

# Geomeetrilised võrratused

<https://varamu.eu>

18.03.2024

# Kolmnurgavõrratus

## Teoreem

Kolmnurgas  $ABC$  kehtib võrratus

$$|AB| + |AC| > |BC| .$$

# Kolmnurgavõrratus

## Teoreem

Kolmnurgas  $ABC$  kehtib võrratus

$$|AB| + |AC| > |BC| .$$

- Muidugi kehtivad ka võrratused  $|AC| + |BC| > |AB|$  ja  $|AB| + |BC| > |AC|$ .
- Tasandi kolme suvalise punkti  $A, B$  ja  $C$  jaoks kehtib

$$|AB| + |BC| \geq |AC| .$$

Võrdus  $|AB| + |AC| = |BC|$  kehtib parajasti siis, kui punkt  $A$  asub lõigul  $BC$ .

## Lõppvoor 2018, 11. klass

Olgu  $p$  kolmnurga  $ABC$  poolümbermõõt. Tõesta, et tasandi suvalise punkti  $Q$  korral kehtib võrratus

$$|AQ| + |BQ| + |CQ| > p.$$

## Lõppvoor 2018, 11. klass

Olgu  $p$  kolmnurga  $ABC$  poolümbermõõt. Tõesta, et tasandi suvalise punkti  $Q$  korral kehtib võrratus

$$|AQ| + |BQ| + |CQ| > p.$$

## Sügisene lahtine võistlus 2016, vanem rühm.

Kolmnurga  $ABC$  külgedel  $BC$ ,  $CA$  ja  $AB$  võetakse vastavalt punktid  $D$ ,  $E$  ja  $F$ . Tõesta, et

$$\frac{1}{2}(|BC| + |CA| + |AB|) < |AD| + |BE| + |CF| < \frac{3}{2}(|BC| + |CA| + |AB|).$$

# Ülesandeid

## Talvine lahtine võistlus 2013, vanem rühm

Olgu  $a$ ,  $b$  ja  $c$  mingi kolmnurga külgede pikkused. Tõesta, et

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} < 2.$$

# Ülesandeid

## Talvine lahtine võistlus 2013, vanem rühm

Olgu  $a$ ,  $b$  ja  $c$  mingi kolmnurga külgede pikkused. Tõesta, et

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} < 2.$$

## Piirkonnavoor 2007, 12. klass

Tõesta, et suvalises kolmnurgas  $ABC$  kehtib võrratus

$$|AB|^2 + |BC|^2 > \frac{1}{3}(|AB|^2 + |BC|^2 + |CA|^2).$$

# Ülesandeid

## Talvine lahtine võistlus 2013, vanem rühm

Olgu  $a$ ,  $b$  ja  $c$  mingi kolmnurga külgede pikkused. Tõesta, et

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} < 2.$$

## Piirkonnavoor 2007, 12. klass

Tõesta, et suvalises kolmnurgas  $ABC$  kehtib võrratus

$$|AB|^2 + |BC|^2 > \frac{1}{3}(|AB|^2 + |BC|^2 + |CA|^2).$$

## Piirkonnavoor 2016, 12. klass

Nelinurga  $ABCD$  tipud paiknevad ühel ringjoonel raadiusega 1. Leia selle nelinurga suurim võimalik pindala.



## Lõppvoor 2015, 11. klass

Kolmnurga pindala  $S$  ja ümberringjoone raadius  $r$  rahuldavad tingimust  $S \geq r^2$ . Tõesta, et selle kolmnurga kõik nurgad on suuremad kui  $30^\circ$ , kuid ükski nurk pole suurem kui  $90^\circ$ .

## Lõppvoor 2015, 11. klass

Kolmnurga pindala  $S$  ja ümberringjoone raadius  $r$  rahuldavad tingimust  $S \geq r^2$ . Tõesta, et selle kolmnurga kõik nurgad on suuremad kui  $30^\circ$ , kuid ükski nurk pole suurem kui  $90^\circ$ .

## Lõppvoor 2010, 11. klass

Kuullaager koosneb kahest üksteise sees paiknevast ühise teljega silindrist, mille vahel asub  $n$  ühesuurust kuuli. Kõigi kuulide keskpunktid on ühel silindrite teljega ristuv tasandil ning iga kuul puutub mõlemat silindrit ja kahte oma naaberkuuli. Olgu  $r$  kuulide raadius ning  $R$  välimise silindri raadius. Tõesta, et

$$\frac{r}{R} < \frac{\pi}{n + \pi}.$$

# Ülesandeid

## Kevadine lahtine võistlus 1999, vanem rühm

On antud kaks täisnurkset kolmnurka, millest esimese siseringjoon on teisele ümberringjooneks. Olgu nende kolmnurkade pindalad vastavalt  $S$  ja  $S'$ . Tõesta, et

$$\frac{S}{S'} \geq 3 + 2\sqrt{2}.$$

# Ülesandeid

## Kevadine lahtine võistlus 1999, vanem rühm

On antud kaks täisnurkset kolmnurka, millest esimese siseringjoon on teisele ümberringjooneks. Olgu nende kolmnurkade pindalad vastavalt  $S$  ja  $S'$ . Tõesta, et

$$\frac{S}{S'} \geq 3 + 2\sqrt{2}.$$

## Lõppvoor 2015, 12. klass

Olgu täisnurkse kolmnurga ümberringjoone raadius  $R$  ja siseringjoone raadius  $r$ . Tõesta, et  $R \geq (1 + \sqrt{2})r$ .

# Ülesandeid

## Kevadine lahtine võistlus 1999, vanem rühm

On antud kaks täisnurkset kolmnurka, millest esimese siseringjoon on teisele ümberringjooneks. Olgu nende kolmnurkade pindalad vastavalt  $S$  ja  $S'$ . Tõesta, et

$$\frac{S}{S'} \geq 3 + 2\sqrt{2}.$$

## Lõppvoor 2015, 12. klass

Olgu täisnurkse kolmnurga ümberringjoone raadius  $R$  ja siseringjoone raadius  $r$ . Tõesta, et  $R \geq (1 + \sqrt{2})r$ .

## Lõppvoor 2010, 12. klass

Nelinurga külgede pikkused on  $a, b, c, d$  ja pindala  $S$ . Tõesta, et kehtib võrratus

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geq 4S,$$

ning tee kindlaks, milliste nelinurkade korral kehtib võrdus.