Invariandid

Jan Willemson

https://varamu.eu

Invariandi mõiste

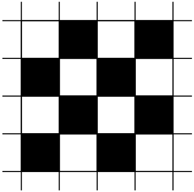
Definitsioon

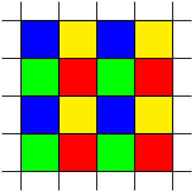
Protsessi *invariandiks* nimetatakse suurust, mis selle protsessi käigus ei muutu.

- Invariandid on väga kasulikud, kui on vaja tõestada, et mingite omadustega seisu pole protsessi käigus võimalik saavutada:
    - leiame invariandi väärtuse algseisus,
    - tõestame, et invariant lubatud teisendustega ei muutu,
    - näitame, et soovitavas lõppseisus oleks invariandi väärtus midagi muud kui alguses.

Sagedased invariandid

- Sageli on invariandid seotud paarsusega (ja üldisemalt jääkidega sobiva mooduli järgi).
- Tihti on invariant seotud ka mängulaua või muu objekti värvimisega.





Ülesandeid

Piirkonnavoor 1993, 9.-12. klass

Reas paikneb n väliselt erinevat nuppu. On lubatud vahetada omavahel mistahes kaks sellist nuppu, mille vahel asub täpselt üks nupp. Milliste n väärtuste korral on võimalik muuta nuppude järjestus esialgsega võrreldes vastupidiseks?

Ülesandeid

Piirkonnavoor 1993, 9.-12. klass

Reas paikneb n väliselt erinevat nuppu. On lubatud vahetada omavahel mistahes kaks sellist nuppu, mille vahel asub täpselt üks nupp. Milliste n väärtuste korral on võimalik muuta nuppude järjestus esialgsega võrreldes vastupidiseks?

Piirkonnavoor 2017, 9. klass

Ruudustikul mõõtmetega 8×8 on osa ruute värvitud valgeks ja ülejäänud mustaks. Ühel sammul tohib suvalises ruudustiku joontega piirnevas ristkülikus mõõtmetega 2×3 või 3×2 muuta korraga kõik mustad ruudud valgeks ja valged ruudud mustaks. Kas ruudustiku ruutude iga algse värvimise korral on selliste sammudega võimalik jõuda seisu, kus kõik ruudud on mustad?

Ülesandeid

Piirkonnavoor 2003, 11. klass

Korrapärase n-nurga ühe tipu juurde on kirjutatud arv 1 ja ülejäänud $n-1$ tipu juurde arvud 0. Igal sammul võime valida ühe tipu ning muuta ära selle mõlema naabertipu juures olevad arvud (0 asemele 1 või vastupidi). Kas selliste sammudega on võimalik saavutada olukord, kus n-nurga kõigi tippude juures on arvud 1, kui:

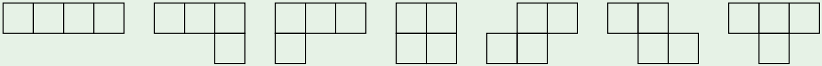
a) $n = 2002$;

b) $n = 2003$?

Ülesandeid

Piirkonnavoor 2011, 12. klass

Jukul on ruudulisest paberist välja lõigatud kõik erinevad *tetrominokujundid*, st kujundid, mis koosnevad neljast omavahel külgipidi ühendatud ühikruudust (vt joonist).



Kas Juku saab oma kujunditest moodustada ristküliku, nii et iga kujundit on kasutatud täpselt üks kord? Kujundeid võib selleks tasandil pöörata, kuid mitte üles tõsta ja teistpidi keerata.

Ülesandeid

Piirkonnavoor 2014, 11. klass

Laual on kolm kivihunnikut, mille kivide arvud on 2012, 2013 ja 2014. Ühel sammul tohib võtta mingist hunnikust 2 kivi ja panna need ülejäänud kahte hunnikusse, kummassegi ühe, või võtta mingist kahest hunnikust kummastki 1 kivi ning panna need mõlemad kolmandasse. Kas on võimalik, et peale lõplikku arvu samme on

a) kõigis hunnikutes võrdselt 2013 kivi?

b) kõik kivid ühes hunnikus?

Ülesandeid

Piirkonnavoor 2014, 11. klass

Laual on kolm kivihunnikut, mille kivide arvud on 2012, 2013 ja 2014. Ühel sammul tohib võtta mingist hunnikust 2 kivi ja panna need ülejäänud kahte hunnikusse, kummassegi ühe, või võtta mingist kahest hunnikust kummastki 1 kivi ning panna need mõlemad kolmandasse. Kas on võimalik, et peale lõplikku arvu samme on

a) kõigis hunnikutes võrdselt 2013 kivi?

b) kõik kivid ühes hunnikus?

Piirkonnavoor 2019, 10. klass

Ruudustikus mõõtmetega 8×8, mille kõik ühikruudud on alguses valged, on ühel käigul lubatud valida suvaline ruudustiku joontega piirnev ala mõõtmetega 3×3 ja muuta selles kõik valged ühikruudud mustaks ja mustad ühikruudud valgeks. Kas nende sammudega on võimalik jõuda seisu, kus ruudustiku kõik ühikruudud on mustad?

Ülesandeid

Talvine lahtine võistlus 2008, noorem rühm

Aed mõõtmetega $n \times n$ meetrit (kus n on positiivne täisarv) jaguneb ühe ruutmeetri suurusteks ruudukujulisteks platsideks. Aed on piiratud taraga, milles on sissepääs ja väljapääs, mis kumbki hõlmab parajasti ühe platsi külje. Aednik istutab aia sees platside piiriks olevatest meetristest lõikudest teatud arvu hekki täis nii, et moodustub labürint, kus on täpselt üks tee aia sissepääsust väljapääsuni ning see tee läbib aia kõik platsid. Mitu meetrit hekki istutab aednik aia sisse?

Ülesandeid

Kevadine lahtine võistlus 1999, vanem rühm

Lõpmatu ruudustiku mingil n ruudul asub igaühel üks mängunupp. Kui mõnel nuppu A sisaldava ruudu neljast naaberruudust asub nupp B ja selle taga olev ruut on tühi, võime nupu A tõsta üle nupu B sellele tühjale ruudule. Kas leidub selline nuppude paigutus, millest lähtudes võime mingi lõpliku arvu niisuguste käikude järel jõuda seisuni, kus nuppudest moodustuv kujund on samasugune kui algseisus, kuid nihkunud ühe ruudu võrra suvalises etteantud suunas, kui

a) $n = 1999$;

b) $n = 2000$;

c) $n = 1998$?

Ülesandeid

Talvine lahtine võistlus 2011, vanem rühm

Olgu k positiivne täisarv. Milline on suurim arv neljast ruudust koosnevaid jõnkse (vt joonist), mida saab korraga paigutada $(2k+1) \times (2k+1)$ ruudustikule nii, et jõnksud üksteist ei kata ega ulatu üle ruudustiku ääre? Jõnkse võib pöörata ja ka peegeldada (ümber pöörata).