Neli punkti ühel ringjoonel

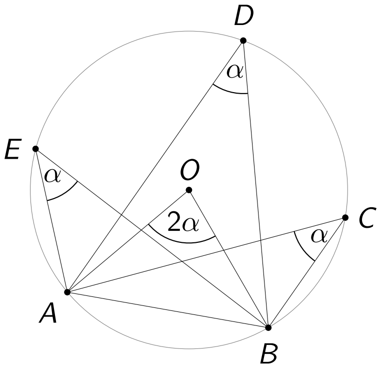
Jan Willemson

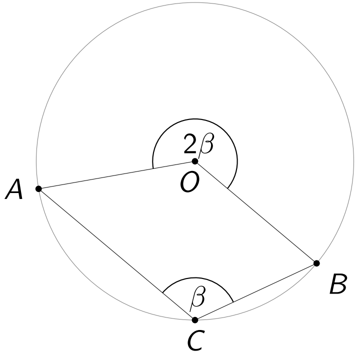
https://varamu.eu

Kesk- ja piirdenurk

Teoreem

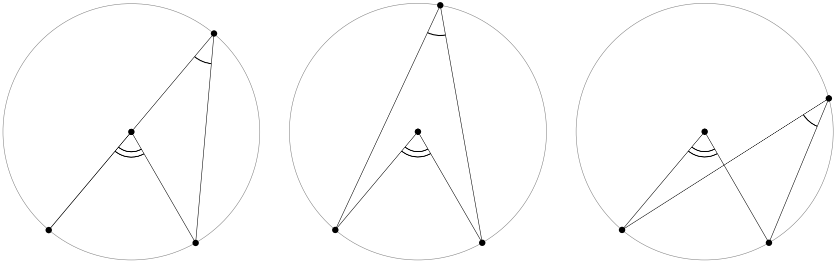
Kesknurk on kaks korda suurem kui samale kaarele toetuv piirdenurk.





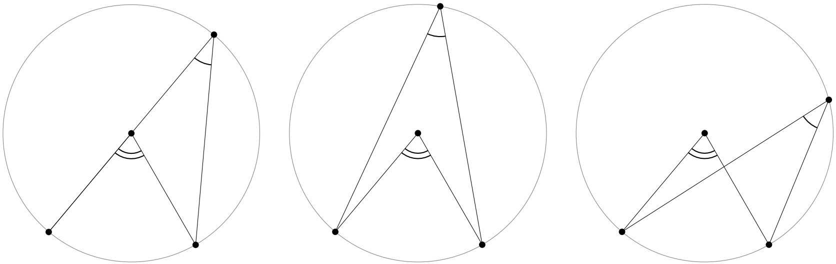
Kesk ja piirdenurga teoreem

- Tõestuseks vaatleme eraldi kolme lihtsat juhtu:



Kesk ja piirdenurga teoreem

- Tõestuseks vaatleme eraldi kolme lihtsat juhtu:



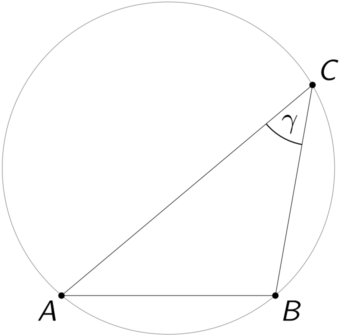
Järeldus

Samale kaarele samalt poolt toetuvad piirdenurgad on võrdsed.

Kesk- ja piirdenurga teoreemi järelduse üldistus

Teoreem

Vaatleme kolmnurka ABC ning punkti D, mis asub sirgest AB samal pool kui punkt C. Kehtivad järgmised väited.

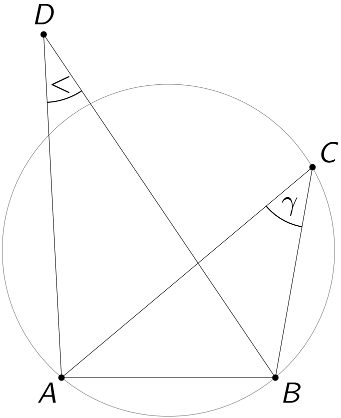


Kesk- ja piirdenurga teoreemi järelduse üldistus

Teoreem

Vaatleme kolmnurka ABC ning punkti D, mis asub sirgest AB samal pool kui punkt C. Kehtivad järgmised väited.

1. Punkt D asub kolmnurga ABC ümberringjoonest väljaspool parajasti siis, kui $\angle ADB < \angle ACB$.

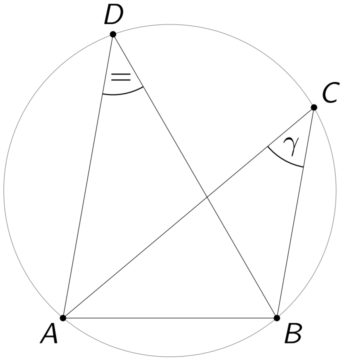


Kesk- ja piirdenurga teoreemi järelduse üldistus

Teoreem

Vaatleme kolmnurka ABC ning punkti D, mis asub sirgest AB samal pool kui punkt C. Kehtivad järgmised väited.

1. Punkt D asub kolmnurga ABC ümberringjoonest väljaspool parajasti siis, kui $\angle ADB < \angle ACB$.
2. Punkt D asub kolmnurga ABC ümberringjoonel parajasti siis, kui $\angle ADB = \angle ACB$.

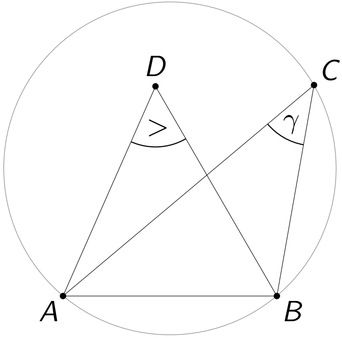


Kesk- ja piirdenurga teoreemi järelduse üldistus

Teoreem

Vaatleme kolmnurka ABC ning punkti D, mis asub sirgest AB samal pool kui punkt C. Kehtivad järgmised väited.

1. Punkt D asub kolmnurga ABC ümberringjoonest väljaspool parajasti siis, kui $\angle ADB < \angle ACB$.
2. Punkt D asub kolmnurga ABC ümberringjoonel parajasti siis, kui $\angle ADB = \angle ACB$.
3. Punkt D asub kolmnurga ABC ümberringjoone sisepiirkonnas parajasti siis, kui $\angle ADB > \angle ACB$.



Kesk- ja piirdenurga teoreemi järelduse üldistuse tõestus

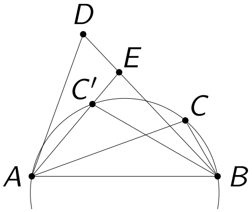
Tarvilikkus ($\Rightarrow$)

1. Asugu D kolmnurga ümberringjoonest väljas. Leiame sellel ringjoonel niisuguse punkti C', mis asub kolmnurga ABD sisepiirkonnas. Siis

$$\angle AC'B = 180^\circ - \angle BC'E = \angle C'EB + \angle EB'C > \angle C'EB\,,$$
$$\angle C'EB = 180^\circ - \angle DEA = \angle ADE + \angle EAD > \angle ADE = \angle ADB\,,$$
$$\angle ACB = \angle AC'B > \angle C'EB > \angle ADB\,.$$

2. Kui D asub kolmnurga ümberringjoonel, siis $\angle ADB = \angle ACB$.
3. Kui D asub kolmnurga sisepiirkonnas, leiame sellel ringjoonel niisuguse punkti C', et D asuks kolmnurga ABC' sisepiirkonnas. Siis saame 1. punktiga analoogiliselt $\angle ACB < \angle ADB$.

Piisavus ($\Leftarrow$) järeldub sellest, et vaadeldud juhud katavad kogu pooltasandi.



Teoreem kõõlnelinurksuse tingimustest

Teoreem

Vaatleme tasandil punkte A, B, C ja D.

1. Kui C ja D jäävad sirgest AB samale poole, asuvad punktid A, B, C ja D ühel ringjoonel parajasti siis, kui $\angle ACB = \angle ADB$.
2. Kui C ja D jäävad sirgest AB erinevale poole, asuvad punktid A, B, C ja D ühel ringjoonel parajasti siis, kui $\angle ACB + \angle ADB = 180^\circ$.

Teoreem kõõlnelinurksuse tingimustest

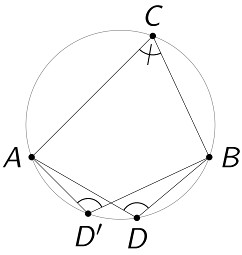
Teoreem

Vaatleme tasandil punkte A, B, C ja D.

1. Kui C ja D jäävad sirgest AB samale poole, asuvad punktid A, B, C ja D ühel ringjoonel parajasti siis, kui $\angle ACB = \angle ADB$.
2. Kui C ja D jäävad sirgest AB erinevale poole, asuvad punktid A, B, C ja D ühel ringjoonel parajasti siis, kui $\angle ACB + \angle ADB = 180°$.

Tõestus.

1. Järeldub äsjatõestatud väitest.
2. $\Rightarrow$: järeldub kesk- ja piirdenurga omadusest.
   $\Leftarrow$: olgu $\angle ACB + \angle ADB = 180°$. Valime punkti D' $\triangle ABC$ ümberringjoone kaarel AB, kus ei ole punkti C. Siis $\angle ACB + \angle AD'B = 180°$. Järelikult $\angle ADB = \angle AD'B$, seega on punktid A, B, C, D, D' ühel ringjoonel.



Ülesandeid

Klassika

Olgu teravnurkse kolmnurga ABC kõrguste lõikepunkt H ning tippudest A, B, C tõmmatud kõrguste aluspunktid vastavalt D, E, F. Tõesta, et punkt H on kolmnurga DEF siseringjoone keskpunkt.

Ülesandeid

Klassika

Olgu teravnurkse kolmnurga ABC kõrguste lõikepunkt H ning tippudest A, B, C tõmmatud kõrguste aluspunktid vastavalt D, E, F. Tõesta, et punkt H on kolmnurga DEF siseringjoone keskpunkt.

Talvine lahtine võistlus 2015, vanem rühm

Teravnurkse kolmnurga ABC ümberringjoone keskpunkt on O. Sirge AC lõikab kolmnurga AOB ümberringjoont lisaks tipule A punktis X. Tõesta, et sirge XO on risti sirgega BC.

Ülesandeid

Klassika

Olgu teravnurkse kolmnurga ABC kõrguste lõikepunkt H ning tippudest A, B, C tõmmatud kõrguste aluspunktid vastavalt D, E, F. Tõesta, et punkt H on kolmnurga DEF siseringjoone keskpunkt.

Talvine lahtine võistlus 2015, vanem rühm

Teravnurkse kolmnurga ABC ümberringjoone keskpunkt on O. Sirge AC lõikab kolmnurga AOB ümberringjoont lisaks tipule A punktis X. Tõesta, et sirge XO on risti sirgega BC.

Piirkonnavoor 2023, 10. klass

Kõõlnelinurga $ABCD$ küljel BC valitakse punkt E. Olgu F selline punkt, et $ACFE$ on rööpkülik. Olgu L sirgete AD ja EF lõikepunkt. Tõesta, et punktid B, D, E ja L asuvad ühel ringjoonel.

Ülesandeid

Kevadine lahtine võistlus 2000, noorem rühm

Tasandil on antud teravnurk AOB tipuga O. Nurga sisepiirkonnas valitakse punktid C ja D nii, et $\angle AOC = \angle DOB$. Punktist D kiirele OA tõmmatud ristlõik lõikab kiirt OC punktis G ning punktist C kiirele OB tõmmatud ristlõik lõikab kiirt OD punktis H. Tõesta, et punktid C, D, G ja H asuvad ühel ringjoonel.

Ülesandeid

Kevadine lahtine võistlus 2000, noorem rühm

Tasandil on antud teravnurk AOB tipuga O. Nurga sisepiirkonnas valitakse punktid C ja D nii, et $\angle AOC = \angle DOB$. Punktist D kiirele OA tõmmatud ristlõik lõikab kiirt OC punktis G ning punktist C kiirele OB tõmmatud ristlõik lõikab kiirt OD punktis H. Tõesta, et punktid C, D, G ja H asuvad ühel ringjoonel.

Talvine lahtine võistlus 2021, vanem rühm, a) osa

Kolmnurgas ABC on $|AB| = |AC|$. Mediaanid AD ja BE lõikuvad punktis G. Olgu P lõigu GE keskpunkt. Tõesta, et kui $|GP| = |GD|$, siis $CEPD$ on kõõlnelinurk.

Ülesandeid

Kevadine lahtine võistlus 2000, noorem rühm

Tasandil on antud teravnurk AOB tipuga O. Nurga sisepiirkonnas valitakse punktid C ja D nii, et $\angle AOC = \angle DOB$. Punktist D kiirele OA tõmmatud ristlõik lõikab kiirt OC punktis G ning punktist C kiirele OB tõmmatud ristlõik lõikab kiirt OD punktis H. Tõesta, et punktid C, D, G ja H asuvad ühel ringjoonel.

Talvine lahtine võistlus 2021, vanem rühm, a) osa

Kolmnurgas ABC on $|AB| = |AC|$. Mediaanid AD ja BE lõikuvad punktis G. Olgu P lõigu GE keskpunkt. Tõesta, et kui $|GP| = |GD|$, siis $CEPD$ on kõõlnelinurk.

Lõppvoor 2021, 12. klass

Punkt D teravnurkse kolmnurga ABC sees rahuldab tingimust $\angle ADC = \angle BDA = 180^\circ - \angle CAB$. Tõesta, et punkti A peegeldus punktist D asub kolmnurga ABC ümberringjoonel.