BC|^2 = a^2 + a^2 = 2 \cdot a^2\,,$$

mistõttu

$$|AB| = \sqrt{2 \cdot a^2} = \sqrt{2} \cdot a\,.$$

Täisnurkses kolmnurgas võrdub teravnurga siinus vastaskaateti ja hupotenuusi pikkuste suhtega, seega

$$\sin 45^\circ = \sin \angle CAB = \frac{|BC|}{|AB|} = \frac{a}{\sqrt{2} \cdot a} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,.$$

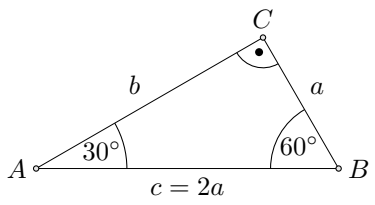
Traditsiooni kohaselt püütakse juuravaldisi murdude nimetajatesse mitte jätta. Antud juhul saame $\sqrt{2}$ nimetajast eemaldada, korrutades murru lugeja ja nimetaja arvuga $\sqrt{2}$ (see operatsioon ei muuda murru väärtust!). Niisiis

$$\sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\,.$$

Arvutiülesanne 8.1. Kontrolli arvuti või kalkulaatori abil, et $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0{,}707$.

8.9 Vastus: $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Moodustame täisnurkse kolmnurga ABC teravurkadega $30°$ ja $60°$.



Ülesandes 8.6 nägime, et $\sin 30° = \frac{1}{2}$, järelikult

$$\frac{1}{2} = \sin 30° = \sin \angle CAB = \frac{|BC|}{|AB|} = \frac{a}{c}\,,$$

millest omakorda saame $c = 2a$. Rakendame kolmnurgas ABC Pythagorase teoreemi:

$$\begin{aligned} c^2 &= a^2 + b^2\,, \\ (2a)^2 &= a^2 + b^2\,, \\ 4a^2 &= a^2 + b^2\,, \\ 3a^2 &= b^2\,, \end{aligned}$$

kust järeldub

$$b = \sqrt{3a^2} = \sqrt{3}a\,.$$

Nüüd saame leida nurga ABC siinuse:

$$\sin 60° = \sin \angle ABC = \frac{|AC|}{|AB|} = \frac{b}{c} = \frac{\sqrt{3}a}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}\,.$$

Arvutiülesanne 8.2. Kontrolli arvuti või kalkulaatori abil, et $\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0{,}866$. Võrdle tulemust ülesande 8.2 tabelisse kantud väärtusega.

8.10 Teravnurga siinus ja koosinus on defineeritud kui teatud täisnurkse kolmnurga kaateti ja hüpotenuusi suhted. Kuna kolmnurga küljepikkused on positiivsed, on positiivne ka nende jagatis, seega peavad nii teravnurkade siinused kui koosinused positiivsed olema.

Teisest küljest on hüpotenuus täisnurkse kolmnurga kõige pikem külg, mistõttu $a < c$ ja $b < c$, millest omakorda järelduvad võrratused

$$\frac{a}{c} < 1 \quad \text{ja} \quad \frac{b}{c} < 1\,.$$

8.11 Vastus: ei leidu.

Tangens on täisnurkse kolmnurga kahe kaateti pikkuste suhe. Me saame näiteks moodustada täisnurkseid kolmnurki, kus üks kaatet on fikseeritud, teise aga viime kuitahes suureks. Nii saame nende pikkuste suhte viia suuremaks mistahes etteantud reaalarvust.

8.12 Paari konkreetse nurgaga läbi proovides saame

$$\begin{aligned}(\sin 10^\circ)^2 + (\cos 10^\circ)^2 &\approx 0{,}174^2 + 0{,}985^2 = 1{,}000501\,,\\ (\sin 20^\circ)^2 + (\cos 20^\circ)^2 &\approx 0{,}342^2 + 0{,}940^2 = 1{,}000564\,,\\ (\sin 30^\circ)^2 + (\cos 30^\circ)^2 &\approx 0{,}500^2 + 0{,}866^2 = 0{,}999956\end{aligned}$$

jne. Kõik saadud väärtused on ümardamise täpsusega 1. Osutub, et iga teravnurga α korral kehtib tõepoolest (täpne!) võrdus

$$(\sin\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 = 1\,.$$

Selles veendumiseks vaatleme täisnurkset kolmnurka ühe teravnurgaga α, kaatetitega a ja b ning hüpotenuusiga c. Siis siinuse ja koosinuse definitsiooni järgi saame

$$(\sin\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 = \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = \frac{a^2+b^2}{c^2}\,.$$

Aga kuna vaadeldav kolmnurk on täisnurkne, siis Pythagorase teoreemist teame, et $a^2 + b^2 = c^2$, seega võrdub viimane avaldis tõepoolest 1-ga.

8.13 Viga peitub selles, et võrduse $(\sin\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 = 1$ tõestamiseks kasutasime me Pythagorase teoreemi. Seega tekiks Pythagorase teoreemi tõestamisel sama võrduse abil olukord, kus väite tõestus sõltub temast endast. Niisugune „tõestustsükkel“ pole lubatud, sest iga väide järeldub iseendast nagunii triviaalselt, isegi siis kui see väide on vale. Seega ei saa pidada korrektseks väite tõestust sedasama väidet eeldades.

Kui me oleksime võrduse $(\sin\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 = 1$ tõestanud ilma Pythagorase teoreemi otseselt või kaudselt kasutamata, oleks kõik korras.

Indeks

aksioom, 6
algmõiste, 6
algväide, 6

defineerimine, 5
definitsioon, 5
Dirichlet' printsiip, 14

eeldus, 12

Fano tasand, 7
Fibonacci jada, 52
funktsionaalne sõltuvus, 80
funktsioon, 80

irratsionaalarv, 48

kaugus
    Manhattani, 9
    punkti ja sirge vahel, 18
kiirteteoreem, 72
kiirteteoreemi pöördteoreem, 73
kontranäide, 13
koosinus, 80
kuldlõige, 50
kumer hulknurk, 23

lemma, 12

naturaalarv, 43

paralleelide aksioom, 7
paralleelsed sirged, 7
periood, 46
puutuja, 21
puutujalõik, 21
Pythagorase kolmik, 68
Pythagorase teoreem, 67
    pöördteoreem, 67
pöördlause, 13
pöördteoreem, 13

ratsionaalarv, 45
reaalarv, 48
ringjoon, 8
    keskpunkt, 8
    raadius, 8
ristkülik, 6
ruut, 6
ruutjuur, 48
ruutvõrrand, 59

sarnased kolmnurgad, 72
sarnased ristkülikud, 49
sarnasustegur, 72
siinus, 80

tangens, 81
teoreem, 12
Thalese teoreem, 35
Thalese teoreemi pöördteoreem, 36
täisarv, 44

vastuväiteline tõestus, 14
väide, 12
võrratus
    kolmnurgavõrratus, 22

ühistegurita arvud, 55

Kirjandus

[1] Elts Abel, Mati Abel ja Ülo Kaasik. *Koolimatemaatika entsüklopeedia*. Ilmamaa, 2006.

[2] Kersti Kaldmäe, Anneli Kontson, Kärt Matiisen ja Enno Pais. *Matemaatika õpik 9. klassile, II osa*. Avita, 2015.

[3] Lea Lepmann ja Tiit Lepmann. *Teeme ise matemaatikat*. Toimetanud Esta Erit. Avita, 1995.

[4] Tiit Lepmann, Aksel Telgmaa, August Undusk, Kalle Velsker ja Lea Lepmann. *Matemaatika 9. klassile. 2. osa*. Koolibri, 2024.

[5] Silvia Pajus ja Tauri Viil. *Matemaatika tööraamat 9. klassile*. Maurus, 2025.

[6] Tõnu Tõnso. *Matemaatika IX klassile*. 2., parandatud trükk. Mathema, 2001.

[7] Jan Willemson. *Võistlusmatemaatika põhivara*. Toimetanud Härmel Nestra. Matemaatikavaramu, 2025.