Uurime jääke!

Jan Willemson

https://varamu.eu

Jääkide uurimise võte

Piirkonnavoor 2002, 9. klass, b)-osa

Kas leidub naturaalarve, mille ruut avaldub nelja järjestikuse naturaalarvu summana?

Jääkide uurimise võte

Piirkonnavoor 2002, 9. klass, b)-osa

Kas leidub naturaalarve, mille ruut avaldub nelja järjestikuse naturaalarvu summana?

- Ei leidu. Vastuolu saamiseks paneme tähele, et täisarvude ruudud annavad 4-ga jagamisel ainult jäägi 0 või 1, aga

$$n + (n + 1) + (n + 2) + (n + 3) = 4n + 6 \equiv 2 \bmod 4\,.$$

Jääk

Definitsioon

Olgu antud täisarv $n \geqslant 2$ ja suvaline täisarv a. Arvu a *jäägiks* mooduli n järgi (või *modulo* n) nimetame niisugust täisarvu r $(0 \leqslant r \leqslant n-1)$, et

$$a = d \cdot n + r$$

mingi täisarvu d korral.

Kongruentsus e. jäägivõrdsus

Definitsioon

Olgu antud täisarv $n \geqslant 2$. Ütleme, et täisarvud a ja b on *jäägivõrdsed* ehk *kongruentsed* mooduli n järgi, kui a ja b annavad n-iga jagamisel sama jäägi ehk $a - b \,\vdots\, n$. Sel juhul kirjutame

$$a \equiv b \mod n\,.$$

Kongruentsus e. jäägivõrdsus

Definitsioon

Olgu antud täisarv $n \geqslant 2$. Ütleme, et täisarvud a ja b on *jäägivõrdsed* ehk *kongruentsed* mooduli n järgi, kui a ja b annavad n-iga jagamisel sama jäägi ehk $a - b \,\vdots\, n$. Sel juhul kirjutame

$$a \equiv b \bmod n\,.$$

- Mooduli 4 järgi on neljaks omavahel kongruentsete täisarvude klassiks

$$\{\ldots, -8, -4, 0, 4, 8, \ldots\}\,,$$
$$\{\ldots, -7, -3, 1, 5, 9, \ldots\}\,,$$
$$\{\ldots, -6, -2, 2, 6, 10, \ldots\}\,,$$
$$\{\ldots, -5, -1, 3, 7, 11, \ldots\}\,.$$

Jääkide aritmeetika

Teoreem

Olgu antud täisarv $n \geqslant 2$ ning kaks täisarvu a ja b. Olgu r ja s vastavalt nende täisarvude jäägid, mis tekivad jagamisel mooduliga n. Siis kehtivad kongruentsid

$$a + b \equiv r + s \mod n\,,$$
$$a - b \equiv r - s \mod n\,,$$
$$a \cdot b \equiv r \cdot s \mod n\,.$$

Kui m on positiivne täisarv, kehtib lisaks ka kongruents

$$a^m \equiv r^m \mod n\,.$$

Jääkide uurimise põhiprintsiip

Jääkide uurimise põhiprintsiip

Olgu antud täisarvuliste muutujatega avaldis, mis kasutab tehetena liitmist, lahutamist, korrutamist ja positiivsete täisarvuliste konstantidega astendamist. Kui on tarvis leida, milliseid jääke saab see avaldis anda jagamisel täisarvuga $n \geqslant 2$, siis piisab, kui leida selle avaldise jäägid n suhtes, andes muutujatele kõikvõimalikud väärtused hulgast $\{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$.

Ülesandeid

Lõppvoor 2005, 9. klass

Olgu a, b ja c suvalised täisarvud. Tõesta, et $a^2 + b^2 + c^2$ jagub 7-ga parajasti siis, kui $a^4 + b^4 + c^4$ jagub 7-ga.

Ülesandeid

Lõppvoor 2005, 9. klass

Olgu a, b ja c suvalised täisarvud. Tõesta, et $a^2 + b^2 + c^2$ jagub 7-ga parajasti siis, kui $a^4 + b^4 + c^4$ jagub 7-ga.

Piirkonnavoor 2010, 9. klass

Leia kõik jäägid, mille saab anda 4-ga mittejaguva paarisarvu ruut jagamisel 32-ga.

Ülesandeid

Lõppvoor 2005, 9. klass

Olgu a, b ja c suvalised täisarvud. Tõesta, et $a^2 + b^2 + c^2$ jagub 7-ga parajasti siis, kui $a^4 + b^4 + c^4$ jagub 7-ga.

Piirkonnavoor 2010, 9. klass

Leia kõik jäägid, mille saab anda 4-ga mittejaguva paarisarvu ruut jagamisel 32-ga.

Piirkonnavoor 2018, 11. klass

Keraamik valmistab risttahukakujulise tellise, mille servapikkused on täisarvud a, b ja c, kusjuures $\text{SÜT}(a, b) = \text{SÜT}(b, c) = \text{SÜT}(c, a) = 1$. Kas selle tellise vastastippe ühendava diagonaali pikkus saab olla täisarv?

Ülesandeid

Piirkonnavoor 1998, 12. klass

Leia kõik võimalikud jäägid, mis võivad tekkida algarvu $p > 3$ ruudu p^2 jagamisel arvuga 12.

Ülesandeid

Piirkonnavoor 1998, 12. klass

Leia kõik võimalikud jäägid, mis võivad tekkida algarvu $p > 3$ ruudu p^2 jagamisel arvuga 12.

Piirkonnavoor 2008, 12. klass

Olgu a ja b täisarvud. Tõesta, et kui $ab + 1$ jagub 8-ga, siis ka $a + b$ jagub 8-ga.