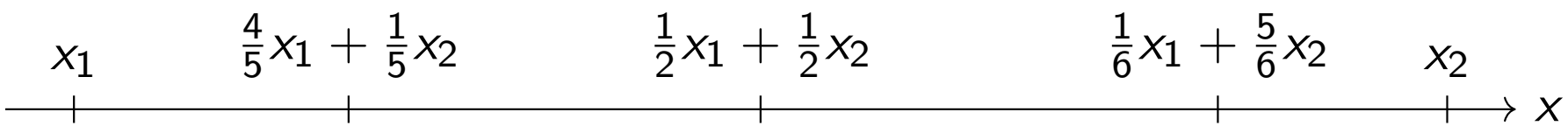
Jenseni võrratus

Jan Willemson

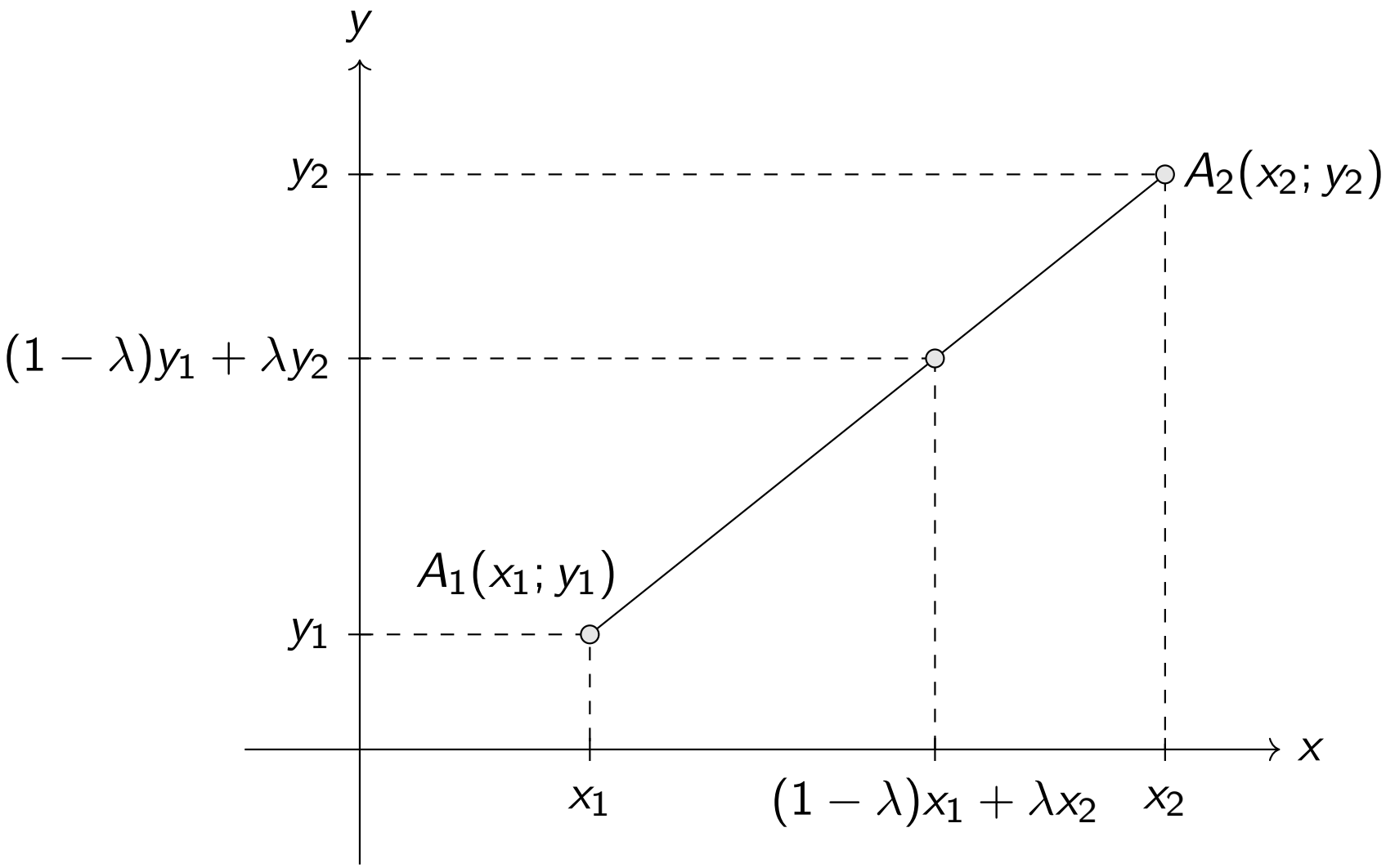
https://varamu.eu

Kuidas kirjeldada lõiku $[x_1; x_2]$?



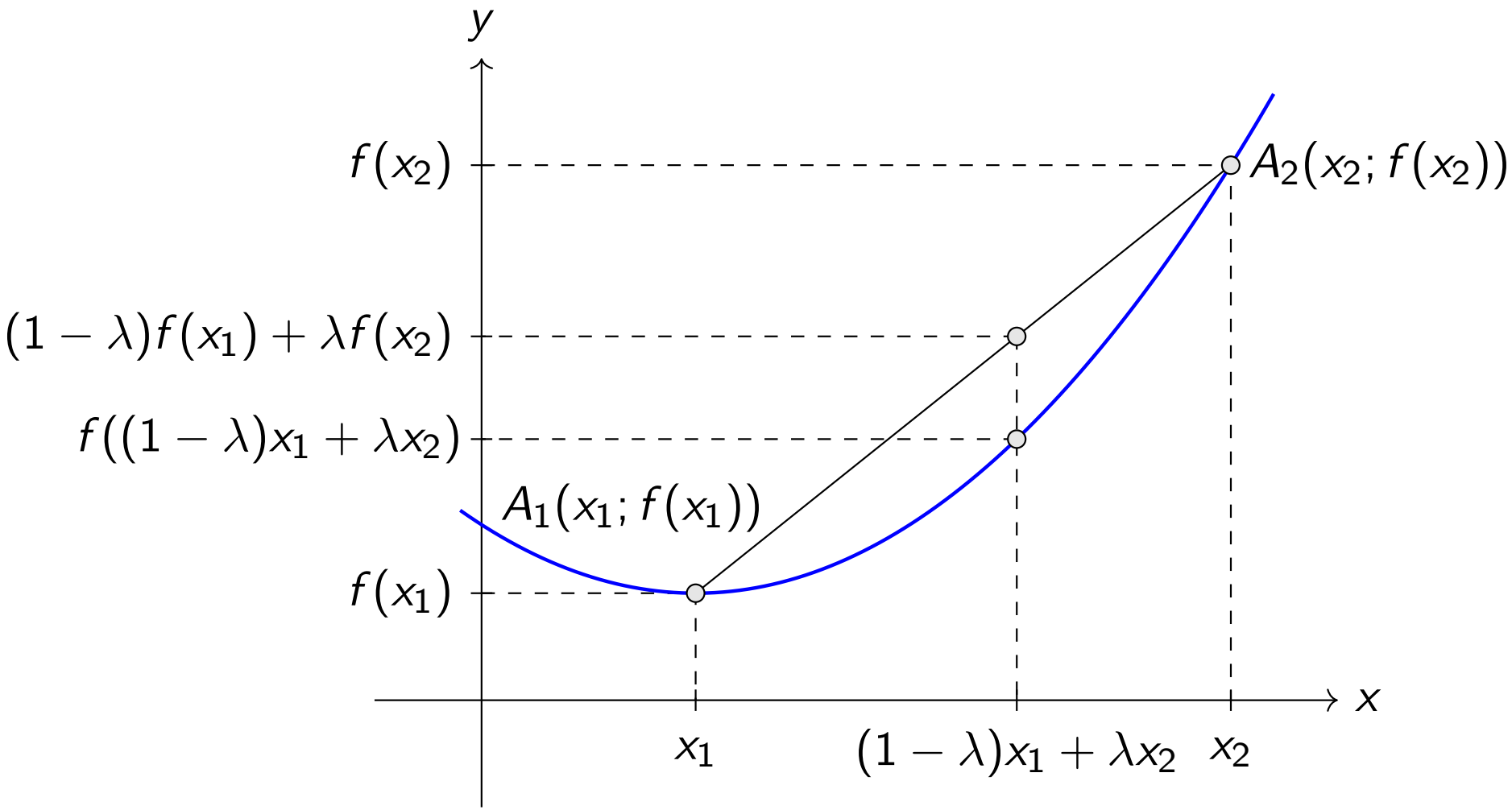
- Kui parameeter λ „libiseb“ ühtlase kiirusega mööda lõiku $[0; 1]$, „libiseb“ arv $(1 - \lambda)x_1 + \lambda x_2$ ühtlase kiirusega mööda lõiku $[x_1; x_2]$.

Kuidas kirjeldada lõiku A_1A_2?



- Punkt koordinaatidega $((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2; (1-\lambda)y_1 + \lambda y_2)$ „libiseb“ mööda lõiku A_1A_2.

Kõõl funktsiooni graaikul



Kumerad ja nõgusad funktsioonid

Kumer/nõgus funktsioon

Ütleme, et funktsioon on *kumer* lõigul $[a; b]$, kui mistahes reaalarvude $x_1, x_2 \in [a; b]$ ja $\lambda \in [0; 1]$ korral kehtib võrratus

$$(1-\lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2) \geqslant f((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2)\,.$$

Kui samadel eeldustel kehtib alati vastupidine võrratus, nimetame seda funktsiooni *nõgusaks* lõigul $[a; b]$.

Kumerad ja nõgusad funktsioonid

Kumer/nõgus funktsioon

Ütleme, et funktsioon on *kumer* lõigul $[a; b]$, kui mistahes reaalarvude $x_1, x_2 \in [a; b]$ ja $\lambda \in [0; 1]$ korral kehtib võrratus

$$(1-\lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2) \geqslant f((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2)\,.$$

Kui samadel eeldustel kehtib alati vastupidine võrratus, nimetame seda funktsiooni *nõgusaks* lõigul $[a; b]$.

- Paneme tähele, et „kausja“ graafikuga funktsiooni nimetame kumeraks ja „kübarja“ graafikuga funktsiooni nõgusaks.
- Teisisõnu – kumera funktsiooni graafik on nõgus ja nõgusa funktsiooni graafik on kumer.

Jenseni võrratus

- Olgu meil kaks arvu $\lambda_1, \lambda_2 \in [0; 1]$ nii, et $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$. Funktsiooni f kumerus lõigul $[a; b]$ tähendab siis, et iga $x_1, x_2 \in [a; b]$ korral kehtib võrratus
$$\lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) \geqslant f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)\,.$$
- Jenseni võrratus väidab, et samasugune seos kehtib ka rohkemate liidetavate korral.

Jenseni võrratus

Olgu f lõigul $[a; b]$ kumer funktsioon, $n \geqslant 2$ ja $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in [0; 1]$ sellised reaalarvud, et $\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n = 1$. Kehtib võrratus

$$\lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \ldots + \lambda_n f(x_n) \geqslant f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n)\,.$$

Kui f on lõigul $[a; b]$ nõgus, kehtib vastupidine võrratus.

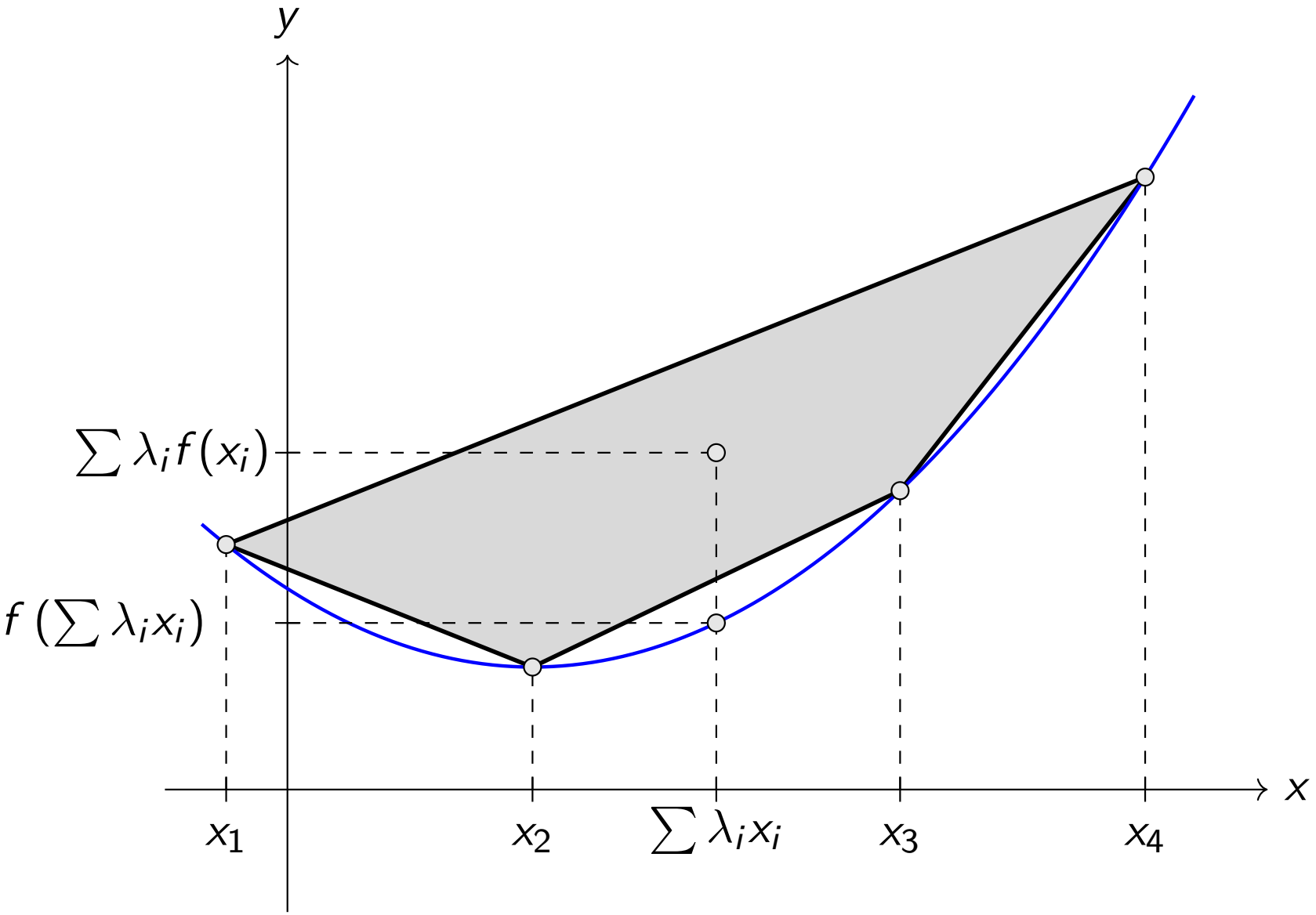
Jenseni võrratuse füüsikaline tõestus

- Vaatleme funktsiooni f graafikul punkte $A_1(x_1; f(x_1)), A_2(x_2; f(x_2)), \ldots, A_n(x_n; f(x_n))$ ning olgu nad järjestatud x-koordinaadi kasvamise järjekorras (võrratus sellest ei sõltu). Hulknurk $A_1A_2\ldots A_n$ on tänu funktsiooni kumerusele (või nõgususele!) kumer.
- Rakendame igasse punkti A_i massi λ_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ ning vaatleme saadavatest punktmassidest koosnevat süsteemi.
- Selle süsteemi massikese asub punktis koordinaatidega

$$(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n; \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \ldots + \lambda_n f(x_n)).$$

- Teisest küljest asub see massikese tänu tingimusele $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in [0; 1]$ hulknurga $A_1A_2\ldots A_n$ sisepiirkonnas või rajajoonel.
- Igal juhul ei ole ta y-telje suunas madalamal (või nõgusal juhul kõrgemal) kui funktsiooni väärtus samal kohal $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n$.

Jenseni võrratuse füüsikaline tõestus



Jenseni võrratuse võrdusejuhust

- Jenseni võrratuses võrduse kehtimiseks on kolm (üksteist mittevälistavat) võimalust.
  - Funktsiooni graafik on vaadeldavas piirkonnas sirglõik. See tähendab muuhulgas, et kõik punktid $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ja hulknurga $A_1A_2 \ldots A_n$ massikese asuvad sellel sirgel.
  - Üks kordaja on $\lambda_i = 1$ ja kõik ülejäänud kordajad on nullid. See tähendab, et kogu punktisüsteemi mass on koondatud tippu A_i, mis on siis ühtlasi ka süsteemi massikeskmeks.
  - Kehtib $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$, st hulknurk $A_1A_2 \ldots A_n$ kidub üheks punktiks, mis asub funktsiooni f graafikul.

Jenseni võrratuse rakendusi algebras

Võrratus 1

Vaatleme kogu reaalteljel kumerat funktsiooni $f(x) = x^2$ ja valime kordajad $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = \frac{1}{n}$. Millise võrratuse saame?

Jenseni võrratuse rakendusi algebras

Võrratus 1

Vaatleme kogu reaalteljel kumerat funktsiooni $f(x) = x^2$ ja valime kordajad $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = \frac{1}{n}$. Millise võrratuse saame?

Võrratus 2

Vaatleme piirkonnas $(0; \infty)$ nõgusat funktsiooni $f(x) = \ln x$ ja valime kordajad $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = \frac{1}{n}$. Millise võrratuse saame?

Jenseni võrratuse rakendusi algebras

Võrratus 1

Vaatleme kogu reaalteljel kumerat funktsiooni $f(x) = x^2$ ja valime kordajad $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = \frac{1}{n}$. Millise võrratuse saame?

Võrratus 2

Vaatleme piirkonnas $(0; \infty)$ nõgusat funktsiooni $f(x) = \ln x$ ja valime kordajad $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = \frac{1}{n}$. Millise võrratuse saame?

Võrratus 3

Vaatleme piirkonnas $(0; \infty)$ kumerat funktsiooni $f(x) = \frac{1}{x}$ ja valime kordajad $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = \frac{1}{n}$. Millise võrratuse saame?

Jenseni võrratuse rakendusi geomeetrias

Võrratus 4

Olgu antud täisarv $n \geqslant 3$ ja ringjoon raadiusega r. Kõigi niisuguste n-nurkade seas, millele see ringjoon on siseringjooneks, on kõige väiksema pindalaga korrapärane n-nurk.

Jenseni võrratuse rakendusi geomeetrias

Võrratus 4

Olgu antud täisarv $n \geqslant 3$ ja ringjoon raadiusega r. Kõigi niisuguste n-nurkade seas, millele see ringjoon on siseringjooneks, on kõige väiksema pindalaga korrapärane n-nurk.

Võrratus 5

Olgu antud täisarv $n \geqslant 3$ ja ringjoon raadiusega r. Kõigi sellesse ringjoonde joonestatud kõõl-n-nurkade seas on kõige suurema ümbermõõduga korrapärane n-nurk.

Ülesandeid

Piirkonnavoor 2012, 12. klass

Kumb on suurem, kas $\ln 2011 + \ln 2013$ või $2 \ln 2012$?

Ülesandeid

Piirkonnavoor 2012, 12. klass

Kumb on suurem, kas $\ln 2011 + \ln 2013$ või $2 \ln 2012$?

Piirkonnavoor 2015, 11. klass

Tõesta, et $\sin 20^\circ > \frac{1}{3}$.

Ülesandeid

Piirkonnavoor 2012, 12. klass

Kumb on suurem, kas $\ln 2011 + \ln 2013$ või $2 \ln 2012$?

Piirkonnavoor 2015, 11. klass

Tõesta, et $\sin 20^\circ > \frac{1}{3}$.

Lõppvoor 2014, 12. klass

Olgu I kolmnurga ABC siseringjoone keskpunkt. Olgu R_A, R_B ja R_C vastavalt kolmnurkade BIC, CIA ja AIB ümberringjoonte raadiused ning R kolmnurga ABC ümberringjoone raadius. Tõesta, et

$$R_A + R_B + R_C \leqslant 3R\,.$$