

Funktsionaalvõrrandid

Jan Willemson

<https://varamu.eu>

Funktsiooni mõiste

Funktsioon

Olukorda, kus ühe suuruse mingile väärtusele vastab alati teise suuruse üks kindel väärtus, nimetame *funktsionaalseks sõltuvuseks* ja seda vastavust ennast nimetamegi *funktsiooniks*.

- Igal funktsioonil on olemas sisendite hulk (*määramispiirkond*) ja väljundite hulk (*muutumispiirkond*).
- Asjaolu, et funktsioon f saab sisendiks hulga X elemente ja väljastab hulga Y elemente, tähistatakse

$$f : X \rightarrow Y.$$

- Hulgad X ja Y ei pea olema arvuhulgad!
 - ▶ Vastavusi saab moodustada inimeste, geomeetriliste objektide jne vahel.

Jani metoodikamõtteid

- Koolis on oluline näidata ka funktsioone, mis ei tööta arvudel, vaid muudel objektidel. Näiteks
 - ▶ igale inimesele vastab tema nimi,
 - ▶ igale sünnihetkele vastab astroloogiline tähtkuju jne.

Jani metoodikamõtteid

- Koolis on oluline näidata ka funktsioone, mis ei tööta arvudel, vaid muudel objektidel. Näiteks
 - ▶ igale inimesele vastab tema nimi,
 - ▶ igale sünnihetkele vastab astroloogiline tähtkuju jne.
- Samuti on oluline näidata vastavusi, mis ei ole funktsioonid. Näiteks
 - ▶ inimese sünnikuupäeva järgi pole võimalik inimest üheselt tuvastada,
 - ▶ mitte igale inimesele ei saa seada vastavusse tema abikaasat.

Jani metoodikamõtteid

- Koolis on oluline näidata ka funktsioone, mis ei tööta arvudel, vaid muudel objektidel. Näiteks
 - ▶ igale inimesele vastab tema nimi,
 - ▶ igale sünnihetkele vastab astroloogiline tähtkuju jne.
- Samuti on oluline näidata vastavusi, mis ei ole funktsioonid. Näiteks
 - ▶ inimese sünnikuupäeva järgi pole võimalik inimest üheselt tuvastada,
 - ▶ mitte igale inimesele ei saa seada vastavusse tema abikaasat.
- Väga tänuväärne abivahend funktsioonide selgitamiseks on programmeerimine, kus funktsioonid leiavad kasutust väga loomulikul moel.

Funktsionaalvõrrandid

- Kui arvõrrandite puhul on otsitavateks objektideks arvud, siis funktsionaalvõrrandite puhul otsime funktsioone.
- Reeglina küsitakse võistlusülesannetes vastusfunktsioonide esitamist ilmutatud avaldiste abil.

Funktsionaalvõrrandid

- Kui arvõrrandite puhul on otsitavateks objektideks arvud, siis funktsionaalvõrrandite puhul otsime funktsioone.
- Reeglina küsitakse võistlusülesannetes vastusfunktsioonide esitamist ilmutatud avaldiste abil.
- Funktsionaalvõrrandid pole reeglina nii jubedad kui nad välja näevad.
- Kui küsitakse näiteks funktsiooni $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, siis võib hirmutav olla mõte et me peame leidma väärtuse $f(x)$ lõpmata paljude $x \in \mathbb{R}$ jaoks.
- Aga teisest küljest on meil ülesandes ühe funktsionaalvõrrandiga antud ka lõpmata palju tingimusi, mida kasutada!

Funktsionaalvõrrandid

- Kui arvõrrandite puhul on otsitavateks objektideks arvud, siis funktsionaalvõrrandite puhul otsime funktsioone.
- Reeglina küsitakse võistlusülesannetes vastusfunktsioonide esitamist ilmutatud avaldiste abil.
- Funktsionaalvõrrandid pole reeglina nii jubedad kui nad välja näevad.
- Kui küsitakse näiteks funktsiooni $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, siis võib hirmutav olla mõte et me peame leidma väärtuse $f(x)$ lõpmata paljude $x \in \mathbb{R}$ jaoks.
- Aga teisest küljest on meil ülesandes ühe funktsionaalvõrrandiga antud ka lõpmata palju tingimusi, mida kasutada!
- Funktsionaalvõrrandiülesannete lahendamisel ongi esimene samm proovida antud tingimust kitsendada konkreetsetele väärtustele, näiteks:
 - ▶ $x = 0$, $x = 1$, $x = y$ jmt.
- Et saada teada, kas me oleme võimalikku lahendite hulka piisavalt kitsendanud, tuleb funktsionaalvõrrandite lahendeid kontrollida!

Sügisene lahtine võistlus 2015, vanem rühm

Leia kõik funktsioonid f , mis on määratud kõigi reaalarvude hulgal ja võtavad reaalarvulisi väärtusi ning mis rahuldavad kõigi reaalarvude x, y korral tingimust

$$f(f(x) + f(y)) = f(x) + y.$$

Sügisene lahtine võistlus 2015, vanem rühm

Leia kõik funktsioonid f , mis on määratud kõigi reaalarvude hulgal ja võtavad reaalarvulisi väärtusi ning mis rahuldavad kõigi reaalarvude x, y korral tingimust

$$f(f(x) + f(y)) = f(x) + y.$$

Kevadine lahtine võistlus 2004, vanem rühm

Leia kõik sellised funktsioonid f , mis on määratud positiivsetel reaalarvudel, omandavad reaalarvulisi väärtusi ning rahuldavad mistahes positiivsete reaalarvude x ja y korral samasust

$$f(x)f(y) = f(xy) + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}.$$

Veel üks trikk

- Otsides funktsiooni $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, huvitab meid f väärtus iga reaalarvu korral.
- Selleks pole tingimata vaja leida $f(x)$ avaldist iga $x \in \mathbb{R}$ korral. Piisab, kui suudame leida $f(ax + b)$ avaldise mingite konstantide $a \neq 0$ ja b jaoks, sest $ax + b$ võtab ka kõik reaalarvulised väärtused!

Veel üks trikk

- Otsides funktsiooni $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, huvitab meid f väärtus iga reaalarvu korral.
- Selleks pole tingimata vaja leida $f(x)$ avaldist iga $x \in \mathbb{R}$ korral. Piisab, kui suudame leida $f(ax + b)$ avaldise mingite konstantide $a \neq 0$ ja b jaoks, sest $ax + b$ võtab ka kõik reaalarvulised väärtused!

Sügisene lahtine võistlus 1994, vanem rühm

Leia kõik niisugused funktsioonid $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, mis rahuldavad mistahes reaalarvude x ja y korral tingimust

$$f(x) \cdot f(y) = f(x - y).$$

Sügisene lahtine 2003, vanem rühm

Olgu \mathbb{R}^+ kõigi positiivsete reaalarvude hulk. Leia kõik funktsioonid $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, mille jaoks iga x, y korral hulgast \mathbb{R}^+ kehtib võrdus

$$y^2 \cdot f(x) = f\left(\frac{x}{y}\right).$$

Sügisene lahtine 2003, vanem rühm

Olgu \mathbb{R}^+ kõigi positiivsete reaalarvude hulk. Leia kõik funktsioonid $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, mille jaoks iga x, y korral hulgast \mathbb{R}^+ kehtib võrdus

$$y^2 \cdot f(x) = f\left(\frac{x}{y}\right).$$

Kevadine lahtine võistlus 2005, vanem rühm

Leia kõik funktsioonid f , mis on määratud kõigil reaalarvudel, omandavad reaalarvulisi väärtusi ning rahuldavad mis tahes reaalarvude x ja y korral tingimust

$$f(x + f(y)) = x + f(f(y)),$$

kusjuures $f(2004) = 2005$.

Sügisene lahtine võistlus 2014, vanem rühm

Leia kõik sellised funktsioonid, mis on määratud kõigil reaalarvudel ja annavad reaalarvulisi väärtusi ning rahuldavad mistahes reaalarvude x ja y korral võrdust

$$f(x + y)f(y) = f(x + xf(y)).$$

Sügisene lahtine võistlus 2014, vanem rühm

Leia kõik sellised funktsioonid, mis on määratud kõigil reaalarvudel ja annavad reaalarvulisi väärtusi ning rahuldavad mistahes reaalarvude x ja y korral võrdust

$$f(x + y)f(y) = f(x + xf(y)).$$

Lõppvoor 2004, 11. klass

Leia kõik funktsioonid $f(x)$, mis on määratud mittenegatiivsetel reaalarvudel, omandavad mittenegatiivseid reaalarvulisi väärtusi ning rahuldavad mistahes mittenegatiivsete reaalarvude x ja y korral tingimust

$$x \cdot f(y) + y \cdot f(x) = f(x) \cdot f(y) \cdot (f(x) + f(y)).$$