

AI ja (kooli)matemaatika

Jan Willemson

<https://varamu.eu>

- "Eesti matemaatikaõpikutes ja -õppekavades toimuvast" – ettekanne XIX Eesti matemaatika päevadel 22. augustil 2024. a.
 - ▶ Eesti matemaatikaõpikute (ja teiste õppevahendite) kvaliteedikontrollisüsteem ei tööta. Kogu vastutus on autori ja kirjastuse peal, väline kontroll on sageli formaalne.
 - ▶ Matemaatika sidumine reaaleluga on hea eesmärk, aga tänapäevased sisulised rakendused pole ühe-kahe tunniga ära seletatavad.
- <https://varamu.eu/wp-content/uploads/matopikud.pdf>

Mis on juhtunud kahe hooaja vahel?

Mis on juhtunud kahe hooaja vahel?



AI ja matemaatika

- 1. augustil 2026 teatas OpenAI, et nende uus mudel Astra lahendas 10 seni lahendamata matemaatikaprobleemi (sh Erdősi probleemid number 146, 180 ja 186).
 - ▶ Seejuures on kõik tõestused esitatud koos formaalselt verifitseeritava Lean'i sertifikaadiga
- See pole esimene kord, kui AI vastab pikaaegsele lahtisele küsimusele.
 - ▶ Mais 2026 lükkas OpenAI mudel ümber Erdősi ühikkauguste hüpoteesi, mis oli püsinud 80 aastat.
 - ▶ Juulis 2026 lükkas Anthropicu mudel Fable ümber jakobiaanihüpoteesi, mis oli püsinud pea 90 aastat.
 - ▶ <https://vibemathed.com> jälgib uuemaid arenguid.
- Google DeepMind lahendas juba 2024. aastal IMO ülesandeid hõbemedali vääriliselt.

AI ma matemaatika – minu isiklik kogemus

- Käesoleva aasta mais tahtsin panna kokku üht ülesannet, aga sellest kasvas välja uus hüpotees (<https://arxiv.org/pdf/2605.20831>).

AI ma matemaatika – minu isiklik kogemus

- Käesoleva aasta mais tahtsin panna kokku üht ülesannet, aga sellest kasvas välja uus hüpotees (<https://arxiv.org/pdf/2605.20831>).
- Minu esialgsed katsetused seda AI-ga tõestada ei kandnud vilja.
- Esitasin väljakutse ja üks kolleeg haaras sellest kinni.
- Umbes paarikümnetunnise mudelitööga ja ca 100-eurose kuluga suutis ta genereerida hüpoteesi lahenduse ja Leani sertifikaadi sellele.
- Lahendus on matemaatiliselt huvitav, aga mu kolleeg pole ise suuteline selle korrektsust kontrollima.
- Praeguse AI pealetungi puhul ei saagi uued hüpoteesid eluõigust – nad lahendatakse enne kui keegi jõuab hakata neid huvitavaks pidama.



"Õpime tehisintellekti
mitte kõige rohkem, vaid
kõige targemalt
kasutama."

Alar Karis
EESTI PRESIDENT

TI-hüppe eesmärgid. Mõõdikud

- 26 konkreetset mõõdikut, näiteks
 - ▶ mitmele protsendile 10.-11. klasside õpilastele on õpirakenduses loodud tasuta konto,
 - ▶ mitu protsenti neist on konto aktiveerinud,
 - ▶ õpilaste subjektiivne rahulolu õpirakendusega,
 - ▶ õpioskuste paranemise osas mõõdetakse, mitmes protsendis koolidest on toimunud koosloome töötoad ja TI-õpilasprogrammid,
 - ▶ kui paljudele 10.-11. klasside õpetajatele on rakenduses loodud tasuta premium-versiooniga konto,
 - ▶ kui paljud neist on konto aktiveerinud,
 - ▶ kui paljud õpetajad osalevad õpiringides,
 - ▶ õpetajate subjektiivne rahulolu.
- Lisaks 8 üldist valdkonda, näiteks
 - ▶ püsivus
 - ▶ TI-korjaoskus,
 - ▶ metakognitsioon,
 - ▶ õpistrateegiad.

Mida TI-hüpe mõõdetavaks eesmärgiks ei sea

- Ainetundmise tase.
- Õpirakenduse väljundi kvaliteet.
- TI abil loodud õppematerjalide kvaliteet.

Lõimitud tööjaamad

- Üks kolmest Presidendi haridushäkatloni võitjast.
- *Tehisarupõhine rakendus, mis aitab õpetajatel luua eri õppeaineid ühendavaid ülesandeid ja tööjaamu vastavalt õppekavale. Õpilased saavad lahendada enda tasemele sobivaid ülesandeid samm-sammult juhendamise ja tagasiside toel.*
- *Ideaalis peaks AI olema see, kes genereerib ülesanded ja meie eesmärgiks on ikka õpetaja koormuse vähendamine, millest tulenevalt ei tohiks kaasneda õpetajale suurt kohustust ülesannete vaideerimise, sisulise kontrolli või muul kujul ülevaatamise näol.*

Lõimitud tööjaamad

- Üks kolmest Presidendi haridushäkatloni võitjast.
- *Tehisarupõhine rakendus, mis aitab õpetajatel luua eri õppeaineid ühendavaid ülesandeid ja tööjaamu vastavalt õppekavale. Õpilased saavad lahendada enda tasemele sobivaid ülesandeid samm-sammult juhendamise ja tagasiside toel.*
- *Ideaalis peaks AI olema see, kes genereerib ülesanded ja meie eesmärgiks on ikka õpetaja koormuse vähendamine, millest tulenevalt ei tohiks kaasneda õpetajale suurt kohustust ülesannete vaideerimise, sisulise kontrolli või muul kujul ülevaatamise näol.*
- Kas AI on üldse valmis ilma inimliku järelvalveta ülesandeid koostama?

01 Pindala

KÜSIMUS

Millise kujuga ala on kõige lihtsam pindala järgi arvutada?

Ristkülik

Kolmnurk

Ring

Vahet pole — pindala on igal kujul sama valemiga

Küsimused küsimuse kohta

- Mida tähendab "pindala järgi arvutada"?
- Mida tähendab "kõige lihtsam arvutada"?

Küsimused küsimuse kohta

- Mida tähendab "pindala järgi arvutada"?
- Mida tähendab "kõige lihtsam arvutada"?

Just nii. Ristküliku pindala valem on lihtsaim: $S = a \times b$. Kolmnurga puhul pead teadma kõrgust eraldi ($S = a \times h \div 2$), ringil π väärtust ja raadiust ($S = \pi \times r^2$). Linnaplaneerijad jagavad keerukad alad ristkülikuteks just sel põhjusel. Sama valem ($S = a \times b$) töötab ka satelliidiga Eesti pindala mõõtmisel (45 339 km²).

Küsimused küsimuse kohta

- Mida tähendab "pindala järgi arvutada"?
- Mida tähendab "kõige lihtsam arvutada"?

Just nii. Ristküliku pindala valem on lihtsaim: $S = a \times b$. Kolmnurga puhul pead teadma kõrgust eraldi ($S = a \times h \div 2$), ringil π väärtust ja raadiust ($S = \pi \times r^2$). Linnaplaneerijad jagavad keerukad alad ristkülikuteks just sel põhjusel. Sama valem ($S = a \times b$) töötab ka satelliidiga Eesti pindala mõõtmisel ($45\,339 \text{ km}^2$).

- Ka ristküliku puhul on vaja teada kahte mõõdet.
- Kas $5,1988798684 \times 2203,97246864$ on lihtsam arvutada kui $\frac{3 \times 2}{2}$?
 - ▶ Sümbol $\div$ pole Eesti õpikutes kasutusel.
- Kas keerukad alad jagatakse tõesti ristkülikuteks, mitte kolmnurkadeks?
- Kuidas valem $S = a \times b$ töötab satelliidiga Eesti pindala mõõtmisel?

Mõõtmine



KAS TEADSID?

Iga mõõtmine sisaldab viga. 50 m mõõdulindiga väikesel alal on viga ~1 cm. Suuremal alal kogunevad vead. Insener mõõdab alati vähemalt kaks korda — kui tulemused erinevad palju, ka kolmandat.

TEGEVUS

Mõõda mõõdulindiga valitud ala pikkus. Korda mõõtmist. Kui kaks tulemust erinevad rohkem kui 50 cm, mõõda kolmandat. Tee sama laiusega.

KÜSIMUS

Pikkus (m): — Laius (m): —

Mõõtmine



KAS TEADSID?

Iga mõõtmine sisaldab viga. 50 m mõõdulindiga väikesel alal on viga ~1 cm. Suuremal alal kogunevad vead. Insener mõõdab alati vähemalt kaks korda — kui tulemused erinevad palju, ka kolmandat.

TEGEVUS

Mõõda mõõdulindiga valitud ala pikkus. Korda mõõtmist. Kui kaks tulemust erinevad rohkem kui 50 cm, mõõda kolmandat. Tee sama laiusega.

KÜSIMUS

Pikkus (m): — Laius (m): —

- Mida tähendab "50m mõõdulindiga väikesel alal on viga ~1cm."?

Mõõtmised märgitud

Mõõtmised märgitud

Vastasid 03:24 jooksul · +10 punkti

Mõõtmised märgitud. Kordades mõõtmist vähendad juhusliku vea tõenäosust — tegelikus geodeesias nõuab täpne ehituslepe mitut sõltumatut mõõtmist. Tüüpiline koolihoovi ala on 5–30 m küljepikkusega; kontrolli, et ühik on m. Kui kaks mõõtmist erinesid > 50 cm, mõõda kolmandat.

Mõõtmised märgitud

Mõõtmised märgitud

Vastasisid 03:24 jooksul · +10 punkti

Mõõtmised märgitud. Kordades mõõtmist vähendad juhusliku vea tõenäosust — tegelikus geodeesias nõuab täpne ehituslepe mitut sõltumatut mõõtmist. Tüüpiline koolihoovi ala on 5–30 m küljepikkusega; kontrolli, et ühik on m. Kui kaks mõõtmist erinesid > 50 cm, mõõda kolmandat.

- Eesti keel on vigane.
 - ▶ "Mõõtmised märgitud".
 - ▶ "Kordades mõõtmist".
 - ▶ Misasi on "täpne ehituslepe tegelikus geodeesias"?
 - ▶ "Kui kaks mõõtmist erinesid > 50 cm, mõõda kolmandat".

Jälle see satelliit



KAS TEADSID?

$S = a \times b$ on sama valem, mida kasutavad satelliidid Eesti pindala mõõtmiseks (45 339 km²). Sama valem, erinev mastaap — koolihoovist riigini.

- Kas Eesti on riskülik?

Mitu puud mahub?

Mitu puud mahub?



KAS TEADSID?

Linnapuude vahekaugus sõltub liigist: väiksemad puud (kased, toomingad) istutakse ~3 m teineteisest ehk 9 m²/puu, keskmised (pärnad, vahtrad) ~4 m ehk 16 m²/puu. Lähemalt istutatud puud näevad alguses lopsakamad välja, kuid 10 aasta pärast hakkavad teineteist varjama ja kasvavad nõrgemaks. Selles ülesandes kasutame 16 m² — keskmise linnapuu norm.

Mitu puud mahub?

Mitu puud mahub?



KAS TEADSID?

Linnapuude vahekaugus sõltub liigist: väiksemad puud (kased, toomingad) istutakse ~3 m teineteisest ehk 9 m²/puu, keskmised (pärnad, vahtrad) ~4 m ehk 16 m²/puu. Lähemalt istutatud puud näevad alguses lopsakamad välja, kuid 10 aasta pärast hakkavad teineteist varjama ja kasvavad nõrgemaks. Selles ülesandes kasutame 16 m² — keskmise linnapuu norm.

- Kui istutada puid mitte ruudulise, vaid kuusnurkse võre sõlmedesse, saab istutada tihedamalt.

Leiame puude arvu (I)

TEGEVUS

Jaga oma sammus 3 arvutatud pindala 16-ga. Ümarda allapoole täisarvuni — puid ei istutata pooleldi.

SINU MÕÕTMISED

PIKKUS

2 m

LAIUS

3 m

PINDALA

6 m²

KÜSIMUS

Sisesta puude arv sinu alale (täisarv):

Leiame puude arvu (I)

TEGEVUS

Jaga oma sammus 3 arvutatud pindala 16-ga. Ümarda allapoole täisarvuni — puid ei istutata pooleldi.

SINU MÕÕTMISED

PIKKUS

2 m

LAIUS

3 m

PINDALA

6 m²

KÜSIMUS

Sisesta puude arv sinu alale (täisarv):

- 4×4 platsile saab istutada 4 puud, mitte 1.

Leiame puude arvu (II)

Arvutus ei klapi

Vastasid 06:43 jooksul · 0 punkti

Jaga oma pindala 16-ga. Tulemus ümardatakse ALATI allapoole (mitte üles). Näide:
 $100 \text{ m}^2 \div 16 = 6,25 \rightarrow 6$ puud. Põhjus: viimase puu jaoks pole piisavalt ruumi (vaja oleks 16 m^2 , aga jääb vaid 4 m^2). Kontrolli oma jagamist ja ümardamist.

Leiame puude arvu (II)

Arvutus ei klapi

Vastasid 06:43 jooksul · 0 punkti

Jaga oma pindala 16-ga. Tulemus ümardatakse ALATI allapoole (mitte üles). Näide:
 $100 \text{ m}^2 \div 16 = 6,25 \rightarrow 6$ puud. Põhjus: viimase puu jaoks pole piisavalt ruumi (vaja oleks 16 m^2 , aga jääb vaid 4 m^2). Kontrolli oma jagamist ja ümardamist.

- 2×3 platsile saaks istutada 1 puu, mitte 0.

PROOVI UUESTI

PIKKUS

2 m

LAIUS

3 m

PINDALA

6 m²

Sinu vastus: 1

Õige vastus:

0



Segadus jätkub



KAS TEADSID?

Puud seovad süsihappegaasi (CO_2). Üks täiskasvanud lehtpuu seob ~22 kg CO_2 aastas.

TEGEVUS

Korruta oma puude arv 22-ga. See on aastas seotav CO_2 kogus kilogrammides.

SINU MÕÕTMISED

PINDALA

6 m²

PUUDE ARV

0 tk

KÜSIMUS

Mitu kg CO_2 aastas sinu puud seoksid? _____



KAS TEADSID?

Mõõtkava 1:N tähendab: 1 ühik paberil = N ühikut looduses. Sama ühik mõlemal pool — see on kriitiline. Eesti kaardistuses kasutatakse korruga mitmesuguseid mõõtkavasid: korruseplaan 1:50, detailplaan 1:100, geodeetiline alusplaan 1:1000, põhikaart 1:10 000, üldkaart 1:50 000.

- Geodeetiline alusplaan on tavaliselt mõõtkavas 1:500.
- "Sama ühik mõlemal pool — see on kriitiline." ei kõla nagu eesti keel (ja muidugi kurikuulus *emdash!*).

Mõõda objektid



KAS TEADSID?

Kahemõõtmelise plaani jaoks ei piisa ainult naaberkaugustest — need määravad pikkused, kuid mitte nurki. Punkti asukoha üheseks määramiseks tasapinnal on vaja vähemalt kahte kaugust eri lähtepunktidest. Sama põhimõte töötab GPS-süsteemis (triangulatsioon nelja satelliidi vahel) ja geodeesias.

- Kahest kaugusest ei piisa asukoha üheseks määramiseks, sest kaks ringjoont lõikuvad kahes punktis.
- Jutt GPS-ist ja geodeesiast jääb üsna uduseks.

Mõõda objektid: tegevusülesanne

Vali 5 nähtavat objekti, kõik alla 3 m kaugusel naabritest. Mõõda 4 naaberkaugust ($1 \leftrightarrow 2$, $2 \leftrightarrow 3$, $3 \leftrightarrow 4$, $4 \leftrightarrow 5$) ja lisaks 2 ristkaugust (nt $1 \leftrightarrow 3$ ja $3 \leftrightarrow 5$) triangulatsiooni jaoks. Kokku 6 mõõtmist.

KÜSIMUS

4 naaberkaugust (m): 1 / 1 / 1 / 1 2 ristkaugust
(m): 3 / 3 Suurim mõõdetud kaugus (m): 3

- Miks just $1 \leftrightarrow 2$, $2 \leftrightarrow 3$, $3 \leftrightarrow 4$, $4 \leftrightarrow 5$, $1 \leftrightarrow 3$, $3 \leftrightarrow 5$, mitte $1 \leftrightarrow 2$, $2 \leftrightarrow 3$, $3 \leftrightarrow 4$, $4 \leftrightarrow 1$, $1 \leftrightarrow 3$, $2 \leftrightarrow 4$?
- Süsteem ei kontrolli, et sisestatud kaugused rahuldaks kolmnurgavõrratust.
- Realistlikult lahendatakse seda ülesannet klassis. Mida õieti tähendab kahe lähestikku seisva laua jaoks nendevaheline kaugus?

Vali sobiv määtkava

Otsi sammus 2 määdetud suurim kaugus. Vali nendest määtkavadest see, mis annab paberil kauguse vahemikus 5–17 cm: 1:20, 1:50 või 1:100.

KÜSIMUS

Suurim kaugus (m): 3 Valitud määtkava (1: 20) Suurim kaugus paberil (cm): 15

Vali sobiv mõõtkava

Otsi sammus 2 mõõdetud suurim kaugus. Vali nendest mõõtkavadest see, mis annab paberil kauguse vahemikus 5–17 cm: 1:20, 1:50 või 1:100.

KÜSIMUS

Suurim kaugus (m): 3 Valitud mõõtkava (1: 20) Suurim kaugus paberil (cm): 15



Arvutus ei klapi

Vastasid 01:10 jooksul · 0 punkti

Konversiooni valem: paberi kaugus (cm) = päris kaugus (cm) ÷ mõõtkava arv. Näide: kui suurim kaugus on 2,5 m, siis $250 \text{ cm} \div 50 = 5 \text{ cm}$; $250 \text{ cm} \div 20 = 12,5 \text{ cm}$; $250 \text{ cm} \div 100 = 2,5 \text{ cm}$. 1:20 või 1:50 sobivad enamikule A4 paberil mahutuval alale; 1:100 jätkaks liiga väikese joonise.

- Aga kus see viga siis õieti on? $300 : 20 = 15$ ja $5 \leq 15 \leq 17$.
- Ma ei saanudki sellest kohast edasi.

Mis probleemi me õpetajat asendades lahendame?

- Mina usun, et paljudele õpetajatele meeldib nende töö tänu selle loomingulisusele.
- Huvitavate ülesannete väljamõtlemine on üks koht, kus õpetaja saab oma loomingulisust rakendada.
- Ja nüüd tahame õpetaja töö huvitava osa anda AI-le ning jätta inimese AI *slop*'i koristama?

Mis probleemi me õpetajat asendades lahendame?

- Mina usun, et paljudele õpetajatele meeldib nende töö tänu selle loomingulisusele.
- Huvitavate ülesannete väljamõtlemine on üks koht, kus õpetaja saab oma loomingulisust rakendada.
- Ja nüüd tahame õpetaja töö huvitava osa anda AI-le ning jätta inimese AI *slop*'i koristama?
- Huvitav lugemine: "Generative AI Can Harm Teaching" (https://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=7007339).
 - ▶ See, kui õpetaja kasutab AI-d, kahandab õpilaste õpimotivatsiooni.
 - ▶ Õpilaste keskmine ainetulemus ei muutunud märkimisväärselt, kui õpetaja AI-d kasutas, kuid kehvade õpilaste tulemused langesid ja heade õpilaste tulemused paranesid.

Kas ajalugu kordub?

Page 10A The Daily Item — Sumner, S.C. Saturday, April 5, 1986



AP photo

Elementary school teachers picket against use of calculators in grade school
The teachers feel if students use calculators too early, they won't learn math concepts

Math teachers protest against calculator use

By JILL LAWRENCE

"My older kids don't pay any attention to an answer being absurd," he said. "Teachers are shy."

Vaheokkuvõtteks

- AI-põhiste õppematerjalide puhul muutub kvaliteedikontroll veel raskemaks, sest keegi ei jõua kogu AI produktsiooni kriitiliselt läbi analüüsida.
- Praegused rakendused ei veena mind, et AI abil ülesannete koostamine annab parema (või odavama) tulemuse kui klassikaline töövihik.
- AI genereeritud materjalide puhul pole selge, kes nende kvaliteedi eest vastutab.
 - ▶ AI platvormi pakkuja?
 - ▶ AI rakenduse looja?
 - ▶ AI rakenduse kasutaja?
- EU AI regulatsioon (mis rakendub haridusele kui kõrge riskitasemega valdkonnale 2027. aastast) näeb muuhulgas ette konkreetse vastutaja määramise, aga kogu TI-hüppe seltskond on praegu ilma peata selles osas, keda vastutama panna.
- Püüd inimõpetajat protsessist välja optimeerida on minu arust sügavalt väär.

Willemsoni teesid

Willemsoni I tees

TI-le saab lahendamiseks anda ainult neid ülesandeid, mida sa oskad lahendada ka ilma TI abita.

Willemsoni teesid

Willemsoni I tees

TI-le saab lahendamiseks anda ainult neid ülesandeid, mida sa oskad lahendada ka ilma TI abita.

Willemson II tees

TI-hüppe edukust ei määra mitte see, kui palju haridust me suudame õpilastele anda TI abiga, vaid see, kui palju me suudame seda teha ilma TI-ta.

Küsimusi aruteluks

- Mis probleemi AI toomine õppetöösse õieti lahendab?
 - ▶ Paneme tähele, et AI kasutamine õppimisel ja AI kasutama õppimine on kaks eraldi asja!
- Kui masin midagi oskab, kas sellest järeldub, et inimene ei pea seda enam oskama?
- Kas neid oskusi, mida inimene peab ilma masinata valdama, on võimalik õpetada masinale toetudes?
- Mis on see teadmiste ja oskuste komplekt, mida koolilõpetaja peab valdama ilma AI abita?
- Kes vastutab AI-ga loodud õppematerjalide kvaliteedi eest?