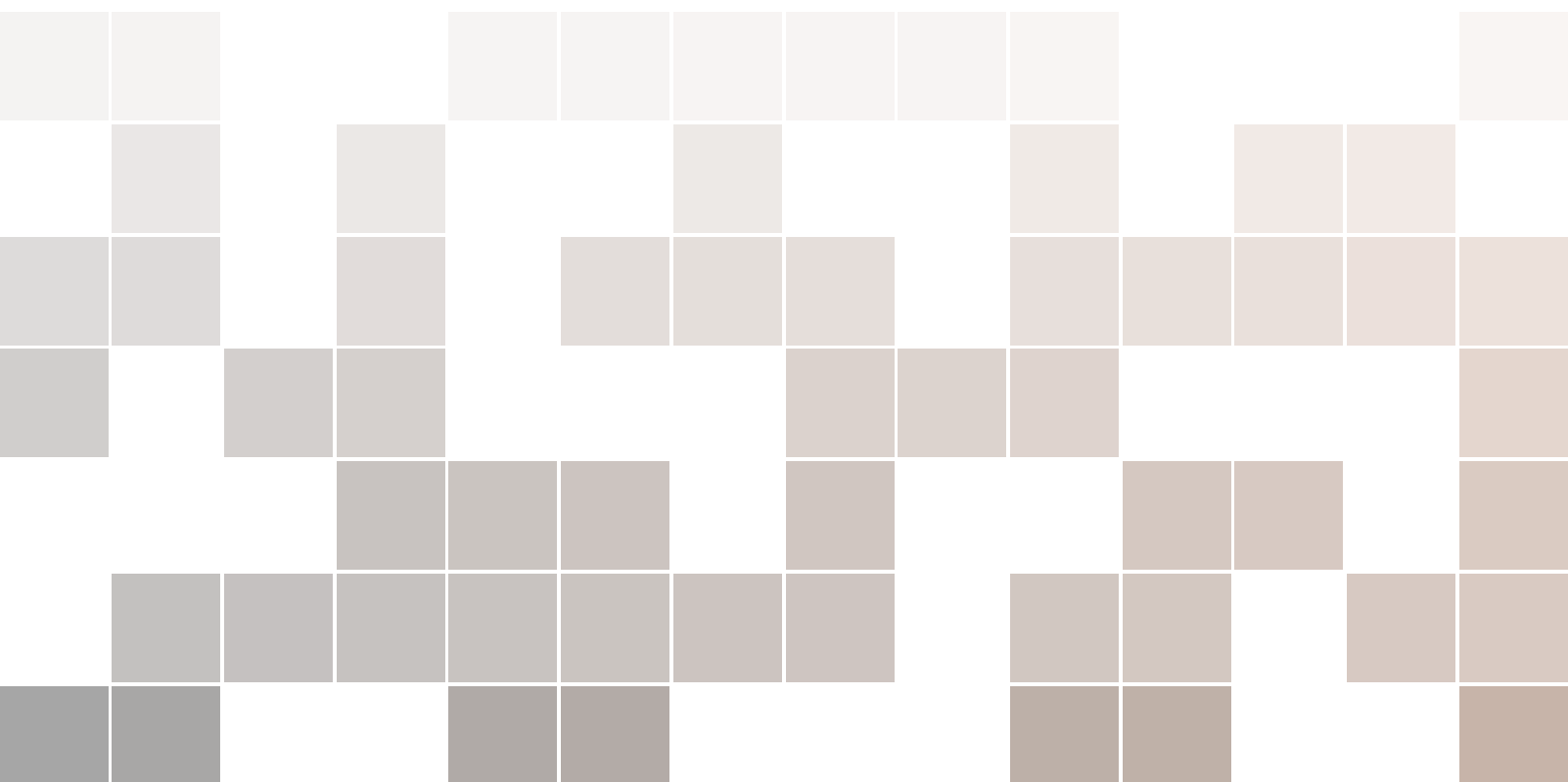


Võistlusmatemaatika põhivara

Teooria, ülesanded, lahendused

Jan Willemson



Copyright © 2024 Jan Willemson

Raamat kasutab **LEGRAND ORANGE BOOK** malli.

Sisukord

I	Loogika, kombinatoorika	
1	Naturaalarvud ja matemaatiline induktsioon	11
2	Languse printsiip	35
3	Linnad ja ühendused (graafid)	41
4	Mängud	51
5	Dirichlet' printsiip	63
6	Invariandid	69
7	Loendamine	79
8	Topeltloendamine	89
II	Algebra	
9	Teleskoopsummad	99
10	Polünoomid	103
10.1	Polünoomi mõiste	103
10.2	Tehted polünoomidega	105
10.3	Polünoomide tegurdamine	107
10.4	Mitmemuutujapolünoomide tegurdamine	116

10.5	Viète'i valemid	121
11	Funktsioonide ja graafikute uurimine	125
12	Funktsionaalvõrrandid	137
12.1	Funktsiooni mõiste	137
12.2	Funktsioonide esitused	138
12.3	Funktsionaalvõrrandid	141
13	Põhivõrratused	149
13.1	Kuidas ei tohi võrratusi tõestada	149
13.2	Reaalarvu ruut on mittenegatiivne	150
13.3	Aritmeetilise ja geomeetrilise keskmise vaheline võrratus	157
13.4	Harmoniline keskmine ja ruutkeskmine	164
14	Cauchy(-Bunjakovski-Schwarzi) võrratus	169
15	Jenseni võrratus	175
15.1	Kumerad ja nõgusad funktsioonid	175
15.2	Jenseni võrratus	177
15.3	Jenseni võrratuse võrdusejuhust	179
15.4	Jenseni võrratuse rakendusi	180
16	Trigonomeetria	187

III

Arvuteooria

17	Uurime jääke!	197
18	Astmetsükliid	215
19	Aritmeetika põhiteoreem. Jagajad	225
20	Jaguvus ja tegurdamine	231
21	Suurim ühistegur, vähim ühiskordne	239
22	Ratsionaalarvud ja irratsionaalarvud	247
23	Euleri teoreem ja Fermat' väike teoreem	259
23.1	Fermat' väikese teoreemi kombinatoorne tõestus	264
23.2	Euleri φ -funktsiooni arvutamine	266

24	Sarnased kolmnurgad	271
25	Uurime pindalaid!	281
26	Kesk- ja piirdenurk. Thalese teoreem	291
27	Neli punkti ühel ringjoonel	303
27.1	Kõõlnelinurga tarvilikud ja piisavad tingimused	303
27.2	Kõrguste lõikepunkti omadus	316
28	Kolm punkti ühel sirgel	323
29	Puutuja ja kõõlu teoreem	333
30	Punkti potents ringjoone suhtes	341
30.1	Radikaaltelg ja radikaalkese	351
31	Kõrgus, mediaan ja nurgapoolitaja võrdhaarses kolmnurgas 357	
31.1	Võrdhaarse kolmnurga teoreem	357
31.2	Võrdhaarse kolmnurga teoreemi pöördteoreem	362
32	Nurgapoolitaja omadused	371
32.1	Nurgapoolitaja (esimene) omadus	371
32.2	Nurgapoolitaja teine omadus	378
33	Homoteetia	383
34	Tasandi pöörded	395
35	Kombinatoorne geomeetria	401
36	Geomeetrilised võrratused	409
36.1	Kolmnurgavõrratus	409
36.2	Mitmesuguseid geomeetrilisi võrratusi	414
37	Meetrilised seosed kolmnurgas	431
38	Apolloniose ringjoon	443

V

Märksõnad	451
Kirjandus	454



Saatesõna

Võistlemine on inimloomusele igiomane, ega muidu poleks juba antiikajal olümpiamänge korraldatud. Sport pole muidugi ainus asi, milles omavahel mõõtu võtta. Võistelda saab ka selles, kes kõige ilusamini laulab, kõige parema raamatu kirjutab või kõige uhkema muuseumihoone projekteerib. Või siis kõige paremini matemaatikaülesandeid lahendab.

Renessansiaegses Euroopas valiti ülikoolidesse professoreid selle järgi, kes suudab konkurentidele raskemaid ülesandeid anda ja samal ajal konkurentide ülesanded ise ära lahendada. Nii näiteks leidis 1535. aastal Itaalias Niccolo Tartaglia ja Antonio Maria Fiori vahel aset ülesannete lahendamise võistlus, mille käigus töötas Tartaglia välja kuupvõrrandi üldkujulise lahendivalemi. See oli tolle aja kohta väga suur saavutus, mis viis hiljem ka 4. astme võrrandi lahendamise ning kompleksarvude avastamiseni.

Üheks esimeseks tänapäevases mõistes matemaatikaolümpiaadiks võib pidada 1894. aastal Ungaris toimunud Eötvösi võistlust. Järgnevatel kümnenditel hakati sarnaseid võistlusi korraldama mujalgi, kuni 1959. aastal jõuti esimese rahvusvahelise matemaatikaolümpiaadi (*International Mathematical Olympiad, IMO*) organiseerimiseni Rumeenias [10].

Eestis viiakse matemaatikaolümpiaade järjepidevalt läbi juba 1954. aastast. Nende osavõtjatest on hiljem saanud väljapaistvad Eesti matemaatikud, füüsikud ja arvutiteadlased, aga ka ettevõtjad, poliitikud ja paljude teiste erialade esindajad. Matemaatika nõuab ranget loogilist mõtlemist ning see on oskus, mis kulub marjaks ära igas eluvaldkonnas.

Formaalselt võttes peaks enam-vähem kõik matemaatikavõistlustel antavad ülesanded olema lahendatavad koolitunniteadmistega. Reaalsuses aga saavutavad paremaid tulemusi need võistlejad, kellel on laiemad, üldhariduskooli õppekava piire ületavad teadmised.

Võib koguni öelda, et matemaatikaolümpiaadidel on oma mitteametlik “õppekava”, mille tundmist lahendajatelt eeldatakse. Võistlusteks ettevalmistumist raskendab aga asjaolu, et seda “õppekava” pole kusagil korralikult kirjas, rääkimata tema alusel koostatud õpikust.

Kõige lähemal niisugusele õppematerjalile seisavad kolm nõukogude-perioodil toimunud olümpiaade käsitlevat raamatut Evi Mitt'i jt sulest [2, 8, 9]. Neist leiame teemade järgi süstematiseeritud ja täielike lahendustega varustatud valikülesandeid

aastatest 1954-1988. Alates 1992. aastast toimunud matemaatikavõistluste ülesanded ja lahendused on üleval Eesti matemaatikaolümpiaadide veebilehel¹. Paraku pole keegi neid ülesandeid enam teemade järgi katalogiseerinud ja nõnda on kogu see väärtuslik veebimaterjal süstemaatiliseks olümpiaadiettevalmistuseks raskesti kasutatav.

Teine probleem võistlusteks valmistumisel on materjalide esituslaad. Kõigis ülalviidatud allikates tuuakse ülesannetele formaalselt täielikud lahendused, kuid lõpptulemus ei näita alati teekonda, kuidas sellele tulemusele jõuti. Õppetöös aga on lahenduse leidmise protsess vaata et tähtsamgi kui lahendus ise.

Neid lünki püüabki täita käesolev raamat. Raamatut ette valmistades töötas autor läbi suure osa 1992.-2023. aasta Eesti olümpiaadide piirkonna- ja lõppvooru ning lahtiste võistluste ülesannetest. Vaatluse alt jäid teadlikult välja rahvusvahelise olümpiaadi valikvõistluste ning Balti Tee ülesanded – need sisaldavad sageli kõrgema taseme teemasid, mis väärivad omaette raamatut.

Läbitöötatud materjalidest eraldas autor sagedamini esinevad teemad, keskendudes seejuures valdkondadele ja abitulemustele, mis meie kooliprogrammist välja jäänud on. Raamatu iga jaotis esitab kõigepealt vastava teooria ja näited, millele järgnevad päris võistlustel esinenud ülesanded koos üksikasjalike lahendustega. Seejuures on autor sageli eelistanud pikemaid, aga see-eest õpetlikumaid lahenduskäike kompaktselt formaalsele miinimumile. Muidugi ei mahtunud raamatusse ära kõik alusdefiniitsioonid ja -teoreemid. Need leiab huvitatud lugeja Abelite ja Kaasiku “Koolimatemaatika entsüklopeediat” [1].

Loodetavasti leiavad siit raamatust enda jaoks kasulikku materjali nii matemaatikaolümpiaadidel osalejad kui ka õpetajaid, kes õpilasi võistlusteks ette valmistavad.

Tartu, 2024

¹<https://math.olympiadid.ut.ee/>



Loogika, kombinatoorika

1	Naturaalarvud ja matemaatiline induktsioon ...	11
2	Languse printsiip	35
3	Linnad ja ühendusteed (graafid)	41
4	Mängud	51
5	Dirichlet' printsiip	63
6	Invariandid	69
7	Loendamine	79
8	Topeltloendamine	89

