Languse printsiip

Jan Willemson

https://varamu.eu

Languse printsiip (esimene variant)

Languse printsiip (esimene variant)

Igas mittetühjas naturaalarvude hulga alamhulgas on olemas vähim element.

Languse printsiip (esimene variant)

Languse printsiip (esimene variant)

Igas mittetühjas naturaalarvude hulga alamhulgas on olemas vähim element.

- Alamhulk võib olla ka lõpmatu!
- Täis- ja ratsionaalarvude puhul see väide ei kehti, vaatleme nt hulki $\{0, -1, -2, \ldots\} \subset \mathbb{Z}$ ja $\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\} \subset \mathbb{Q}$.
- Kuidas languse printsiipi tõestada?

Languse printsiip (esimene variant)

Languse printsiip (esimene variant)

Igas mittetühjas naturaalarvude hulga alamhulgas on olemas vähim element.

- Alamhulk võib olla ka lõpmatu!
- Täis- ja ratsionaalarvude puhul see väide ei kehti, vaatleme nt hulki $\{0, -1, -2, \ldots\} \subset \mathbb{Z}$ ja $\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\} \subset \mathbb{Q}$.
- Kuidas languse printsiipi tõestada?
- Induktsiooniga! Selleks tuleb väide sõnastada induktiivselt parameetriga n.

Languse printsiip (induktiivne variant)

Kui mingis naturaalarvude hulga alamhulgas leidub naturaalarv n, siis leidub selles hulgas ka vähim element.

Ülesandeid

Piirkonnavoor 2009, 12. klass

Koordinaattasandi igasse täisarvuliste koordinaatidega punkti kirjutatakse üks arv, kusjuures need arvud ei ole kõik võrdsed ning igaüks neist arvudest on oma nelja lähima naaberpunkti arvude aritmeetiline keskmine. Kas on võimalik, et

a) kõik kirjutatud arvud on täisarvud;

b) kõik kirjutatud arvud on naturaalarvud?

Languse printsiip (teine variant)

Languse printsiip (teine variant)

Pole olemas lõpmatut rangelt kahanevat naturaalarvude jada.

Languse printsiip (teine variant)

Languse printsiip (teine variant)

Pole olemas lõpmatut rangelt kahanevat naturaalarvude jada.

- Oletame vastuväiteliselt, et leidub lõpmatu naturaalarvude jada $a_1, a_2, a_3, \ldots$ nii, et
$$a_1 > a_2 > a_3 > \ldots .$$

Languse printsiip (teine variant)

Languse printsiip (teine variant)

Pole olemas lõpmatut rangelt kahanevat naturaalarvude jada.

- Oletame vastuväiteliselt, et leidub lõpmatu naturaalarvude jada $a_1, a_2, a_3, \ldots$ nii, et

$$a_1 > a_2 > a_3 > \ldots .$$

- Vaatleme hulka $A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$ ja näitame, et selles ei leidu vähimat elementi.

Languse printsiip (teine variant)

Languse printsiip (teine variant)

Pole olemas lõpmatut rangelt kahanevat naturaalarvude jada.

- Oletame vastuväiteliselt, et leidub lõpmatu naturaalarvude jada $a_1, a_2, a_3, \ldots$ nii, et
$$a_1 > a_2 > a_3 > \ldots .$$
- Vaatleme hulka $A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$ ja näitame, et selles ei leidu vähimat elementi.
- Ükski $a_k \in A$ ei saa olla vähim, sest leidub $a_{k+1} < a_k$. See aga on vastuolus languse printsiibi esimese variandiga.

Languse printsiip (teine variant)

Languse printsiip (teine variant)

Pole olemas lõpmatut rangelt kahanevat naturaalarvude jada.

- Oletame vastuväiteliselt, et leidub lõpmatu naturaalarvude jada $a_1, a_2, a_3, \ldots$ nii, et
$$a_1 > a_2 > a_3 > \ldots .$$
- Vaatleme hulka $A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$ ja näitame, et selles ei leidu vähimat elementi.
- Ükski $a_k \in A$ ei saa olla vähim, sest leidub $a_{k+1} < a_k$. See aga on vastuolus languse printsiibi esimese variandiga.
- Saab näidata, et languse printsiibi mõlemad variandid on tegelikult samaväärsed induktsiooniprintsiibiga.

Ülesandeid

Talvine lahtine võistlus 2016, noorem rühm

Elektriskeemis on lõplik arv lampe. Mõned lampide paarid on juhet pidi otseühenduses. Iga lamp põleb kas punaselt või siniselt. Ühe lülitusega muudavad korraga värvi (punasest siniseks või vastupidi) kõik need lambid, mis on otseühenduses mõne teist värvi lambiga. Tõesta, et mingi arvu lülituste järel on kõigi lampide värvid samad, mis kaks lülitust enne seda.

Ülesandeid

Talvine lahtine võistlus 2016, noorem rühm

Elektriskeemis on lõplik arv lampe. Mõned lampide paarid on juhet pidi otseühenduses. Iga lamp põleb kas punaselt või siniselt. Ühe lülitusega muudavad korraga värvi (punasest siniseks või vastupidi) kõik need lambid, mis on otseühenduses mõne teist värvi lambiga. Tõesta, et mingi arvu lülituste järel on kõigi lampide värvid samad, mis kaks lülitust enne seda.

Sügisene lahtine võistlus 2021, vanem rühm

Leia kõik täisarvud a, mille korral a^2 ei sisalda muid numbreid peale 0 ja 2.

Ülesandeid

Lõppvoor 1998, 10. klass

Paberile on märgitud lõplik arv siniseid ja punaseid punkte ning mõned neist punktidest on omavahel ühendatud joontega. Nimetame punkti P eriliseks, kui rohkem kui pooled punktiga P ühendatud punktidest on teist värvi kui punkt P. Juku valib ühe erilise punkti ja muudab selle värvi vastupidiseks. Seejärel valib Juku uue erilise punkti ja muudab selle värvi, jne. Tõesta, et lõpliku arvu ümbervärvimiste järel jõuab Juku olukorrani, kus paberil pole ühtegi erilist punkti.

Ülesandeid

Lõppvoor 1998, 10. klass

Paberile on märgitud lõplik arv siniseid ja punaseid punkte ning mõned neist punktidest on omavahel ühendatud joontega. Nimetame punkti P eriliseks, kui rohkem kui pooled punktiga P ühendatud punktidest on teist värvi kui punkt P. Juku valib ühe erilise punkti ja muudab selle värvi vastupidiseks. Seejärel valib Juku uue erilise punkti ja muudab selle värvi, jne. Tõesta, et lõpliku arvu ümbervärvimiste järel jõuab Juku olukorrani, kus paberil pole ühtegi erilist punkti.

Sügisene lahtine võistlus 2017, vanem rühm

Kas koordinaattasandil leidub võrdkülgne kolmnurk, mille iga tipu mõlemad koordinaadid on täisarvud?

Ülesandeid

Piirkonnavoor 2012, 12. klass

Seina peal on üksteise kõrval reas teatav arv nuppe. Alati, kui mõni nupp alla vajutada, jääb see nupp alla ning kõik temast paremal asuvad nupud liiguvad üles. Pipi ja Kange Adolf vajutavad kordamööda nuppe, mis pole parajasti all. Alustab Pipi ja see, kes ei saa enam käiku teha, kaotab. Alguses on kõik nupud üleval. Kas kellelgi nendest mängijatest leidub võitev strateegia ja kui leidub, siis kellel?

Ülesandeid

Piirkonnavoor 2012, 12. klass

Seina peal on üksteise kõrval reas teatav arv nuppe. Alati, kui mõni nupp alla vajutada, jääb see nupp alla ning kõik temast paremal asuvad nupud liiguvad üles. Pipi ja Kange Adolf vajutavad kordamööda nuppe, mis pole parajasti all. Alustab Pipi ja see, kes ei saa enam käiku teha, kaotab. Alguses on kõik nupud üleval. Kas kellelgi nendest mängijatest leidub võitev strateegia ja kui leidub, siis kellel?

Sügisene lahtine võistlus 2020, vanem rühm

Olgu n fikseeritud positiivne täisarv. Leia kõik täisarvude kolmikud (a, b, c), mis rahuldavad võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} a^{n+3} + b^{n+2}c + c^{n+1}a^2 + a^n b^3 = 0, \\ b^{n+3} + c^{n+2}a + a^{n+1}b^2 + b^n c^3 = 0, \\ c^{n+3} + a^{n+2}b + b^{n+1}c^2 + c^n a^3 = 0. \end{cases}$$