Trigonomeetria

Gümnaasiumi reaalharu

Jan Willemson

https://varamu.eu

Saatesõna

Sa hoiad käes Eesti gümnaasiumi reaalharule mõeldud eksperimentaalsesse matemaatikaõpikute sarja kuuluvat õpikut. Sari on leidnud inspiratsiooni 2023. aasta gümnaasiumi laia matemaatika õppekavast, kuid ei vasta sellele üksüheselt. Autori hinnangul vajabki Eesti gümnaasiumi matemaatika ainekava põhjalikku uuendamist. Käesolev sari kujutab endast autori nägemust sellest, milline matemaatika ainekava 21. sajandi 1. veerandi lõpul välja peaks nägema, et üldhariduskooli lõpetajad oleksid valmis jätkama õpinguid ühiskonnale olulistel erialadel.

Sarja sõsarõpikuks on sama autori „Võistlusmatemaatika põhivara”, millest huvitatud lugeja leiab palju täiendavaid ülesandeid ning süvendatud materjali. Mõned jaotised ja ülesanded on kahel õppematerjalil ka ühised – aga eks matemaatika, mida neis käsitletakse, ongi ju üks ja seesama.

Sarja õpikud on hetkel mustandi staatuses – neis võib esineda lünki, vigu ning muid vajakajäämisi. Autor on tänulik kommentaaride ja tagasiside eest, mida saab saata aadressile `matemaatika@varamu.eu`.

Sisukord

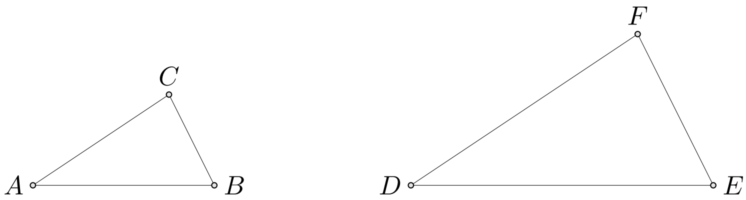
PEATÜKK 1

Täisnurkse kolmnurga trigonomeetria

1.1 Kolmnurkade sarnasus. Trigonomeetrilised põhifunktsioonid

Alustame põhikoolis õpitu meeldetuletamisest.

Definitsioon 1.1. *Kolmnurki ABC ja DEF nimetame* sarnasteks, *kui nende küljed on vastavalt võrdelised, st kehtivad võrdused $\frac{|AB|}{|DE|} = \frac{|BC|}{|EF|} = \frac{|CA|}{|FD|}$. Sel juhul kirjutame $\triangle ABC \sim \triangle DEF$. Külgede pikkuste suhet $k = \frac{|AB|}{|DE|}$ (või $k = \frac{|DE|}{|AB|}$) nimetame nende kolmnurkade* sarnasusteguriks.



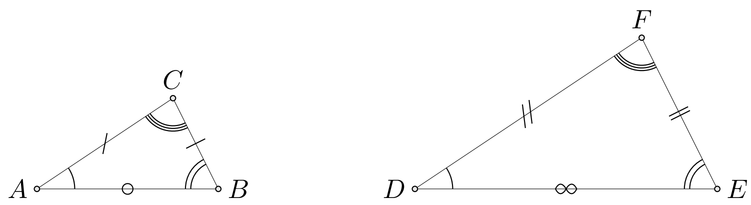
Kolmnurkade sarnasuse uurimisel ja kasutamisel on keskse tähtsusega järgmine teoreem, mis sõnastab kolmnurkade sarnasuse tingimused.

Teoreem 1.1 Olgu antud kaks kolmnurka. Järgmised tingimused on samaväärsed:

(a) nende kolmnurkade küljed on vastavalt võrdelised (st kolmnurgad on sarnased; tunnus KKK),

(b) nende kolmnurkade kaks paari külgi on vastavalt võrdelised ning nende külgede vahelised nurgad on võrdsed (tunnus KNK),

(c) nende kolmnurkade nurgad on vastavalt võrdsed (tunnus NNN).



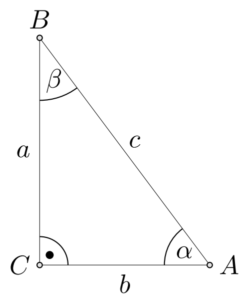
Teoreemi 1.1 tõestuse leiab lugeja „Võistlusmatemaatika põhivara” peatükist „Sarnased kolmnurgad”.

Kuna iga kolmnurga nurkade summa on $180°$, piisab tunnuse NNN puhul muidugi ainult kahe nurga vastava võrdsuse näitamisest (mistõttu teda nimetatakse ka lihtsalt NN tunnuseks).

Veel enamgi, kui kolmnurga üks nurk fikseerida, määrab teise nurga suurus kolmnurga kuju sarnasuse täpsusega ära. Muuhulgas on üheselt määratud kolmnurga külgede suhted.

Sellele tähelepanekule tuginebki trigonomeetria. Osutub, et praktikas on kasulik fikseeritud nurgaks valida täisnurk. Sel juhul määrab ühe teravnurga täiendav valik kolmnurga sarnasuse täpsusega ära; muuhulgas on üheselt fikseeritud vastavate külgede suhted. Kehtib ka vastupidine – kui määrata täisnurkses kolmnurgas ära kahe külje suhted, saame leida selle kolmnurga ülejäänud nurkade suurused.

Need tähelepanekud motiveerivad järgmise definitsiooni. Vaatleme täisnurkset kolmnurka ABC täisnurgaga tipu C juures, teravnurkadega α ja β, kaatetite pikkustega a ja b ning hüpotenuusi pikkusega c.



Definitsioon 1.2.

(a) *Täisnurkse kolmnurga teravnurga* siinuseks *nimetatakse selle nurga vastaskaateti ja hüpotenuusi pikkuste suhet:*

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}\,, \quad \sin\beta = \frac{b}{c}\,.$$

(b) *Täisnurkse kolmnurga teravnurga* koosinuseks *nimetatakse selle nurga lähiskaateti ja hüpotenuusi pikkuste suhet.*

$$\cos\alpha = \frac{b}{c}\,, \quad \cos\beta = \frac{a}{c}\,.$$

(c) *Täisnurkse kolmnurga teravnurga* tangensiks *nimetatakse selle nurga vastaskaateti ja lähiskaateti pikkuste suhet.*

$$\tan\alpha = \frac{a}{b}\,, \quad \tan\beta = \frac{b}{a}\,.$$

(d) *Täisnurkse kolmnurga teravnurga* kootangensiks *nimetatakse selle nurga lähiskaateti ja vastaskaateti pikkuste suhet.*

$$\cot\alpha = \frac{b}{a}\,, \quad \cot\beta = \frac{a}{b}\,.$$

Rõhutame veelkord, et need funktsioonid on korrektselt defineeritud tänu kolmnurkade sarnasusele. Näiteks $\sin\alpha$ ei sõltu eraldiseisvatest lõikudest pikkustega a ja c, vaid ainult nende suhtest. See suhe on aga sama kõigi täisnurksete kolmnurkade jaoks, mille ühe teravnurga suurus on α.

Ülesanne 1.1 Kust pärineb ja mida tähendab sõna „trigonomeetria"?

Kuna teravnurkade trigonomeetrilised funktsioonid on defineeritud teatud lõikude pikkuste suhetena, on need väärtused alati positiivsed. Lisaks paneme tähele, et hüpotenuus on täisnurkses kolmnurgas pikim külg, seega on siinus- ja koosinusfunktsiooni väärtused täisnurkade korral alati väiksemad kui 1.

Kui $0^\circ < \alpha < 90^\circ$, kehtivad võrratused

$$0 < \sin\alpha < 1\,, \quad 0 < \cos\alpha < 1\,, \quad 0 < \tan\alpha \quad \text{ja} \quad 0 < \cot\alpha\,.$$

Ülesanne 1.2 Kas leidub niisugune reaalarv t, et iga $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ jaoks kehtib võrratus

$$\tan\alpha < t\,?$$

Ülesanne 1.3 Kas leidub niisugune reaalarv t, et iga $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ jaoks kehtib võrratus

$$\cot\alpha < t\,?$$

Teame, et kolmnurk on täisnurkne parajasti siis, kui tema kahe (terav)nurga summa on 90°. Tänu sellele saame definitsioonist 1.2 kohe mitu olulist järeldust.

Kui teravnurkade α ja β korral $\alpha + \beta = 90^\circ$, kehtivad seosed

$$\sin\alpha = \cos\beta \quad \text{ja} \quad \tan\alpha = \cot\beta$$

ehk

$$\sin\alpha = \cos(90^\circ - \alpha)\,, \quad \sin(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha \quad \text{ja}$$

$$\tan(90^\circ - \alpha) = \cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha}\,.$$

Kuna sama nurga tangens ja kootangens on lihtsalt teineteise pöördväärtused, piisab, kui teame antud nurga jaoks vaid ühte neist. Praktikas osutub valituks enamasti tangens.

Paneme tähele veel, et

$$\tan\alpha = \frac{a}{b} = \frac{a/c}{b/c} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \quad \text{ja} \quad \cot\alpha = \frac{b}{a} = \frac{b/c}{a/c} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\,.$$

Need võrdused on samuti väärt omaette reeglit:

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\,, \quad \cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\,.$$

Pythagorase teoreemist teame, et täisnurkses kolmnurgas kehtib võrdus $a^2 + b^2 = c^2$. Teisendame seda seost:

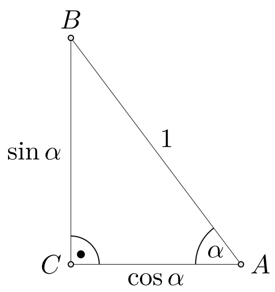
$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= c^2\,, \quad \mid : c^2 \\ \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} &= 1, \\ \left(\frac{a}{b}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 &= 1\,, \\ \sin^2\alpha + \cos^2\alpha &= 1\,. \end{aligned}$$

Viimases võrduses oleme $(\sin\alpha)^2$ ja $(\cos\alpha)^2$ asemel kirjutanud lühemalt $\sin^2\alpha$ ja $\cos^2\alpha$.

Seda tulemust hakkab meil edaspidi väga palju vaja minema, niisiis sõnastame ka tema eraldi reeglina:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

Selle reegli meeldejätmiseks võib mõelda, et tegemist pole millegi muu kui Pythagorase teoreemiga täisnurkse kolmnurga jaoks, mille hüpotenuusi pikkus on 1. Niisuguse kolmnurga kaatetite pikkused on siis parajasti $\sin\alpha$ ja $\cos\alpha$.



Osutub, et tuletatud reeglitest piisab, et ühe trigonomeetrilise funktsiooni väärtuse põhjal teised välja arvutada.

Ülesanne 1.4 Olgu α teravnurk.

(a) Avalda $\sin\alpha$ kaudu $\cos\alpha$ ja $\tan\alpha$.

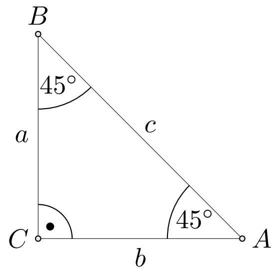
(b) Avalda $\cos\alpha$ kaudu $\sin\alpha$ ja $\tan\alpha$.

(c) Avalda $\tan\alpha$ kaudu $\sin\alpha$ ja $\cos\alpha$.

Järgmistes jaotistes leiame otse definitsiooni 1.2 põhjal mõnede olulisemate nurkade trigonomeetriliste funktsioonide väärtused.

1.2 $30°$, $45°$, $60°$

Vaatleme kõigepealt juhtu $\alpha = 45°$. Siis on ka täisnurkse kolmnurga teine teravnurk $\beta = 90° - 45° = 45°$, st tegemist on võrdhaarse täisnurkse kolmnurgaga ehk $a = b$.



Pythagorase teoreemist saame

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= c^2\,, \\ a^2 + a^2 &= c^2\,, \\ 2a^2 &= c^2\,, \quad |\sqrt{\ } \\ \sqrt{2}a &= c\,, \quad |:\sqrt{2}c \\ \frac{a}{c} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\,, \\ \sin\alpha &= \frac{1}{\sqrt{2}}\,. \end{aligned}$$

Traditsiooni järgi püütakse murru nimetajast irratsionaalavaldised võimalusel kaotada. Praegu saame seda teha, laiendades murru $\frac{1}{\sqrt{2}}$ lugejat ja nimetajat arvuga $\sqrt{2}$:

$$\sin 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\,.$$

Kuna praegusel juhul $a = b$, omab ka $\cos 45°$ sama väärtust

$$\cos 45° = \frac{b}{c} = \frac{a}{c} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\,.$$

Ülesanne 1.5 Kontrolli kalkulaatori või arvuti abil, et $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Mis on selle arvu ligikaudne väärtus kümnendmurruna?

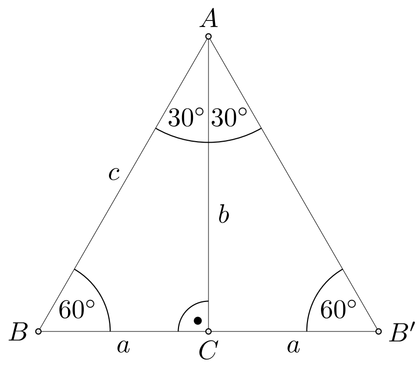
Antud nurga tangensi saame leida siinuse ja koosinuse kaudu:

$$\tan 45° = \frac{\sin 45°}{\cos 45°} = \frac{\sqrt{2}/2}{\sqrt{2}/2} = 1$$

ja analoogiliselt ka $\cot 45° = 1$. Muidugi saame võrdust $a = b$ kasutades arvutada ka otse

$$\tan 45° = \frac{a}{b} = 1\,.$$

Vaatleme nüüd täisnurkset kolmnurka teravnurkadega $\alpha = 30°$ ja $\beta = 60°$. Peegeldades teda üle pikema kaateti saame kolmnurga, mille kõik nurgad on suurusega $60°$, st tegemist on võrdkülgse kolmnurgaga.



Joonise tähistes seega

$$c = |AB| = |BB'| = |BC| + |CB'| = a + a = 2a\,.$$

Järelikult

$$\sin 30° = \cos 60° = \frac{a}{c} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2} = 0{,}5\,.$$

$\cos 30°$ väärtuse leidmiseks võime kasutada seost

$$\begin{aligned}
\sin^2 30° + \cos^2 30° &= 1\,,\\
\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cos^2 30° &= 1\,,\\
\frac{1}{4} + \cos^2 30° &= 1\,,\\
\cos^2 30° &= 1 - \frac{1}{4}\,,\\
\cos^2 30° &= \frac{3}{4}\,, \quad |\sqrt{\ }\\
\cos 30° &= \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx\\
&\approx 0{,}8660254038\,.
\end{aligned}$$

Nüüd saame leida ka

$$\begin{aligned}
\sin 60° = \cos 30° &= \frac{\sqrt{3}}{2}\,,\\
\tan 60° &= \frac{\sin 60°}{\cos 60°} = \frac{\sqrt{3}/2}{1/2} = \sqrt{3} \approx 1{,}732050808\,,\\
\tan 30° &= \frac{\sin 30°}{\cos 30°} = \frac{1/2}{\sqrt{3}/2} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \approx\\
&\approx 0{,}5773502692\,.
\end{aligned}$$

Võtame selles jaotises leitud väärtused kokku tabelis 1.1, arvestades täiendavalt, et $\cot\alpha = \tan(90° - \alpha) = \frac{1}{\tan\alpha}$.

Tabel 1.1: Trigonomeetriliste funktsioonide põhiväärtused

	sin	cos	tan	cot
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

1.3 15°, 36°

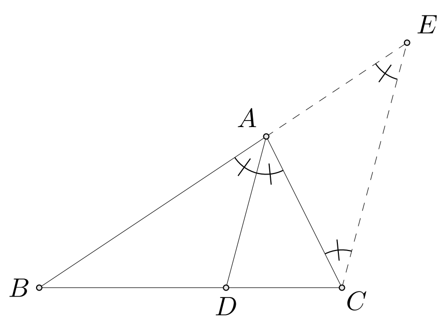
Me teame juba, kuidas leida 30° nurga siinust, koosinust ja tangensit. Seades eesmärgiks teha sama nurgaga $15^\circ = \frac{30^\circ}{2}$, tasub uurida, kuidas käituvad trigonomeetrilised funktsioonid nurga poolitamise korral. Et teravnurkade trigonomeetrilised funktsioonid on defineeritud teatud kolmnurkade küljepikkuste suhetena, on kasulik aru saada, kuidas on omavahel seotud nurgapoolitaja ja kolmnurga küljepikkuste suhted.

Selles osas mängib võtmerolli järgmine teoreem, mis ütleb, et kolmnurga nurgapoolitaja jagab vastaskülje samas suhtes, mille annavad selle nurga lähisküljed.

Teoreem 1.2 Lõigaku kolmnurga ABC nurga BAC poolitaja külge BC punktis D. Siis jagab punkt D lõigu BC suhtes $|AB| : |AC|$, st

$$\frac{|BD|}{|CD|} = \frac{|AB|}{|AC|}.$$

Tõestus. Tõmbame tipust C lõiguga AD paralleelse sirge. Lõikugu see sirge külje AB pikendusega punktis E.



Kuna AD on nurga BAD poolitaja, teame, et $\angle BAD = \angle DAC$. Konstruktsiooni järgi $EC \parallel AD$, seega $\angle BAD = \angle AEC$ ja samuti põiknurkade omadusest $\angle DAC = \angle ACE$. Järelikult on kolmnurk ACE võrdhaarne ja $|AE| = |AC|$.

Kiirteteoreemist teame, et

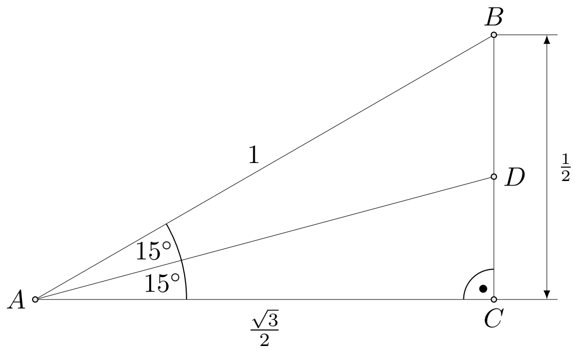
$$\frac{|BD|}{|CD|} = \frac{|AB|}{|AE|}.$$

Kuna eeltõestatu põhjal lisaks $|AE| = |AC|$, saamegi siit teoreemi väite. $\square$

Teoreemiga 1.2 varustatult vaatleme täisnurkset kolmnurka ABC teravnurgaga $30°$ tipu A juures ning selle nurga poolitajat.

Kuna trigonomeetriliste funktsioonide väärtuste leidmisel on vaadeldav kolmnurk oluline ainutl sarnasuse täpsusega, võime tema ühe küljepikkuse vabalt fikseerida. Olgu kolmnurga ABC hüpotenuus $|AB| = 1$, siis

$$|BC| = \sin\angle BAC = \sin 30° = \frac{1}{2} \quad \text{ja}$$
$$|AC| = \cos\angle BAC = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}\,.$$



Lõigaku nurga BAC poolitaja külge BC punktis D. Teoreemi 1.2 põhjal teame siis, et

$$\frac{|BD|}{|CD|} = \frac{|AB|}{|AC|} = \frac{1}{\sqrt{3}/2} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}\,,$$

millest saame

$$|BD| = \frac{2\sqrt{3}}{3}|CD|\,.$$

Teisest küljest

$$|BD| + |CD| = |BC| = \frac{1}{2}\,, \quad \text{millest omakorda} \quad |BD| = \frac{1}{2} - |CD|\,.$$

Kokkuvõttes saame $|CD|$ leidmiseks võrduse

$$\begin{aligned}
\frac{2\sqrt{3}}{3}|CD| &= \frac{1}{2} - |CD|\,,\\
\frac{2\sqrt{3}}{3}|CD| + |CD| &= \frac{1}{2}\,,\\
\left(\frac{2\sqrt{3}}{3} + 1\right)\cdot|CD| &= \frac{1}{2}\,,\\
\left(\frac{2\sqrt{3}+3}{3}\right)\cdot|CD| &= \frac{1}{2}\,,\\
|CD| &= \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2\sqrt{3}+3}\,.
\end{aligned}$$

Nüüd saame täisnurksest kolmnurgast DAC leida

$$\begin{aligned}\tan 15^\circ &= \tan\angle DAC = \frac{|CD|}{|AC|} = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2\sqrt{3}+3} : \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2\sqrt{3}+3}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}} = \\ &= \frac{3}{6+3\sqrt{3}} = \frac{1}{2+\sqrt{3}} = \frac{1\cdot(2-\sqrt{3})}{(2+\sqrt{3})\cdot(2-\sqrt{3})} = \frac{2-\sqrt{3}}{2^2-(\sqrt{3})^2} = \\ &= \frac{2-\sqrt{3}}{4-3} = 2-\sqrt{3}\,.\end{aligned}$$

Ülesanne 1.6 Leia kalkulaatori või arvuti abil $\tan 15^\circ$ ja kontrolli, et see klapib $2-\sqrt{3}$ ligikaudse väärtusega.

Kui inseneriarvutustes kasutatakse enamasti ligikaudseid väärtusi, siis matemaatikas eelistatakse täpseid juuravaldisi, sest nendega toimetamine võimaldab edasistes arvutustes vältida vea suurenemist.

Ülesanne 1.7 Leia $\sin 15^\circ$ ja $\cos 15^\circ$ täpsed väärtused ning kontrolli kalkulaatori või arvuti abil nende ligikaudsete väärtuste põhjal, et rehkendasid õigesti.

Teise võimaliku meetodiga 15° nurga trigonomeetriliste funktsioonide arvutamiseks tutvume jaotises 2.4.

Järgmiseks uurime siinses jaotises 36° nurga trigonomeetrilisi funktsioone. 36° nurk on väga huvitavate geomeetriliste omadustega ja seda suuresti tänu sellele, et ta mängib olulist rolli korrapärase viisnurga juures.

Tuletame kõigepealt meelde, et korrapärase viisnurga sisenurga suuruse saame arvutada valemiga

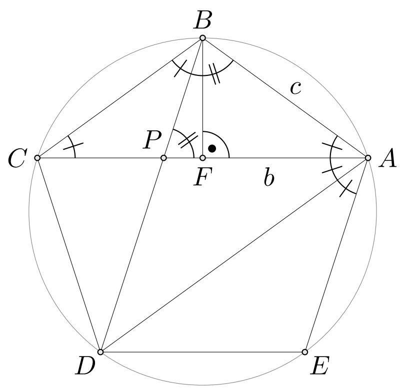
$$\frac{(5-2)\cdot 180^\circ}{5} = \frac{3\cdot 180^\circ}{5} = \frac{540^\circ}{5} = 108^\circ\,.$$

Teiseks tuletame meelde, et korrapärase hulknurga ümber saab joonestada ringjoone, kusjuures hulknurga küljed osutuvad selle ringjoone kõõludeks. Põhikoolis õppisid, et samale kõõlule toetuvad piirdenurgad on võrdsed.[1] Lihtne on mõista, et kuna nurki saab ümber ringjoone keskpunkti suvaliselt pöörata, pole tegelikult oluline, et kõõlud oleks *samad*; piisab ka sellest, kui kõõlud on *sama pikad*. Kuna korrapärase hulknurga küljed on võrdse pikkusega, saame joonise tähistes

$$\angle CAB = \angle DAC = \angle EAD = \angle DBC = \angle BCA$$

jne.

[1] Vaata ka „Võistlusmatemaatika põhivara” peatükki „Kesk- ja piirdenurk. Thalese teoreem”.



Kuna teisest küljest

$$\angle CAB + \angle DAC + \angle EAD = \angle EAB = 108^\circ\,,$$

saame

$$\angle CAB = \angle DAC = \angle EAD = \frac{108^\circ}{3} = 36^\circ\,.$$

Muuhulgas on ABC võrdhaarne kolmnurk alusnurkade suurustega 36°. Tõmbame sellele kolmnurgale kõrguse BF, siis on ABF täisnurkne kolmnurk tipunurgaga 36°. Niisiis võime 36° nurga trigonomeetriliste funktsioonide väljaselgitamiseks uurida kolmnurga ABF külgede suhteid.

Tähistame $|AF| = b$ ja $|AB| = c$. Kuna kolmnurk ABC on võrdhaarne, poolitab tema tipunurgast tõmmatud kõrgus aluse[2], seega $|AC| = 2b$.

Olgu P diagonaalide AC ja BD lõikepunkt. Uurime kolmnrurka ABP. Teame, et $\angle PAB = 36^\circ$ ja $\angle ABP = 2 \cdot 36^\circ = 72^\circ$. Järelikult

$$\angle BPA = 180^\circ - \angle PAB - \angle ABP = 180^\circ - 36^\circ - 72^\circ = 72^\circ\,,$$

Seega on kolmnurk ABP võrdhaarne tipunurgaga A, mistõttu $|AP| = |AB| = c$.

Teisest küljest on selge, et ka kolmnurk CPB on võrdhaarne alusnurkade suurusega 36°. Järelikult on kolmnurgad ABC ja CPB tunnuse NN põhjal sarnased ja nende vastavad küljed on võrdelised. Saame

$$\frac{c}{2b} = \frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|CP|}{|CB|} = \frac{|AC| - |AP|}{|CB|} = \frac{2b - c}{c}\,,$$

millest omakorda

$$\begin{aligned} c^2 &= 2b(2b - c)\,,\\ c^2 &= 4b^2 - 2bc\,,\\ 0 &= 4b^2 - 2bc - c^2\,. \end{aligned}$$

Nüüd on meil üks võrrand kahe muutujaga ja sellises olukorras pole üldiselt võimalik mõlema muutuja väärtusi täpselt määrata. Paneme aga tähele, et

[2]Vaata ka „Võistlusmatemaatika põhivara” peatükki „Kõrgus, mediaan ja nurgapoolitaja võrdhaarses kolmnurgas”.

meid ei huvitagi b ja c täpsed väärtused, vaid ainult nende väärtuste suhe. Ja selle suhte leidmine on võimalik!

Jagame saadud võrduse mõlemad pooled c^2-ga, mis annab võrrandi

$$0 = 4 \cdot \left(\frac{b}{c}\right)^2 - 2 \cdot \frac{b}{c} - 1\,.$$

Tegemist on ruutvõrrandiga suuruse $\frac{b}{c} = \cos 36°$ suhtes. Lahendame selle:

$$\frac{b}{c} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 4 \cdot (-1)}}{8} = \frac{2 \pm \sqrt{20}}{8} = \frac{2 \pm 2\sqrt{5}}{8} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{4}\,.$$

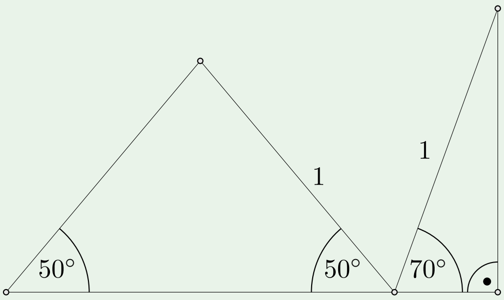
Kuna $\cos 36° > 0$, ei sobi vastuseks $\frac{1-\sqrt{5}}{4} < 0$, mistõttu $\cos 36° = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$.

Ülesanne 1.8 Leia kalkulaatori või arvuti abil $\cos 36°$ ja kontrolli, et see klapib $\frac{1+\sqrt{5}}{4}$ ligikaudse väärtusega.

Ülesanne 1.9 Leia $\sin 36°$ ja $\tan 36°$ täpsed väärtused ning kontrolli kalkulaatori või arvuti abil nende ligikaudsete väärtuste põhjal, et rehkendasid õigesti.

Ülesanne 1.10 (Lõppvoor 1995, 11. klass) Kasutades joonist tõesta, et

$$\tan 30° = \frac{\sin 70°}{2\cos 50° + \cos 70°}\,.$$



1.4 Lahendused

1.1 Nagu paljud teisedki matemaatikamõisted, pärineb ka sõna „trigonomeetria” kreeka keelest. Sõna „τρίγωνον” (trígōnon) tähendab kolmnurka (vrdl „pentagon” – viisnurk) ning sõna „μέτρον” (métron) mõõtmist. Seega on tegu õpetusega kolmnurga mõõtmisest.

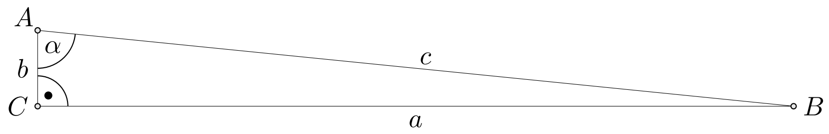
1.2 Vastus: ei.

Olgu antud mingi positiivne reaalarv t. Vaatleme täisnurkset kolmnurka küljepikkustega $a = t + 1$ ja $b = 1$. Siis

$$\tan\alpha = \frac{a}{b} = \frac{t+1}{1} = t + 1 > t\,.$$

Seega võivad tangensfunktsiooni väärtused kasvada tõkestamatult kuitahes suureks.

Kuidas käitub seejuures nurk α? Ülaltoodud konstruktsiooni puhul on ühe kaateti pikkus b fikseeritud, teine kaatet a aga kasvab. Tulemusena saame järjest rohkem „välja venitatud" kolmnurga:



Näeme, et nurk α kasvab, lähenedes järjest $90°$-le.

1.3 Kuna tangens ja kootangens on omavahel väga lähedalt seotud, saame kasutada ülesande 1.2 joonist ja lahendust. Piisab panna tähele, et

$$\cot \angle CBA = \frac{a}{b},$$

järelikult pole ka nurga kootangens ülalt tõkestatud, minnes kuitahes suureks siis, kui nurk läheneb $0°$-le.

1.4 Kuna α on teravnurk, võime järgmistes teisendustes eeldada, et $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ ja $\tan\alpha$ on positiivsed.

(a) Teisendame seost $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$:

$$\begin{aligned} \sin^2\alpha + \cos^2\alpha &= 1, \\ \cos^2\alpha &= 1 - \sin^2\alpha, \\ \cos\alpha &= \sqrt{1-\sin^2\alpha}. \end{aligned}$$

Järelikult saame ka

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}.$$

(b) Ülesande (a)-osaga analoogiliselt saame

$$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} \quad \text{ja} \quad \tan\alpha = \frac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}.$$

(c) Kuna $\tan^2\alpha = \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}$, siis

$$\tan^2\alpha + 1 = \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} + 1 = \frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha}.$$

Järelikult

$$\cos^2\alpha = \frac{1}{\tan^2\alpha + 1} \quad \text{ja} \quad \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{\tan^2\alpha + 1}}.$$

Siinuse saame avaldada näiteks seosest

$$\sin\alpha = \cos\alpha \cdot \tan\alpha = \frac{\tan\alpha}{\sqrt{\tan^2\alpha + 1}}.$$

1.5 $\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0{,}7071067812$.

1.6 $\tan 15^\circ = 2 - \sqrt{3} \approx 0{,}2679491924$.

1.7 Ülesande 1.4 tulemuse põhjal saame

$$\begin{aligned}
\cos 15^\circ &= \frac{1}{\sqrt{\tan^2 15^\circ + 1}} = \frac{1}{\sqrt{(2-\sqrt{3})^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{4 - 4\sqrt{3} + 3 + 1}} = \\
&= \frac{1}{\sqrt{8 - 4\sqrt{3}}} = \frac{1}{2\sqrt{2-\sqrt{3}}} = \frac{1 \cdot \sqrt{2+\sqrt{3}}}{2\sqrt{2-\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{3}}} = \\
&= \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2\sqrt{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2\sqrt{4-3}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} \approx \\
&\approx 0{,}9659258263
\end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned}
\sin 15^\circ &= \sqrt{1 - \cos^2 15^\circ} = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{2+\sqrt{3}}{4}} = \\
&= \sqrt{\frac{4 - (2+\sqrt{3})}{4}} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} \approx 0{,}2588190451\,.
\end{aligned}$$

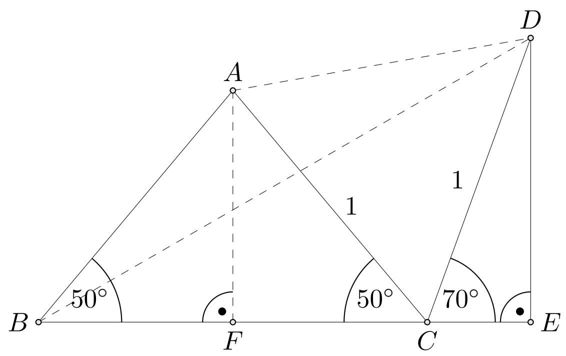
1.8 $\cos 36^\circ = \frac{1+\sqrt{5}}{4} \approx 0{,}8090169944$.

1.9 Kasutame põhiseoseid:

$$\begin{aligned}
\sin 36^\circ &= \sqrt{1 - \cos^2 36^\circ} = \sqrt{1 - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{1 + 2\sqrt{5} + 5}{16}} = \\
&= \sqrt{\frac{16 - (6 + 2\sqrt{5})}{16}} = \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4} \approx 0{,}5877852523\,; \\
\tan 36^\circ &= \frac{\sin 36^\circ}{\cos 36^\circ} = \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{1 + \sqrt{5}} \approx 0{,}7265425280\,.
\end{aligned}$$

1.10 Lahenduse ideeks on leida jooniselt täisnurkne kolmnurk teravnurga suurusega 30°.

Tähistame punktid nii nagu näidatud joonisel. Lisaks ülesandes antud punktidele olgu F võrdhaarse kolmnurga ABC tipust tõmmatud kõrguse aluspunkt, mis muuhulgas poolitab külje BC. Õiget kolmnurka aitavad leida tähelepanekud $|DE| = \sin 70^\circ$, $|CE| = \cos 70^\circ$ ja $BC = 2|FC| = 2\cos 50^\circ$.



Kuna $|AC| = |CD| = 1$ ning $\angle ACD = 180° - 50° - 70° = 60°$, on ACD võrdkülgne kolmnurk küljepikkusega 1; järelikult $|AD| = 1$. Teisest küljest, kuna $\angle ABC = \angle BCA$, on kolmnurk ABC võrdhaarne, mistõttu ka $|AB| = |AC| = 1$.

Kokkuvõttes on ka kolmnurk ABD võrdhaarne tipunurgaga $\angle DAB = \angle DAC + \angle CAB = 60° + 80° = 140°$ ja alusnurgaga $\angle ABD = \frac{180° - 140°}{2} = 20°$. Järelikult $\angle DBE = \angle ABC - \angle ABD = 50° - 20° = 30°$ ja DBE sobibki otsitavaks täisnurkseks kolmnurgaks.

Nüüd saame

$$\tan 30° = \tan \angle DBE = \frac{|DE|}{|BE|} = \frac{|DE|}{|BC| + |CE|} = \frac{\sin 70°}{2\cos 50° + \cos 70°},$$

nagu ülesandes nõutud.

PEATÜKK 2

Suvalise nurga trigonomeetrilised funktsioonid

2.1 Nurkade mõõtmise ajaloost

Vajadust nurkade mõõtmise järele tunnetasid juba vanad rahvad. Selleks, et ennustada planeetide liikumist taevavõlvil, vajasid Babüloonia astronoomid kahte asja – viisi aja märkimiseks (st kalendrit ja kella) ning viisi taevakehade asukoha määramiseks nende nähtaval kaarjal teekonnal (st nurgamõõtu).

Astronoomilise ajaarvamise aluseks sai juba 3. aastatuhandel (e.m.a.) kasutusel olnud administratiivne kalender, mis jagas aasta 12 kuutsükliks ning paigutas igasse tsüklisse 30 päeva. Babüloonlased teadsid hästi, et aastas on rohkem kui $12 \cdot 30 = 360$ päeva, nii et kalendri pidamiseks niisugune jaotus eriti ei sobinud, küll aga sai seda kasutada aja ja nurkade jaoks.

Nii võime Gilgameši eeposest lugeda, et ajavahemik päikeseloojangust päikeseloojanguni oli jagatud 12-ks võrdseks osaks, mida nimetati *beru*-ks, ning iga *beru* oli omakorda jagatud 30-ks *uš*-iks. Tänases mõistes väljendas iga *uš* seega 4 minuti pikkust ajavahemikku.

Sama moodi otsustasid babüloonlased taevakehade teekonna jagada 12-ks osaks, mida nimetati tähtkujude järgi (ning sellest jaotusest on meie päevini jõudnud astroloogiline kalender). Igaüks neist jaotati omakorda 30-ks väiksemaks osaks, mida hakati samuti *uš*-iks nimetama, ning vajadusel jagati *uš* omakorda 60-ks tükiks (sest Babüloonias oli ka üleüldiseks arvutamiseks kasutusel kuuekümnendsüsteem).

Meieni jõudis babüloonlaste süsteem Vana-Kreeka kaudu, kus selle võttis üle astronoom ja geomeeter Hipparchos 2. sajandil e.m.a. On huvitav märkida, et tänapäevase geomeetria isa Eukleides (kes elas ca 300. aastal e.m.a.) ei kasutanud oma peateoses „Elemendid” veel üldist nurgamõõtu; talle piisas eraldi tähisest vaid täisnurga jaoks.

Kümnendsüsteemi võidukäigu ajastul võib ju küsida, kas täisnurka poleks mõistlikum 90 võrdse osa asemel näiteks 100-ks jagada? Ja tõepoolest, sellist süsteemi prooviti Prantsusmaal pärast Suurt Prantsuse revolutsiooni ka sisse viia. $\frac{1}{100}$ täisnurgast (ehk $\frac{1}{400}$ täispöördest) sai nimeks *gradiaan* ehk *gon* ning tähiseks ^{g}. See süsteem ei kogunud aga suurt populaarsust, sest mitmete põhinurkade tähistamine on tema puhul tülikam kui babüloonlaste süsteemis. Nii näiteks tuleks võrdkülgse kolmnurga nurga (mis moodustab kuuendiku täispöördest) kohta 60° asemel kirjutada $66\frac{2}{3}^g$.

2.1.1 Projektülesanne: mitmeks osaks jagada täispööret?

Selle ülesande mõte on uurida, kas 360 või 400 asemel oleks kasulik täispööret jagada mõneks teiseks arvuks osadeks.

Võime öelda, et täispöörde jaotamine n kraadiks on praktikas seda kasulikum, mida rohkemate täisarvude m korral on $\frac{n}{m}$ samuti täisarv (st täispoorde jaotamisel m võrdseks osaks on saadav nurk $\frac{n}{m}$ avaldatav täisarvus kraadides).

Nii näiteks saame $n = 400$ korral täisarvus gradiaanides väljendada nurgad suurustega

$$\frac{400}{1}, \frac{400}{2}, \frac{400}{4}, \frac{400}{5}, \frac{400}{8}, \frac{400}{10}, \frac{400}{16}, \frac{400}{20}, \frac{400}{25}, \frac{400}{40}, \frac{400}{50}, \frac{400}{80}, \frac{400}{100}, \frac{400}{200}, \frac{400}{400},$$

kokku 15 erineva jaotuse korral.

Lihtne on mõista, et $\frac{n}{m}$ on täisarv parajasti siis, kui arv m on arvu n tegur. Niisiis otsime selliseid arve n, millel oleks võimalikult palju tegureid.

Ülesanne 2.1 Näita, et iga positiivse täisarvu k korral leidub positiivne täisarv n, millel on k positiivset tegurit.

Ülesande 2.1 konstruktsioon annab meile küll kuitahes paljude teguritega täisarve, kuid need täisarvud ise lähevad väga kiiresti väga suurteks ja see pole jälle eriti praktiline. Niisiis otsime n rolli pigem arve, mis ise on tõkestatud mingi mõistliku suurusega, aga omavad sellegipoolest suhteliselt palju tegureid.

Ülesanne 2.2 Kirjuta programm, mis vaatab läbi arvud $n = 1,2,\ldots,600$ ning leiab igaühe jaoks tema positiivsete jagajate arvu. Milliste läbi vaadatud arvude n jaoks on jagajate arv suurim võimalik? Milline on neist arvudest vähim?

Ülesanne 2.3 Milline on vähim arv, millel on rohkem jagajaid kui ülesandes 2.2 läbi vaadatud arvudel?

Täisarvu n jagajate arvu leidmiseks on olemas ka eraldi valem, mis eeldab aga arvu n tegurduse teadmist. Selle valemi leiab huvitatud lugeja „Võistlusmatemaatika põhivara” peatükist „Aritmeetika põhiteoreem. Jagajad”.

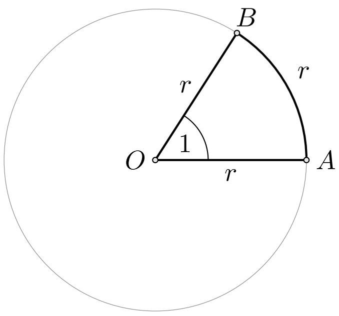
2.2 Nurga radiaanmõõt

Nurga jagamine 400-ks osaks ei saanud küll kunagi nii populaarseks kui 360° täispööre, aga on olemas veel üks nurgamõõt, mis inseneriteadustes palju kasutamist leiab. See mõõt kasutab ära ringjoone enda geomeetrilisi omadusi.

Nimelt teame juba põhikoolist, et nurga suuruse määrab üheselt ära selle kaare pikkus, millele vaadeldav nurk toetub. Muuhulgas võime kaarepikkuseks võtta ringjoone raadiuse. Vastavat nurgamõõtu nimetatakse *radiaaniks*.

Radiaanmõõdus nurkadele kirjutatakse mõõduühikuks rad või jäetakse ühik üldse kirjutamata.

Joonisel on kujutatud kaar AB, mille pikkus võrdub ringjoone raadiusega; vastava nurga BOA suurus on siis järelikult $1(\mathrm{rad})$.



Loomulikult on nurga kraad- ja radiaanmõõt omavahel tihedalt seotud. Radiaani definitsioonist saame otse, et

nurk suurusega a radiaani toetub kaarele pikkusega ar, kus r on ringjoone raadius.

Täispöördele vastab seega nurk $a(\mathrm{rad})$, kus ar on ringjoone pikkus. Kuna ringjoone pikkus avaldub raadiuse kaudu kujul $2\pi r$, siis on täispöörde radiaanmõõduks $a = 2\pi$. Et kraadmõõdus on täispöörde suurus $360°$, saamegi kokkuvõttes järgmise seose:

$$2\pi(\mathrm{rad}) = 360°\,.$$

See seos võimaldab meil teisendada nurkade suurusi kraad- ja radiaanmõõdu vahel, näiteks

$$\begin{aligned}
180° &= \frac{360°}{2} = \frac{2\pi}{2} = \pi(\mathrm{rad})\,,\\
90° &= \frac{360°}{4} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}(\mathrm{rad})\,,\\
60° &= \frac{360°}{6} = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}(\mathrm{rad})\,,\\
45° &= \frac{360°}{8} = \frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4}(\mathrm{rad}) \quad \text{jne.}
\end{aligned}$$

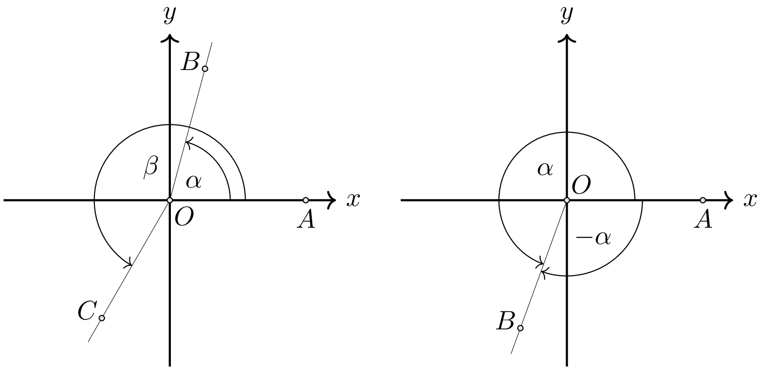
Ülesanne 2.4 Kirjuta Pythonis funktsioon, mis saab sisendiks nurga suuruse kraadmõõdus ja väljastab vastava väärtuse radiaanides.

Ülesanne 2.5 Kirjuta Pythonis funktsioon, mis saab sisendiks nurga suuruse radiaanmõõdus ning väljastab vastava väärtuse kraadides, nurgaminutites ja -sekundites,

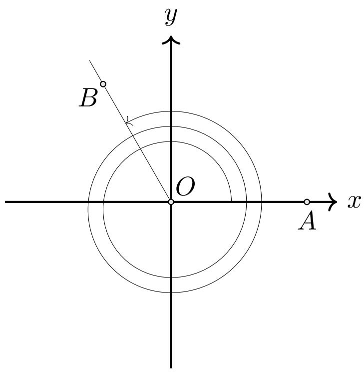
Ülesanne 2.6 Mitu kraadi, minutit ja sekundit on üks radiaan?

2.3 Suvalise nurga trigonomeetrilised funktsioonid

Iga nurgaga saame siduda teatud koordinaatsüsteemi, kus koordinaatide alguspunkt on paigutatud nurga tippu ning x-telje positiivne suund on määratud ühega nurga haaradest. Nurga suurust saame siis mõõta positiivses suunas (st vastupäeva) x-teljest teise haarani. Päripäeva (st negatiivses suunas) mõõtes saame nurga vastandväärtuse.



$360°$ täitumisel hakkame uue ringiga peale. Niimoodi võime nurga teise haarani jõuda mitu korda: esimesel ringil, teisel ringil jne. Seejuures on nurgamõõt iga kord $360°$ (ehk 2π) võrra suurem. See tähendab, et nurgad, mille suurused erinevad täisarvu täispöörete võrra, võime võrdseteks lugeda. Nii näiteks $\frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{2}$, $840° = 120° + 2 \cdot 360° = 120°$ jne. (Vaata ka ülesannet 1.2 kursuses „Võrrandid ja võrrandisüsteemid”.)



Niimoodi nurkade mõõtmisest mõtlemine võimaldab meil üldistada trigonomeetriliste funktsioonide definitsioonid täisnurkadelt suvalistele nurkadele.

Vaatleme nurka AOB, kus O on koordinaattelgede alguspunkt, A asub x-telje positiivses osas ning B on tasandi suvaline punkt (mis ei lange kokku punktiga O). Olgu punkti B koordinaadid $(x_B; y_B)$ ning lõigu OB pikkus r.

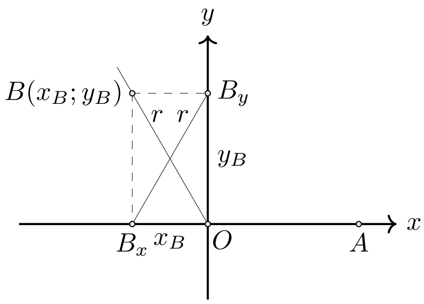
Leiame $|OB| = r$ punkti B koordinaatide kaudu. Selleks vaatleme punkti B ristprojektsioone x- ja y-teljele; olgu need vastavalt $B_x(x_B; 0)$ ja $B_y(0; y_B)$.

Paneme tähele, et BB_xOB_y on ristkülik, mistõttu $|OB| = |B_xB_y|$. Pythagorase teoreemist täisnurkses kolmnurgas OB_xB_y teame aga, et

$$|B_xB_y|^2 = |OB_x|^2 + |OB_y|^2 = x_B^2 + y_B^2 ,$$

niisiis

$$|OB| = r = \sqrt{x_B^2 + y_B^2} .$$

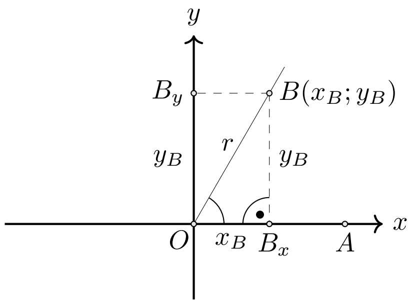


Seejuures vaatleme projektsioone x_B ja y_B kui märgiga suurusi; st joonisel näiteks $y_B > 0$, kuid $x_B < 0$.

Kui punkt B langeb koordinaattasandi esimesse veerandisse (st $x_B, y_B > 0$), on AOB tearvnurk ning me saame tema trigonomeetrilised funktsioonid defineerida projektsioonide abil tuttaval moel, kasutades kolmnurga BOB_x täisnurksust:

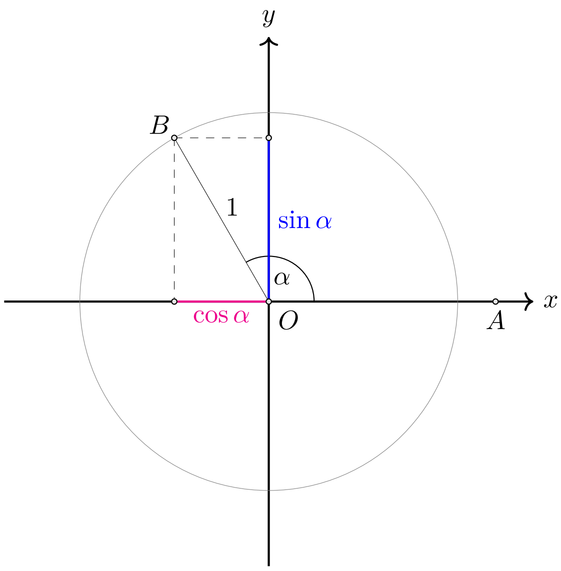
$$\sin\angle AOB = \frac{y_B}{r} , \quad \cos\angle AOB = \frac{x_B}{r} , \tag{2.1}$$

$$\tan\angle AOB = \frac{y_B}{x_B} , \quad \cot\angle AOB = \frac{x_B}{y_B} . \tag{2.2}$$



Samade valemite abil (käsitledes projektsioone märgiga suurustena) defineerime trigonomeetriliste funktsioonide väärtused suvaliste nurkade korral.

Me teame juba, et lõikude pikkuste suhted on määratud sarnasuse täpsusega. See tähendab, et me võime joonist skaleerida nii, et $r = 1$, st nii, et punkt B satub koordinaattasandi ühikringjoonele. Teisest küljest võime vaadeldavast olukorrast mõelda nii, et nurga AOB jaoks määramegi punkti B vastava haara ja ühikringjoone lõikepunktina – nurk ise sellest ju ei muutu.



Valemid (2.1) võtavad siis lihtsalt kuju

$$\sin\alpha = y_B\,, \quad \cos\alpha = x_B\,,$$

kus y_B ja x_B on nurga $\alpha = \angle AOB$ haara OB (kus $|OB| = 1$) märgiga projektsioonid vastavalt y- ja x-teljele.

Tangensi ja kootangensi valemid (2.2) ei muutu. Sama moodi jäävad suvalise nurga α korral kehtima võrdused

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \quad \text{ja} \quad \cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\,.$$

Küll aga tuleb tähele panna, et teatud nurkade korral pole tangens või kootangens määratud. Valemi (2.2) põhjal pole $\tan\angle AOB = \frac{y_B}{x_B}$ määratud siis, kui $x_B = 0$, st kui nurga AOB lõpphaar OB asub y-teljel. See on omakorda nii parajasti siis kui $\angle AOB = 90°, 270°, 450°$ jne ehk üldjuhul siis kui $\angle AOB = 90° + k \cdot 180°$ $(k \in \mathbb{Z})$.

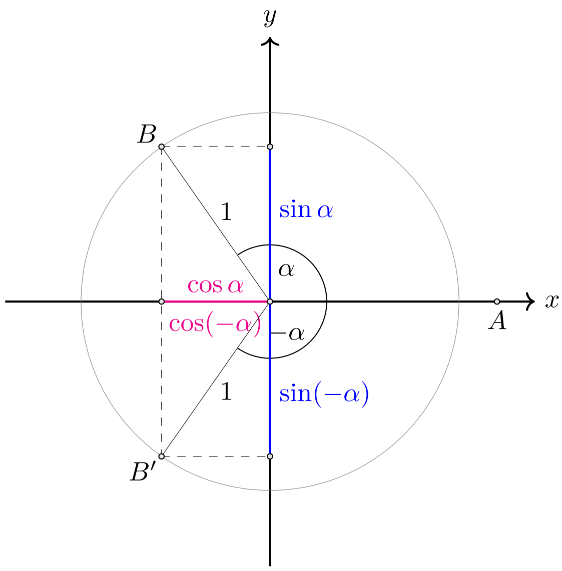
Ülesanne 2.7 Milliste nurkade AOB puhul on määrmata $\cot\angle AOB$?

Jaotises 1.1 nägime, et suvalise teravnurga α korral kehtib võrdus

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1\,.$$

Ülesanne 2.8 Tõesta see võrdus suvalise nurga α jaoks.

Vaadeldes lisaks nurgale α ka tema vastandnurka $-\alpha$ näeme, et vastandnurga lõpphaar on peegeldatud x-telje suhtes. See tähendab, et lõpphaara lõigu OB projektsioon x-teljele ei muutu, aga projektsioon y-teljele saab vastandmärgi.



Niisiis saame otse definitsioonist iga nurga α jaoks seosed

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha\,, \quad \cos(-\alpha) = \cos\alpha\,.$$

Vastandnurga tangensi valemi saame nendest seostest tuletada:

$$\tan(-\alpha) = \frac{\sin(-\alpha)}{\cos(-\alpha)} = \frac{-\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\tan\alpha\,.$$

Analoogiline tuletuskäik kehtib ka kootangensi korral, seega saame kõigi nurkade α jaoks, mille puhul tangens või kootangens on määratud, seosed

$$\tan(-\alpha) = -\tan\alpha\,, \quad \cot(-\alpha) = -\cot\alpha\,.$$

Teravnurkade korral nägime, et kui $\alpha + \beta = 90^\circ = \frac{\pi}{2}$, siis $\sin\alpha = \cos\beta$. Osutub, et ka see reegel kehtib üldisemalt kui ainult teravnurkade jaoks. Selles veendumiseks uurime, mida õigupoolest tähendab suvaliste nurkade puhul tingimus $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$ ehk $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$ (ehk $\beta = 90^\circ - \alpha$).

Ülesanne 2.9 Uuri nurkade α ja $90^\circ - \alpha$ vahelist seost dünaamilise geomeetria programmi abil.

(a) Joonista kaks sirget, mis ristuvad punktis O. Nendest saavad koordinaatteljed.

(b) Vali x-teljel punkt A ning joonesta ringjoon keskpunktiga O läbi punkti A.

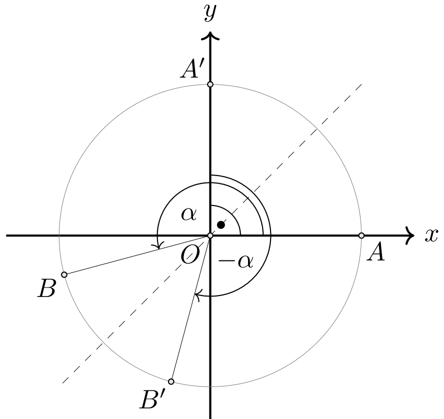
(c) Vali sellel ringjoonel punkt B ning tähista $\angle AOB = \alpha$.

(d) Joonesta kiir, mis on kiire OA suhtes nurga $90^\circ - \alpha$ all. Olgu B' selle kiire lõikepunkt ringjoonega.

Mida paned tähele, kui liigutad punkti B mööda ringjoont? Kuidas liigub punkt B'?

Ülesandes 2.9 tehtud tähelepanekut ei saa käsitleda range tõestusena. Dünaamilise geomeetria abil saame püstitada hüpoteesi, kuid hüpoteesi tuleb arutluse teel ka põhjendada.

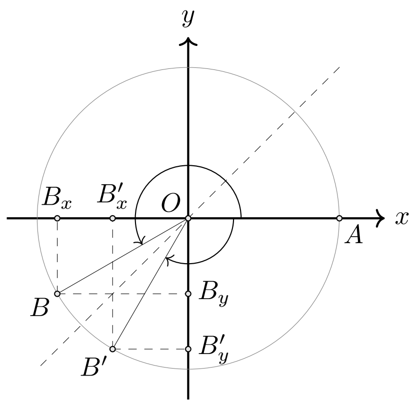
Teeme joonise.



Nurga AOB lõpphaara OB saame, kui liigume haarast OA nurga α võrra vastupäeva. Nurga AOB' lõpphaara OB' saame aga, kui liigume haarast OA kõigepealt täisnurga võrra vastupäeva kiireni OA' ning seejärel nurga α võrra päripäeva.

Paneme tähele, et kiired OA ja OA' on sümmeetrilised koordinaattelgede vahelise täisnurga poolitaja suhtes. See tähendab, et ka nurkade AOB ja $A'OB'$ lõpphaarad on selle nurgapoolitaja suhtes sümmeetrilised, sest tegemist on sama suurte, aga vastassuunaliste nurkadega.

Mida tähendab see sümmeetria nurkade AOB ja AOB' trigonomeetriliste funktsioonide jaoks? Tuletame meelde, et nurga siinus ja koosinus on defineeritud lõpphaara projektsioonidena vastavalt y- ja x-teljele. Tänu sümmeetriale võrdub lõigu OB (märgiga!) projektsioon y-teljel OB_y lõigu OB' projektsiooniga x-teljel OB'_x. Sama moodi võrdub lõigu OB märgiga projektsioon x-teljel OB_x lõigu OB' projektsiooniga y-teljel OB'_y.



Kuna $|OB_y| = \sin\alpha$, $|OB'_x| = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$, $|OB_x| = \cos\alpha$ ning $|OB'_y| = \sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$ (kus lõikude pikkuseid vaatleme märkidega), saame suvalise nurga α jaoks võrdused

$$\sin\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) \quad \text{ja} \quad \cos\alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right).$$

Ülesanne 2.10 Millised valemid saab tuletada $\tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$ ja $\cot\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$ jaoks?

Ülesanne 2.11 Leia järgmiste nurkade trigonomeetriliste funktsioonide väärtused ja täida tabel:

	$\sin$	$\cos$	$\tan$	$\cot$
$0°$				
$90° = \dfrac{\pi}{2}$				
$180° = \pi$				

Ülesanne 2.12 Tõesta, et nurgad α ja β rahuldavad võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} \sin\alpha = \sin\beta \\ \cos\alpha = \cos\beta \end{cases}$$

parajasti siis, kui $\alpha = \beta$.

2.4 Kahe nurga summa ja vahe trigonomeetriliste funktsioonide arvutamine

Praktikas on nurgad sageli esitatud teiste nurkade summa või vahena. See toob endaga kaasa vajaduse leida avaldiste $\sin(\alpha+\beta)$, $\cos(\alpha-\beta)$ jne väärtusi. Äkki avalduvad nad kuidagi lihtsalt?

Ülesanne 2.13 Kas võib väita, et suvaliste nurkade α ja β korral kehtivad võrdused

(a) $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha + \sin\beta$?

(b) $\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha - \cos\beta$?

Siinses jaotises tuletame täpsed valemid avaldiste $\sin(\alpha\pm\beta)$ ja $\cos(\alpha\pm\beta)$ jaoks. Selleks läheb meil vaja järgmist olulist tulemust.

Teoreem 2.1 Olgu koordinaattasandil antud punktid $P(x_P; y_P)$ ja $Q(x_Q; y_Q)$. Lõigu PQ pikkuse kohta kehtib siis seos

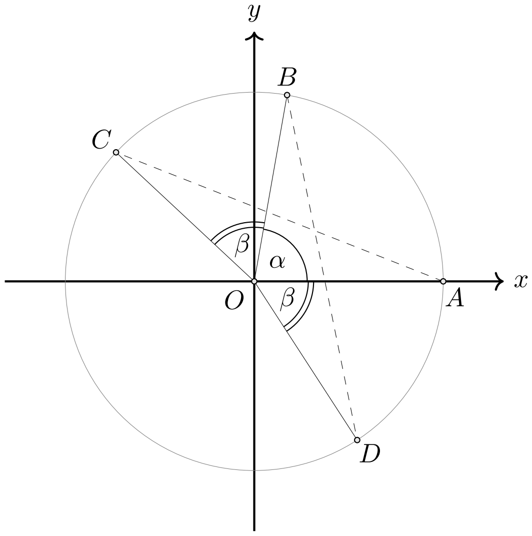
$$|PQ|^2 = (x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2$$

ehk

$$|PQ| = \sqrt{(x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2}\,.$$

Tõestus. □

Olgu nüüd antud suvalised nurgad α ja β ning vaatleme järgmist joonist.



Kui joonise ringjoone raadius on 1, saame punktidele järgmised koordinaadid:

$$A(1;0)\,,\quad B(\cos\alpha;\sin\alpha)\,,\quad C(\cos(\alpha+\beta);\sin(\alpha+\beta))\,,\quad D(\cos\beta;-\sin\beta)\,.$$

Kuna kõõlud AC ja BD vastavad mõlemad kesknurgale suurusega $\alpha+\beta$, on nad pikkuselt võrdsed. Avaldame nende kõõlude pikkuste ruudud teoreemi 2.1 abil:

$$\begin{aligned}|AC|^2 &= (1-\cos(\alpha+\beta))^2 + (0-\sin(\alpha+\beta))^2\,,\\ |BD|^2 &= (\cos\alpha-\cos\beta)^2 + (\sin\alpha-(-\sin\beta))^2\,.\end{aligned}$$

Et $|AC| = |BD|$, peab kehtima ka võrdus $|AC|^2 = |BD|^2$, kust saame

$$\begin{aligned}(1-\cos(\alpha+\beta))^2 + (\sin(\alpha+\beta))^2 &= (\cos\alpha-\cos\beta)^2 + (\sin\alpha+\sin\beta)^2\,,\\ 1 - 2\cos(\alpha+\beta) + \cos^2(\alpha+\beta) + \sin^2(\alpha+\beta) &=\\ = \cos^2\alpha - 2\cos\alpha\cos\beta + \cos^2\beta + \sin^2\alpha &+ 2\sin\alpha\sin\beta + \sin^2\beta\,,\\ 2 - 2\cos(\alpha+\beta) &= 2 - 2\cos\alpha\cos\beta + 2\sin\alpha\sin\beta\,,\\ 2\cos(\alpha+\beta) &= 2\cos\alpha\cos\beta - 2\sin\alpha\sin\beta\,,\\ \cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta\,.\end{aligned}$$

Nurkade vahe koosinuse valemi saame leida võrduse $\alpha-\beta = \alpha+(-\beta)$ abil, arvestades vastandnurga siinuse ja koosinuse reegleid:

$$\begin{aligned}\cos(\alpha-\beta) &= \cos(\alpha+(-\beta)) = \cos\alpha\cos(-\beta) - \sin\alpha\sin(-\beta) =\\ &= \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta\,.\end{aligned}$$

Nurkade summa ja vahe siinuse arvutamiseks saame kasutada jaotises 2.3 tuletatud seoseid, mis võimaldavad nurga siinuse avaldada täiendusnurga koosinuse kaudu:

$$\begin{aligned}\sin(\alpha+\beta) &= \cos\left(\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)\right) = \cos\left(\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\beta\right) = \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\beta + \sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin\beta = \\ &= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta\,.\end{aligned}$$

Analoogiliselt saame:

$$\begin{aligned}\sin(\alpha-\beta) &= \cos\left(\frac{\pi}{2}-(\alpha-\beta)\right) = \cos\left(\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+\beta\right) = \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\beta - \sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin\beta = \\ &= \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta\,.\end{aligned}$$

Võtame kõik tuletatud valemid kokku:

$$\begin{aligned}\sin(\alpha\pm\beta) &= \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta\,, \\ \cos(\alpha\pm\beta) &= \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta\,.\end{aligned}$$

Need valemid on kasulik pähe õppida. Siinuse puhul on võrdusmärgi paremal pool erinevate funktsioonide korrutised, kusjuures nende korrutiste vaheline märk ei muutu, koosinuse puhul aga samade funktsioonide korrutised ja korrutiste vaheline märk muutub.

Ülesanne 2.14 Tuleta valem $\tan(\alpha\pm\beta)$ arvutamiseks $\tan\alpha$ ja $\tan\beta$ kaudu ning $\cot(\alpha\pm\beta)$ arvutamiseks $\cot\alpha$ ja $\cot\beta$ kaudu.

Erijuhul $\alpha=\beta$ saame nurkade summa siinuse ja koosinuse valemitest topeltnurga valemid:

$$\begin{aligned}\sin 2\alpha &= \sin(\alpha+\alpha) = \sin\alpha\cos\alpha + \cos\alpha\sin\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha\,, \\ \cos 2\alpha &= \cos\alpha\cos\alpha - \sin\alpha\sin\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha\,.\end{aligned}$$

Ka neid valemeid on kasulik peast teada:

$$\begin{aligned}\sin 2\alpha &= 2\sin\alpha\cos\alpha\,, \\ \cos 2\alpha &= \cos^2\alpha - \sin^2\alpha\,.\end{aligned}$$

Ülesanne 2.15 Tuleta topeltnurga tangensi ja kootangensi valemid.

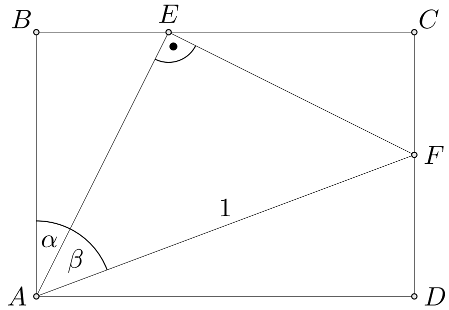
Ülesanne 2.16 Tuleta valemid $\sin\frac{\alpha}{2}$ ja $\cos\frac{\alpha}{2}$ arvutamiseks $\sin\alpha$ ja $\cos\alpha$ kaudu.

Ülesanne 2.17 Leia $\sin 18°$ ja $\cos 18°$ täpne väärtus.

Ülesanne 2.18 (Balti Tee 1991) Leia $\sin 3°$ täpne väärtus.

2.4.1 Projektülesanne: $\sin(\alpha+\beta)$, $\cos(\alpha+\beta)$

Olgu antud teravnurgad α ja β nii, et $\alpha+\beta<\frac{\pi}{2}$. Vaatleme ristkülikut $ABCD$ ning tema külgedel BC ja CD vastavalt punkte E ja F nii, et $\angle EAB=\alpha$, $\angle FAE=\beta$, $\angle AEF=\frac{\pi}{2}$ ning $|AF|=1$.



Ülesanne 2.19 Tõesta, et kirjeldatud omadustega ristkülik $ABCD$ ja täisnurkne kolmnurk AEF leiduvad alati, kui α ja β on teravnurgad nii, et $\alpha+\beta<\frac{\pi}{2}$.

Ülesanne 2.20 Leia joonisel tähistamata teravnurkade AEB, CEF, EFC, AFE, FAD ja DFA suurused.

Ülesanne 2.21 Leia täisnurksete kolmnurkade ADF ja AFE kaatetite pikkused.

Ülesanne 2.22 Leia täisnurksete kolmnurkade AEB ja EFC kaatetite pikkused.

Ülesanne 2.23 Paneme tähele, et $|AD|=|BE|+|EC|$ ning $|AB|=|CF|+|FD|$. Millised seosed saad siit järeldada?

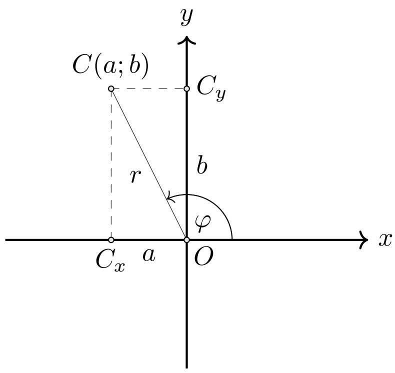
2.5 Polaarkoordinaadid. Kompleksarvu trigonomeetriline kuju

Kursuse „Arvuhulgad ja avaldised” jaotises 1.6 nägime, et igale kompleksarvule kujul $a+bi$ saab vastavusse seada tasandi punkti koordinaatidega $(a;b)$.

Ristkoordinaadid pole aga ainus võimalus tasandi punkti asukohta määrata. Väga sageli kasutatakse ka polaarkoordinaate. Kui ristkoordinaatide jaoks tuleb tasandil aluseks võtta kaks ristuvat sirget, siis polaarkoordinaatide puhul piisab ühest suunatud sirgest (nn *polaarteljest*) ning sellel määratud punktist (nn *poolusest*).

Definitsioon 2.1. *Tasandi punkti C* polaarkoordinaatideks *nimetame paari $(r:\varphi)$, kus $r=|OC|$ ning φ on nurk polaartelje positiivse suuna ja kiire OC vahel.*

Kuna meid huvitab muuhulgas nende kahe koordinaatsüsteemi omavaheline seos, valime siinkohal polaarteljeks x-telje ning pooluseks koordinaattelgede alguspunkti O.



Siinuse ja koosinuse definitsioonist (vt seosed (2.1)) teame, et

$$\sin\varphi = \frac{b}{r} \quad \text{ja} \quad \cos\varphi = \frac{a}{r},$$

seega

$$a = r\cos\varphi \quad \text{ja} \quad b = r\sin\varphi.$$

Lisaks saame Pythagorase teoreemist kolmnurgas OCC_x, et

$$r^2 = a^2 + b^2 \quad \text{ehk} \quad r = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Niisiis võime punktile C vastava kompleksarvu kirjutada kujul

$$a + bi = r\cos\varphi + ri\sin\varphi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Seda kuju nimetataksegi *kompleksarvu trigonomeetriliseks kujuks*. Nurka φ nimetatakse selle kompleksarvu *argumendiks* ning lõigupikkust r tema *mooduliks*. Kompleksarvu mooduli mõistega tutvusime juba kursuses „Arvuhulgad ja avaldised”, vt sealne definitsioon 1.13.

Trigonomeetrilise kuju abil saame esitada ilusa geomeetrilise tõlgenduse kompleksarvude korrutamisele. Olgu meil antud kompleksarvud z_1 ja z_2 trigonomeetrilisel kujul

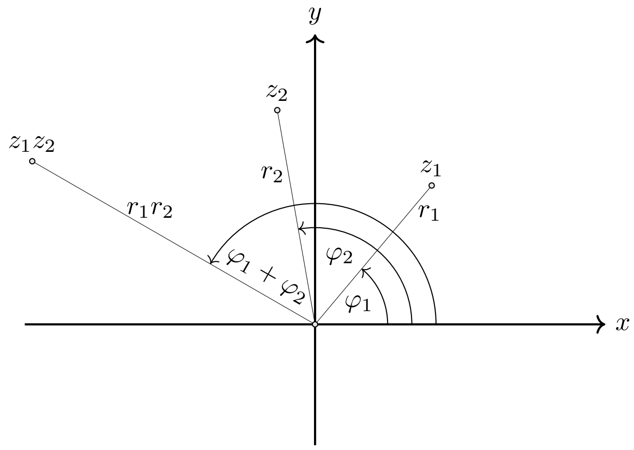
$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) \quad \text{ja} \quad z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2).$$

Nende korrutist saame siis teisendada, kasutades nurkade summa siinuse ja koosinuse valemeid:

$$\begin{aligned}
z_1 z_2 &= r_1 r_2(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = \\
&= r_1 r_2(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + i\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + i\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + i^2\sin\varphi_1\sin\varphi_2) = \\
&= r_1 r_2(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2 + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\varphi_1\sin\varphi_2)) = \\
&= r_1 r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)).
\end{aligned}$$

Paneme tähele, et viimane avaldis on jälle ühe kompleksarvu trigonomeetriline kuju! Seega oleme tõestanud järgmise reegli.

Kahe kompleksarvu korrutis on kompleksarv, mille moodul võrdub algsete arvude moodulite korrutisega ning mille argument võrdub algsete arvude argumentide summaga.



Ülesanne 2.24 Tõesta, et iga naturaalarvu $n \geqslant 1$ jaoks kehtib võrdus

$$(r(\cos\varphi + i\sin\varphi))^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)\,.$$

Ülesande 2.24 väite huvitava erijuhu saame, kui vaatleme kompleksarve mooduliga $r = 1$, st niisuguseid kompleksarve, millele vastavad punktid asuvad koordinaattasandi ühikringjoonel. Järelikult peavad ka kõik nende naturaalarvulistele astmetele vastavad punktid asuma ühikringjoonel, sest $r^n = 1$ suvalise naturaalarvu jaoks.

Kehtib ka vastupidine väide: mooduliga 1 kompleksarvu n. juur (kus $n \geqslant 1$) saab olla ainult kompleksarv mooduliga 1. Tõepoolest, kui juure enda moodul oleks $r < 1$, siis ka tema n. astme (ehk algse arvu) korral $r^n < 1$, ning kui $r > 1$, siis ka $r^n > 1$.

See tähelepanek võimaldab meil leida (kompleks)arvude kompleksarvulisi juuri.

Ülesanne 2.25 Leia arvu 1 kõik kompleksarvulised kuupjuured, st kõik arvud $z \in \mathbb{C}$, mille korral

$$z^3 = 1\,.$$

Lahendus. Otsime juuri trigonomeetrilisel kujul $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Selleks esitame samal kujul ka juuritava arvu $1 = 1 + 0i$. Kuna 1 asub komplekstasandil x-teljel, on tema argumendiks 0. Tema mooduliks (ehk kauguseks nullpunktist) on ilmselt 1; seega saame esituse $1 = 1 \cdot (\cos 0 + i\sin 0)$.

Nüüd tuleb lahendada võrrand

$$r^3(\cos 3\varphi + i\sin 3\varphi) = 1 \cdot (\cos 0 + i\sin 0)\,.$$

Eespool nägime, et mooduliga 1 kompleksarvude juured saavad olla samuti ainult mooduliga 1, st $r = 1$ ning lahendatav võrrand lihtsustub kujule

$$3\varphi = 0\,.$$

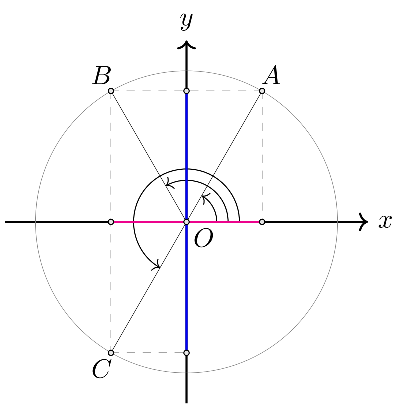
Kas sellel võrrandil saab olla veel lahendeid peale $\varphi = 0$? Jah, saab! Paneme tähele, et tegemist on nurkadega, mistõttu täispöörde kordsed samastatakse 0-nurgaga. See tähendab, et lahendeid tuleb otsida arvvõrrandite

$$3\varphi = 0\,, \quad 3\varphi = 2\pi\,, \quad 3\varphi = 4\pi\,, \quad 3\varphi = 6\pi\,, \quad 3\varphi = 8\pi\,, \ldots$$

lahendite seast. Esimese kolme võrrandi lahendid on vastavalt $\varphi = 0$, $\varphi = \frac{2\pi}{3} = 120^\circ$ ja $\varphi = \frac{4\pi}{3} = 240^\circ$. Neljanda võrrandi lahendiks on $\varphi = \frac{6\pi}{3} = 2\pi = 0$, viienda võrrandi lahendiks $\varphi = \frac{8\pi}{3} = 2\pi + \frac{2\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$ jne; st järgmised võrrandid enam täiendavaid lahendeid ei anna. Kokkuvõttes on uuritava võrrandi lahenditeks

$$z = 1\,, \quad z = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} \quad \text{ja} \quad z = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\,.$$

Võime leida ka nurkade $\frac{2\pi}{3}$ ja $\frac{4\pi}{3}$ täpsed siinused ja koosinused. Selleks on mitu võimalust. Näiteks saame ära kasutada nurga $\frac{\pi}{3} = 60^\circ$ siinuse ja koosinuse väärtusi. Teeme joonise, kus punktid A, B ja C asuvad ühikringjoonel ning OA, OB ja OC on vastavalt $\frac{\pi}{3} = 60^\circ$, $\frac{2\pi}{3} = 120^\circ$ ja $\frac{4\pi}{3} = 240^\circ$ nurkade lõpphaarad.



Paneme tähele, et punktid A ja B on sümmeetrilised y-telje suhtes (miks?), punktid B ja C on sümmeetrilised x-telje suhtes (miks?) ning punktid A ja C on tsentraalsümmeetrilised punkti O suhtes (miks?). See tähendab, et ka vastavad projektsioonid on pikkuselt võrdsed (ja osadel juhtudel erimärgilised). Niisiis saame

$$\sin\frac{2\pi}{3} = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}\,, \qquad \cos\frac{2\pi}{3} = -\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}\,,$$
$$\sin\frac{4\pi}{3} = -\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}\,, \qquad \cos\frac{4\pi}{3} = -\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}\,.$$

Kokkuvõttes võime võrrandi $z^3 = 1$ kompleksarvulised lahendid (ehk arvu 1 kuupjuured) esitada kujul

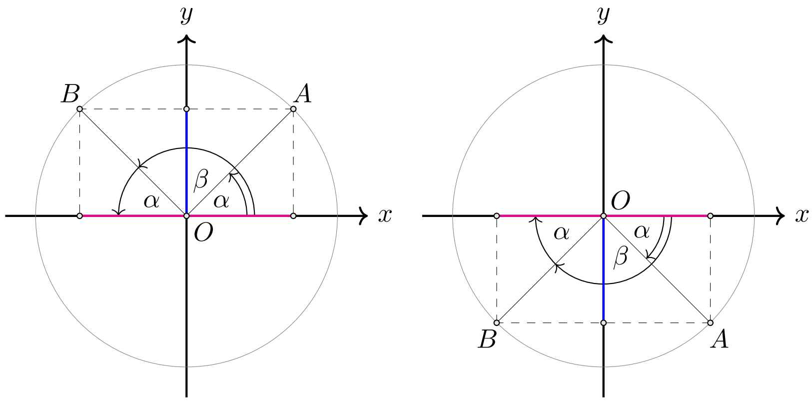
$$z = 1\,, \quad z = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{ja} \quad z = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\,.$$

□

Ülesanne 2.26 Kontrolli, et ülesandes 2.25 leitud lahendid rahuldavad võrrandit, st nende kõigi kuubid võrduvad 1-ga.

Ülesanne 2.27 Näita, et ülesande 2.25 lahenditele vastavad komplekstasandi punktid moodustavad võrdkülgse kolmnurga tipud.

Ülesande 2.25 lahenduses kasutasime ära asjaolu, et punktid A ja B olid sümmeetrilised y-telje suhtes. Uurime seda tingimust lähemalt.



Joonistelt näeme, et punktid A ja B on sümmeetrilised y-telje suhtes parajasti siis, kui vastavate nurkade jaoks kehtib võrdus $\alpha + \beta = \pi$ ehk $\beta = \pi - \alpha$. Arvestades vastavaid projektsioone ja nende märke, saame siit seosed

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha \quad \text{ja} \quad \cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha\,.$$

Neid seoseid on kasulik peast teada, aga kui nad kohe meelde ei tule, saab neid tuletada nurkade vahe valemite ning ülesandes 2.11 tõestatud väärtuste $\sin\pi = 0$ ja $\cos\pi = -1$ abil:

$$\begin{aligned}
\sin(\pi - \alpha) &= \sin\pi\cos\alpha - \cos\pi\sin\alpha = 0\cdot\cos\alpha - (-1)\cdot\sin\alpha = \sin\alpha\,,\\
\cos(\pi - \alpha) &= \cos\pi\cos\alpha + \sin\pi\sin\alpha = (-1)\cdot\cos\alpha + 0\cdot\sin\alpha = -\cos\alpha\,.
\end{aligned}$$

Ülesanne 2.28 Tuleta nurkade vahe siinuse ja koosinuse valemite abil valemid $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ ja $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ arvutamiseks $\sin\alpha$ ja $\cos\alpha$ kaudu.

Ülesanne 2.29* Kas ülesande 2.28 tuletuskäike saab pidada nende valemite tõestusteks?

2.5.1 Projektülesanne: võrrandi $z^n = c$ lahendamine

Kursuse „Arvuhulgad ja avaldised” jaotises 2.1 täheldasime, et võrrandi $z^n = c$ lahenditele vastavad punktid moodustavad korrapärase n-nurga tipud. Käesoleva projektiülesande eesmärk on see väide formaalselt tõestada.

Sõnastame siinkohal uuesti teoreemi 2.1.

Olgu $n \in \mathbb{N}$ ($n \geqslant 1$) ja $c \in \mathbb{C}$ ($c \neq 0$). Võrrandi

$$z^n = c$$

lahendid moodustavad komplekstasandil korrapärase n-nurga tipud, mis asuvad ringjoonel keskpunktiga koordinaattelgede lõikepunktis.

Selle väite tõestame sarnaselt ülesande 2.25 lahendusele.

Eritame juuritava arvu c trigonomeetrilisel kujul $c = R(\cos\Phi + i\sin\Phi)$; paneme tähele, et tingimuse $c \neq 0$ tõttu $R > 0$ ning argument Φ on üheselt määratud. Otsime juure $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ trigonomeetrilise kuju mooduli ja argumendi võimalikke väärtusi.

Ülesanne 2.30 Näita, et $r = \sqrt[n]{R}$.

Niisiis on kõigile lahenditele vastavate punktide kaugus koordinaatide alguspunktist sama, st nad asuvad samal ringjoonel keskpunktiga koordinaatide alguspunktis.

Ülesanne 2.31 Leia argumendi φ kõik võimalikud väärtused.

Ülesanne 2.32 Kirjuta programm, mis saab ette naturaalarvu $n \geqslant 1$, kompleksarvu c ning kuvab kõik komplekstasandi punktid z, mille korral $z^n = c$.

2.6 Lahendused

2.1 Sobib näiteks $n = 2^{k-1}$ teguritega $1 = 2^0, 2 = 2^1, 2^2, \ldots, 2^{k-1}$.

2.2 Programm võib olla näiteks selline:

```
jagajad = []

for n in range(1,601):
    i = 0
    for m in range(1,n+1):
        if n%m == 0:
            i += 1
    jagajad.append((i,n))

jagajad.sort(reverse=True)
print(jagajad)
```

Loendisse `jagajad` kogume paarid `(i,n)`, kus `i` on arvu `n` jagajate arv. Jagajate arvu omakorda leiame täieliku läbivaatuse teel ning iga väärtuse `m=1,2,...,n` jaoks tuvastame jagajaks olemist selle järgi, kas arvu `n` jääk jagamisel arvuga `m` on `0`.

Lõpetuseks sorteerime loendi `jagajad` kahanevas järjekorras. Kuna loendi elemendid on paarid, sorteerib Python need kõigepealt esimese elemendi `i` järgi, st kõigepealt saame suurema jagajate arvuga väärtused (ja see on ka põhjus, miks me salvestasime paarid kujul `(i,n)`, mitte kujul `(n,i)`).

Programmi väljundi algus näeb välja selline:

```
[(24, 600), (24, 540), (24, 504), (24, 480), (24, 420),
(24, 360), (21, 576), (20, 560), (20, 528), (20, 432),
(20, 336), (20, 240), (18, 588), (18, 468), (18, 450),
(18, 396), (18, 300), (18, 288), (18, 252), (18, 180),
(16, 594), (16, 570), (16, 552), (16, 546), (16, 520),
(16, 510), (16, 462), (16, 456), (16, 440), (16, 408),
(16, 390), (16, 384), (16, 378), (16, 330), (16, 312),
(16, 280), (16, 270), (16, 264), (16, 216), (16, 210),
(16, 168), (16, 120), (15, 400), (15, 324), (15, 144),
...
```

Näeme, et $n = 1, 2, \ldots, 600$ seas on maksimaalne võimalik jagajate arv 24, kusjuures vastavatest arvudest vähim on just nimelt 360. Arvu 400 leiame 15 jagajaga alles 43.–45. kohalt.

2.3 Ülesande 2.2 programmiga mängides on lihtne leida, et otsitav arv on 720 oma 30 teguriga.

2.4 Olgu funktsioonile `deg2rad` antud sisend `x`-kraadise nurga näol. Me saame arvutada, kui suure osa täispöördest moodustab nurk suurusega $x°$, kasutades valemit $\frac{x°}{360°}$. Nüüd võime selle osamäära korrutada täispöörde suurusega radiaanides ning lõplikuks arvutusvalemiks saab

$$\frac{x°}{360°} \cdot 2\pi = x° \cdot \frac{2\pi}{360°}\,.$$

Tänu seosele $2\pi(\mathrm{rad}) = 360°$ korrutame me sisendit tegelikult arvuga 1. See ongi õige – meil ei kästud muuta sisendi suurust, vaid ainult tema ühikut!

```
from math import pi

def kraad2rad(x):
    return(x*2*pi/360)
```

Muidugi võime valemi veidi lihtsustada ja arvutada $x° \cdot \frac{\pi}{180°}$.

Toodud programm töötab ka siis, kui sisendnurk on negatiivne.

2.5 Analoogiliselt ülesandega 2.4 saame x-radiaanise nurga teisendada kraadideks valemiga $y = x \cdot \frac{360°}{2\pi} = x \cdot \frac{180°}{\pi}$. Kraadidest minutite eraldamiseks tuleb kõigepealt leida tulemuse täisosa $[y]$ (mis vastab tulemuse täiskraadidele) ning murdosa $z = y - [y]$. Otsitavaks minutite arvuks on siis $60z$ täisosa $[60z]$. Analoogiliselt leiame minutite murdosa põhjal ka sekundid. Täisosa leidmiseks sobib Pythoni funktsioon `int`.

```
from math import pi

def rad2kraad(x):
    y = x*180/pi
    kraad = int(y)
    z = y-kraad
    minut = int(60*z)
```

```
    w = 60*z-minut
    sekund = 60*w
    return(kraad,minut,sekund)
```

Kas see kood töötab ka negatiivsete sisendite korral?

2.6 Kasutame ülesande 2.5 programmi:

```
>>> rad2kraad(1)
(57, 17, 44.80624709636231)
```

Niisiis $1(\mathrm{rad}) \approx 57°17'44{,}8''$.

2.7 Valemi (2.2) põhjal pole $\cot \angle AOB = \frac{x_B}{y_B}$ määratud siis, kui $y_B = 0$, st kui nurga AOB lõpphaar OB asub x-teljel. See on omakorda nii parajasti siis kui $\angle AOB = k \cdot 180°$ ($k \in \mathbb{Z}$).

2.8 Kasutame valemeid (2.1) nurga $\alpha = \angle AOB$ korral ning arvestame, et $r^2 = x_B^2 + y_B^2$:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = \left(\frac{y_B}{r}\right)^2 + \left(\frac{x_B}{r}\right)^2 = \frac{y_B^2}{r^2} + \frac{x_B^2}{r^2} = \frac{x_B^2 + y_B^2}{x_B^2 + y_B^2} = 1\,.$$

2.9 Kui tegid konstruktsiooni õigesti, märkad, et punktid B ja B' on alati teineteise peegeldused koordinaattelgede vahelise täisnurga poolitaja suhtes.

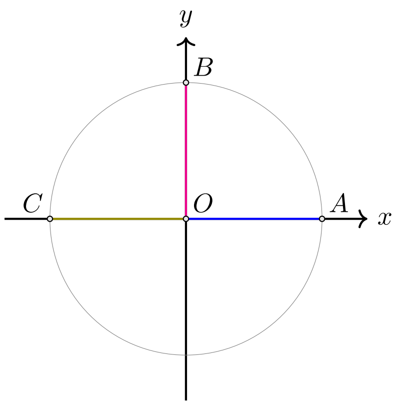
2.10 Kasutame tuletatud valemeid siinuse ja koosinuse jaoks:

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \cot \alpha\,.$$

Sama moodi saame tuletada ka valemi

$$\cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \tan \alpha\,.$$

2.11 Saame kasutada teadmist, et nurga siinus ja koosinus on määratud kui vastava nurga all asuva ühiklõigu märgiga projektsioonid vastavalt y- ja x-teljele. Vaatlemegi siis koordinaatteljestikus ühiklõike OA, OB ja OC, mis asuvad x-telje suhtes vastavalt $0°, 90°$ ja $180°$ nurkade all:



Tähistades nende lõikude projektsioone telgedele vastavalt OA_x, OA_y, OB_x jne, saame

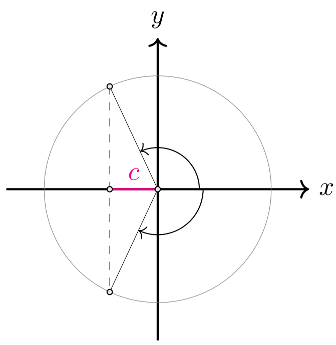
$$\begin{aligned} \sin 0 &= OA_y = 0\,, & \cos 0 &= OA_x = 1\,, \\ \sin\frac{\pi}{2} &= OB_y = 1\,, & \cos\frac{\pi}{2} &= OB_x = 0\,, \\ \sin\pi &= OC_y = 0\,, & \cos\pi &= OC_x = -1\,. \end{aligned}$$

Tangensi ja kootangensi väärtused saame vastavate siinuse ja koosinuste väärtuste jagamisel. Paneme tähele, et kuna vahepeal tuleb jagada nulliga, on tangensi ja kootangensi puhul mõne väärtused määramata. Kokkuvõtteks saame järgmise tabeli.

	sin	cos	tan	cot
$0°$	0	1	0	–
$90° = \frac{\pi}{2}$	1	0	–	0
$180° = \pi$	0	-1	0	–

2.12 Sisuliselt peame näitama, et kui on antud mingi nurga siinus ja koosinus, on see nurk nende väärtustega üheselt määratud.

Tuletame meelde, et nurga siinus ja koosinus on määratud ühikringioone vastava raadiuse projektsioonina vastavalt y- ja x-teljele. Vaatleme näiteks koosinust $c = \cos\alpha$ ja küsime, kui mitme nurga lõpphaara projektsioon x-teljele saab olla suurusega c?



Näeme, et üldjuhul vastab antud koosinusele kaks nurka, välja arvatud siis, kui $\alpha = 0$ või $\alpha = \pi$ (neil juhtudel määrab koosinus üksinda nurga üheselt ära ja tõestatav väide kehtib triviaalselt).

Seejuures erinevad vastavate raadiuste projektsioonid y-teljele (ehk nende nurkade siinused) märgi poolest. Kokkuvõttes määrab paar $(\sin\alpha, \cos\alpha)$ nurga α väärtuse igal juhul üheselt, millest järeldubki ülesande väide.

2.13 Kumbki võrdus ei kehti üldjuhul. Selle tõestamiseks piisab kontranäidete leidmisest.

(a) Kui $\alpha = \beta = 30°$, siis $\sin(\alpha+\beta) = \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$, kuid $\sin\alpha + \sin\beta = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$.

(b) Kui $\alpha = 60^\circ$ ja $\beta = 30^\circ$, siis $\cos(\alpha - \beta) = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, kuid $\cos\alpha - \cos\beta = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$.

2.14 Kasutame nurkade summa ja vahe siinuse ja koosinuse valemit:

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos(\alpha \pm \beta)} = \frac{\sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta}\,.$$

Kuidas jõuda saadud avaldisest kujule, milles esineksid ainult $\tan\alpha$ ja $\tan\beta$? Selleks võime lugejat ja nimetajat jagada sama suurusega $\cos\alpha\cos\beta$, sest see ei muuda murru väärtust. Niisiis saame

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\frac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta} \pm \frac{\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\frac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta} \mp \frac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}} = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta}\,.$$

Kootangensi jaoks töötab sama võte, ainult et seekord tuleb lugejat ja nimetajat jagada suurusega $\sin\alpha\sin\beta$:

$$\begin{aligned}\cot(\alpha \pm \beta) &= \frac{\cos(\alpha \pm \beta)}{\sin(\alpha \pm \beta)} = \frac{\cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta} = \\ &= \frac{\frac{\cos\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta} \mp \frac{\sin\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\sin\beta}}{\frac{\sin\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta} \pm \frac{\cos\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\sin\beta}} = \frac{\cot\alpha\cot\beta \mp 1}{\cot\beta \pm \cot\alpha}\,.\end{aligned}$$

Neid valemeid pole mõtet pähe tuupida, küll aga on kasulik mäletada nende tuletusvõtet, et nad vajadusel käigu pealt välja mõelda.

2.15 Kasutame ülesandes 2.14 tuletatud valemeid ja võtame neis $\alpha = \beta$.

$$\begin{aligned}\tan 2\alpha &= \tan(\alpha + \alpha) = \frac{\tan\alpha + \tan\alpha}{1 - \tan\alpha\tan\alpha} = \frac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}\,,\\ \cot 2\alpha &= \cot(\alpha + \alpha) = \frac{\cot\alpha\cot\alpha - 1}{\cot\alpha + \cot\alpha} = \frac{\cot^2\alpha - 1}{2\cot\alpha}\,.\end{aligned}$$

Ka neid valemeid pole mõtet pähe tuupida, sest neid saab vajadusel käigu pealt tuletada (või raamatust järele vaadata).

2.16 Kasutame topeltnurga siinuse ja koosinuse valemeid „tagurpidi”:

$$\begin{aligned}\sin\alpha &= \sin\left(2 \cdot \frac{\alpha}{2}\right) = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\,,\\ \cos\alpha &= \cos\left(2 \cdot \frac{\alpha}{2}\right) = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}\,.\end{aligned}$$

Oleme saanud võrrandisüsteemi, kust tuleb avaldada $\sin\frac{\alpha}{2}$ ja $\cos\frac{\alpha}{2}$. Selleks on mitu võimalust. Tegelikult piisab isegi süsteemi teisest võrrandist, mida saame teisendada, arvestades lisaks seost $\sin^2\frac{\alpha}{2} + \cos^2\frac{\alpha}{2} = 1$:

$$\cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2} = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \left(1 - \cos^2\frac{\alpha}{2}\right) = 2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1\,.$$

Järelikult

$$\begin{aligned} 2\cos^2\frac{\alpha}{2} &= \cos\alpha + 1\,, \\ \cos^2\frac{\alpha}{2} &= \frac{\cos\alpha+1}{2}\,, \\ \cos\frac{\alpha}{2} &= \pm\sqrt{\frac{\cos\alpha+1}{2}}\,, \end{aligned}$$

kus märk ruutjuure ees tuleb valida vastavalt sellele, millise veerandi nurk on $\frac{\alpha}{2}$.

Siinuse korral saame

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = 1-\cos^2\frac{\alpha}{2} = 1-\frac{\cos\alpha+1}{2} = \frac{2-(\cos\alpha+1)}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2}\,,$$

millest

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}\,.$$

Kokkuvõttes oleme tuletanud reeglid

$$\begin{aligned} \cos\frac{\alpha}{2} &= \pm\sqrt{\frac{\cos\alpha+1}{2}}\,, \\ \sin\frac{\alpha}{2} &= \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}\,, \end{aligned}$$

kus märgid ruutjuurte ees tuleb valida vastavalt sellele, millise veerandi nurk on $\frac{\alpha}{2}$.

Need reeglid võib ära õppida, aga nende tuletamine pole raske ka käigu pealt ja isegi peast. Sisuliselt lahendasime tuletuse käigus ju võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2} = \cos\alpha \\ \cos^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\alpha}{2} = 1 \end{cases}.$$

Selle süsteemi võrrandite liitmine annab seose $\cos\frac{\alpha}{2}$, lahutamine aga seose $\sin\frac{\alpha}{2}$ jaoks.

2.17 Jaotises 1.3 näitasime, et $\cos 36^\circ = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$. Kuna $36^\circ = 2\cdot 18^\circ$, saame kasutada ülesande 2.16 võtet. Moodustame võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} \cos^2 18^\circ - \sin^2 18^\circ = \cos 36^\circ \\ \cos^2 18^\circ + \sin^2 18^\circ = 1 \end{cases}.$$

Süsteemi võrrandite liitmisel saame

$$\begin{aligned}
2\cos^2 18^\circ &= \cos 36^\circ + 1 = \frac{1+\sqrt{5}}{4} + 1 = \frac{5+\sqrt{5}}{4}\,,\\
\cos^2 18^\circ &= \frac{5+\sqrt{5}}{8}\,,\\
\cos 18^\circ &= \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}
\end{aligned}$$

ning lahutamisel

$$\begin{aligned}
2\sin^2 18^\circ &= 1 - \cos 36^\circ = 1 - \frac{1+\sqrt{5}}{4} = \frac{3-\sqrt{5}}{4}\,,\\
\sin^2 18^\circ &= \frac{3-\sqrt{5}}{8}\,,\\
\sin 18^\circ &= \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{8}}\,.
\end{aligned}$$

Ruutjuurtest tuleb võtta positiivsed väärtused, sest 18° on I veerandi nurk. Viimast avaldist saab ka natuke lihtsustada:

$$\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{8}} = \sqrt{\frac{6-2\sqrt{5}}{16}} = \sqrt{\frac{(\sqrt{5})^2 - 2\sqrt{5} + 1}{16}} = \sqrt{\frac{(\sqrt{5}-1)^2}{16}} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}.$$

2.18 Ülesandes 1.7 nägime, et $\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$ ja $\cos 15^\circ = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$. Neid väärtusi ei pea meeles pidama, vaid neid saab vajadusel leida ülesannte 2.16 ja 2.17 võttega väärtuse $\cos(2\cdot 15^\circ) = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ kaudu.

Lisades siia $\sin 18^\circ$ ja $\cos 18^\circ$ täpsed väärtused ülesandest 2.17, saame kasutada nurkade vahe siinuse valemit:

$$\begin{aligned}
\sin 3^\circ &= \sin(18^\circ - 15^\circ) = \sin 18^\circ \cos 15^\circ - \cos 18^\circ \sin 15^\circ = \\
&= \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{8}} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} - \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}} \cdot \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} = \\
&= \frac{\sqrt{(3-\sqrt{5})(2+\sqrt{3})}}{4\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{(5+\sqrt{5})(2-\sqrt{3})}}{4\sqrt{2}}\,.
\end{aligned}$$

Ja ega seda avaldist palju lihtsustada ei saagi.

2.19 Anname nõutud omadustega ristküliku ja kolmnurga konstruktsiooni.

Valime tasandil kaks ristuvat kiirt (vertikaalse ja horisontaalse) ühise algusega punktis A. Need kiired määravad ära ristküliku küljed, kuid vastavad punktid B ja D valime hiljem.

Tõmbame punktist A veel kaks kiirt (millest saavad pärast kiired AE ja AF) nii, et tulevaste kiirte AB ja AE vahele jääb nurk α ning tulevaste kiirte AE ja AF vahele nurk β. Tänu tingimusele $\alpha + \beta < \frac{\pi}{2}$ jäävad mõlemad uued kiired algsete ristuvate kiirtega määratud tasandiveerandisse.

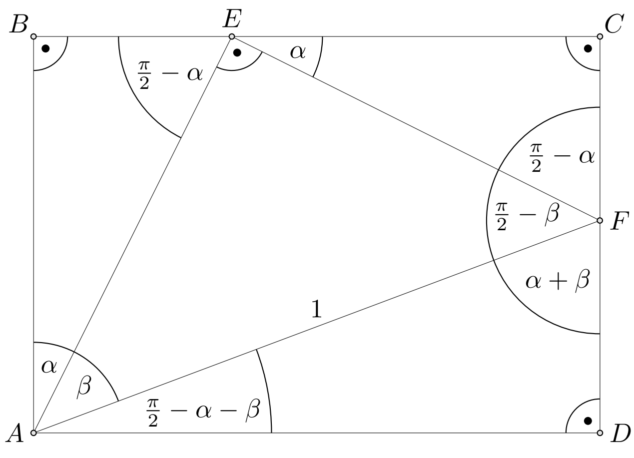
Nüüd valime teisel uuel kiirel punkti F nii, et $|AF| = 1$. Punkti F ristprojektisoon algsele horisontaalsele kiirele saab punktiks D.

Joonestame punktist F kiire, mis moodustab sirgega AF nurga $\frac{\pi}{2} - \beta$. See kiir ristub kiirega, mida eespool nimetasime tulevaseks kiireks AE (sest nurk tulevaste kiirte AE ja AF vahel on β). Olgu vastav ristumispunkt E. Punkti E ristprojektsioon algsele vertikaalsele kiirele olgu B ning sirgete BE ja DF lõikepunkt (tegelikult isegi ristumispunkt) olgu C.

Kuna konstruktsiooni iga samm on antud tingimustel alati teostatav, peavad nõutud ristkülik ja kolmnurk alati eksisteerima.

2.20

- Täisnurksest kolmnurgast AEB saame $\angle AEB = \frac{\pi}{2} - \angle BAE = \frac{\pi}{2} - \alpha$.
- $\angle CEF = \pi - \angle FEA - \angle AEB = \pi - \frac{\pi}{2} - (\frac{\pi}{2} - \alpha) = \alpha$.
- Täisnurksest kolmnurgast EFC saame $\angle EFC = \frac{\pi}{2} - \angle CEF = \frac{\pi}{2} - \alpha$. Muuhulgas näeme, et kolmnurgad AEB ja EFC on sarnased tunnuse NNN alusel.
- Täisnurksest kolmnurgast AFE saame $\angle AFE = \frac{\pi}{2} - \angle EAF = \frac{\pi}{2} - \beta$.
- $\angle FAD = \angle BAD - \angle BAE - \angle EAF = \frac{\pi}{2} - \alpha - \beta$.
- Täisnurksest kolmnurgast FAD saame $\angle DFA = \frac{\pi}{2} - \angle FAD = \frac{\pi}{2} - (\frac{\pi}{2} - \alpha - \beta) = \alpha + \beta$.

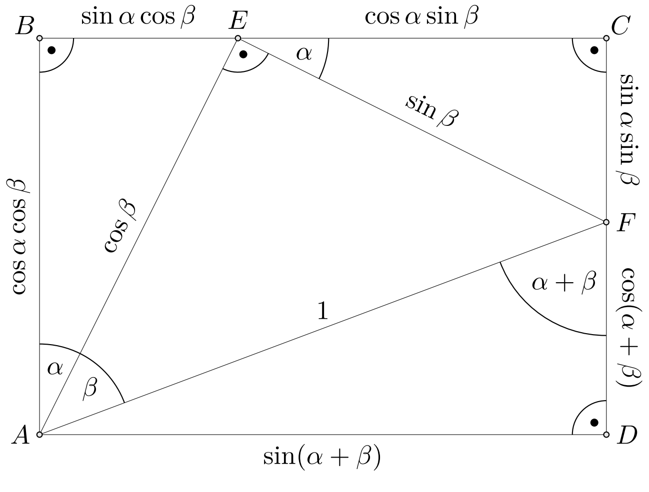


2.21 Paneme tähele, et vaadeldavatel täisnurksetel kolmnurkadel on ühine hüpotenuus AF pikkusega 1. See tähendab, et nende kaatetite pikkused avalduvad otse vastavate nurkade trigonomeetriliste funktsioonide väärtustena:

$$\begin{aligned}
\sin\angle DFA &= \frac{|AD|}{|AF|} = |AD| &&\Longrightarrow && |AD| = \sin(\alpha+\beta)\,,\\
\cos\angle DFA &= \frac{|DF|}{|AF|} = |DF| &&\Longrightarrow && |DF| = \cos(\alpha+\beta)\,,\\
\sin\angle EAF &= \frac{|EF|}{|AF|} = |EF| &&\Longrightarrow && |EF| = \sin\beta\,,\\
\cos\angle EAF &= \frac{|AE|}{|AF|} = |AE| &&\Longrightarrow && |AE| = \cos\beta\,.
\end{aligned}$$

2.22 Kasutame ülesande 2.21 tulemusi, mille järgi $|AE| = \sin\beta$ ja $|EF| = \cos\beta$. Nüüd saame vaadeldavatest täisnurksetest kolmnurkadest

$$\begin{aligned}
\sin\angle BAE &= \frac{|BE|}{|AE|} = \frac{|BE|}{\cos\beta} &&\Longrightarrow && |BE| = \sin\alpha\cos\beta\,,\\
\cos\angle BAE &= \frac{|AB|}{|AE|} = \frac{|AB|}{\cos\beta} &&\Longrightarrow && |AB| = \cos\alpha\cos\beta\,,\\
\sin\angle CEF &= \frac{|CF|}{|EF|} = \frac{|CF|}{\sin\beta} &&\Longrightarrow && |CF| = \sin\alpha\sin\beta\,,\\
\cos\angle CEF &= \frac{|CE|}{|EF|} = \frac{|CE|}{\sin\beta} &&\Longrightarrow && |CE| = \cos\alpha\sin\beta\,.
\end{aligned}$$



2.23 Võrdus $|AD| = |BE| + |EC|$ annab seose $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$ ning võrdus $|AB| = |CF| + |FD|$ seose $\cos\alpha\cos\beta = \sin\alpha\sin\beta + \cos(\alpha+\beta)$ ehk $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$.

2.24 $n = 1$ puhul on võrdus triviaalne:

$$(r(\cos\varphi + i\sin\varphi))^1 = r^1(\cos 1\varphi + i\sin 1\varphi)\,.$$

Juhul $n = 2$ saame kasutada kompleksarvude korrutamise reeglit:

$$\begin{aligned}(r(\cos\varphi + i\sin\varphi))^2 &= (r(\cos\varphi + i\sin\varphi))(r(\cos\varphi + i\sin\varphi)) = \\ &= r\cdot r\cdot(\cos(\varphi+\varphi) + i\sin(\varphi+\varphi)) = \\ &= r^2(\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi)\,.\end{aligned}$$

Kuubi puhul tuleb olla natuke kavalam, aga mitte palju:

$$\begin{aligned}(r(\cos\varphi + i\sin\varphi))^3 &= (r(\cos\varphi + i\sin\varphi))(r(\cos\varphi + i\sin\varphi))^2 = \\ &= (r(\cos\varphi + i\sin\varphi))(r^2(\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi)) = \\ &= r\cdot r^2\cdot(\cos(\varphi+2\varphi) + i\sin(\varphi+2\varphi)) = \\ &= r^3(\cos 3\varphi + i\sin 3\varphi)\,.\end{aligned}$$

Sama võttega saame suvaliselt naturaalarvult $n = k$ minna üle järgmisele naturaalarvule $n = k + 1$:

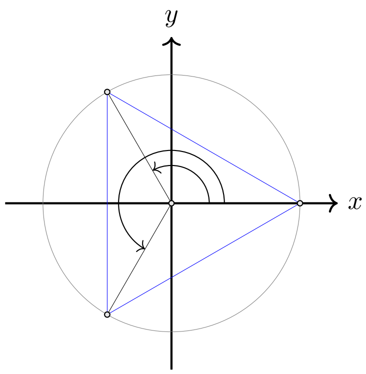
$$\begin{aligned}(r(\cos\varphi + i\sin\varphi))^{k+1} &= (r(\cos\varphi + i\sin\varphi))(r(\cos\varphi + i\sin\varphi))^k = \\ &= (r(\cos\varphi + i\sin\varphi))(r^k(\cos k\varphi + i\sin k\varphi)) = \\ &= r\cdot r^k\cdot(\cos(\varphi+k\varphi) + i\sin(\varphi+k\varphi)) = \\ &= r^{k+1}(\cos(k+1)\varphi + i\sin(k+1)\varphi)\,.\end{aligned}$$

Niimoodi saame ülesande võrduse kehtivuse näidata suvalise naturaalarvu jaoks. Sisuliselt kasutame siinkohal matemaatilise induktsiooni meetodit, mille kohta saad rohkem lugeda „Võistlusmatemaatika põhivara" peatükist „Naturaalarvud ja matemaatiline induktsioon".

2.26 Ilmselt $1^3 = 1$. Ülejäänud kahe lahendi puhul kasutame kaksliikme kuubi valemit:

$$\begin{aligned}&\left(-\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 = \\ &= \left(-\frac{1}{2}\right)^3 \pm 3\left(-\frac{1}{2}\right)^2\left(i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 3\left(-\frac{1}{2}\right)\left(i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \pm \left(i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 = \\ &= -\frac{1}{8} \pm \frac{3\sqrt{3}i}{8} - \frac{3\cdot 3\cdot i^2}{8} \pm \frac{3\sqrt{3}i^2 i}{8} = \\ &= -\frac{1}{8} \pm \frac{3\sqrt{3}i}{8} + \frac{9}{8} \mp \frac{3\sqrt{3}i}{8} = -\frac{1}{8} + \frac{9}{8} = 1\,.\end{aligned}$$

2.27 Ülesande 2.25 kõigi lahendite moodulid on võrdsed 1-ga, st nad asuvad komplekstasandi ühikrongjoonel. Nende lahendite argumendid aga on vastavalt $0 = 0°$, $\frac{2\pi}{3} = 120°$ ja $\frac{4\pi}{3} = 240°$, mis tähendab, et lahenditele vastavad punktid moodustavad võrdkülgse kolmnurga tipud:



2.28 Kasutame ülesandes 2.11 leitud väärtusi $\sin\frac{\pi}{2} = 1$ ja $\cos\frac{\pi}{2} = 0$:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\frac{\pi}{2}\cos\alpha - \cos\frac{\pi}{2}\sin\alpha = 1\cdot\cos\alpha - 0\cdot\sin\alpha = \cos\alpha\,,$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\frac{\pi}{2}\cos\alpha + \sin\frac{\pi}{2}\sin\alpha = 0\cdot\cos\alpha + 1\cdot\sin\alpha = \sin\alpha\,.$$

2.29 Vastus oleneb sellest, kuidas on tõestatud nurkade vahe siinuse ja koosinuse valemid. Paneme tähele, et seose $\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$ tuletamisel kasutasime võrduseid $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right) = \sin\gamma$ ja $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right) = \cos\gamma$. Kui me nüüd kasutaks nende võrduste tuletamisel nurkade vahe siinuse valemit, oleks tegemist loogilise tsükliga, kus väite tõestamisel kasutaksime väidet ennast. Seda aga ei tohi teha, sest muidu oleks võimalik tõestada absoluutselt kõiki väiteid, sh väärasid.

Kui aga seos $\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$ õnnestub üldjuhul tõestada mõnel muul moel (näiteks üldistades projektülesande 2.4.1 meetodit suvaliste nurkade vahele), muutuks ülesande 2.28 tuletuskäik valemi $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha$ jaoks lubatavaks tõestuseks.

Seose $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha$ tõestusel kasutasime nurkade vahe koosinuse valemit, mille tõestasime jaotises 2.4 sõltumatult. Niisiis on ülesande 2.28 lahenduses toodud tuletuskäik selle seose jaoks tõestusena aktsepteeritav, sest loogilist tsüklit ei teki.

2.30 Võrrandist $z^n = c$ saame

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) = R(\cos\Phi + i\sin\Phi)\,.$$

Paneme tähele, et arvude $\cos n\varphi + i\sin n\varphi$ ja $\cos\Phi + i\sin\Phi$ moodulid on võrdsed arvuga 1. Kuna kompleksarvude korrutise moodul on võrdne tegurite moodulite korrutisega, saame

$$|r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)| = |R(\cos\Phi + i\sin\Phi)|\,,$$
$$|r^n|\cdot|(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)| = |R|\cdot|(\cos\Phi + i\sin\Phi)|\,,$$
$$|r^n|\cdot 1 = |R|\cdot 1\,,$$

ehk teisisõnu $|r^n| = |R|$. Kuna aga r^n ja R on positiivsed reaalarvud, järeldub siit $r^n = |r^n| = |R| = R$, kust saamegi $r = \sqrt[n]{R}$, nagu ülesandes nõutud.

2.31 Ülesandes 2.30 nägime, et $r^n = R$. Jagame võrrandi $z^n = c$ mõlemaid pooli selle suurusega:

$$\begin{aligned} z^n &= c\,, \\ r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) &= R(\cos\Phi + i\sin\Phi)\,, \\ \cos n\varphi + i\sin n\varphi &= \cos\Phi + i\sin\Phi\,. \end{aligned}$$

Kaks kompleksarvu on võrdsed parajasti siis, kui nende reaal- ja imaginaarosad on vastavalt võrdsed, st kehtivad võrdused

$$\begin{cases} \sin n\varphi = \sin\Phi \\ \cos n\varphi = \cos\Phi \end{cases}.$$

Ülesande 2.12 põhjal järeldub siit, et $n\varphi = \Phi$. Alternatiivina ülesande 2.12 tulemusele võime tähele panna, et $\cos\alpha + i\sin\alpha$ kirjeldab üheselt ühikringjoone punkti, millele vastava raadiuse ja x-telje vaheline nurk on α. Kui kaks ühikringjoone punkti langevad kokku, peavad võrduma ka vastavad nurgad.

Võrrandi $n\varphi = \Phi$ (kus Φ on fikseeritud nurk ning φ muutuja) saame nüüd lahendada ülesande 2.25 võttega.

Üheks lahendiks sobib loomulikult $\varphi = \frac{\Phi}{n}$. Järgmiste lahendite leidmiseks paneme tähele, et nurka Φ saame esitada ka kujul

$$\Phi + 2\pi, \Phi + 4\pi, \ldots, \Phi + 2(n-1)\pi, \Phi + 2n\pi, \Phi + 2(n+1)\pi, \ldots\,.$$

Vastavad φ väärtused on

$$\frac{\Phi}{n} + \frac{2\pi}{n}, \frac{\Phi}{n} + \frac{4\pi}{n}, \ldots, \frac{\Phi}{n} + \frac{2(n-1)\pi}{n}, \frac{\Phi}{n} + \frac{2n\pi}{n}, \frac{\Phi}{n} + \frac{2(n+1)\pi}{n}, \ldots\,.$$

Paneme tähele, et

$$\begin{aligned} \frac{\Phi}{n} + \frac{2n\pi}{n} &= \frac{\Phi}{n} + 2\pi = \frac{\Phi}{n}, \\ \frac{\Phi}{n} + \frac{2(n+1)\pi}{n} &= \frac{\Phi}{n} + \frac{2\pi}{n} + 2\pi = \frac{\Phi}{n} + \frac{2\pi}{n}, \ldots\,, \end{aligned}$$

niisiis hakkavad lahendijadas liikmed tsükliliselt korduma. Kokkuvõttes avalduvad lahendid kujul

$$\frac{\Phi}{n}, \frac{\Phi}{n} + \frac{2\pi}{n}, \frac{\Phi}{n} + \frac{4\pi}{n}, \ldots, \frac{\Phi}{n} + \frac{2(n-1)\pi}{n}\,.$$

Jääb üle tähele panna, et tegemist on järjendiga n nurgast, kus iga järgmine on eelmisest $\frac{2\pi}{n}$ võrra suurem. Niisiis kirjeldavad vastavad ühikringjoone punktid tõepoolest korrapärast n-nurka.

2.32 Võrrandi $z^n = c$ (ehk $z^n - c = 0$) lahendamiseks kasutame moodulit `sympy` ning joonise tegemiseks teeki `matplotlib`. Kuna `sympy` realiseerib kompleksarvude aritmeetika Pythonist eraldi, on seal ka veidi teistsugused funktsioonid kompleksarvu reaal- ja imaginaarosa eraldamiseks, nendeks on vastavalt `re` ja `im`. Muus osas on selle ülesande lahendus sarnane ülesande 1.21 lahendusele kursusest „Arvuhulgad ja avaldised”:

```
import matplotlib.pyplot as plt
from sympy import solve,re,im
from sympy.abc import z

n=3 # Muuda seda
c=-8j # Muuda seda

kompleksarvud=solve(z**n-c)

reaalosad = []
imaginaarosad = []

for kompleksarv in kompleksarvud:
    reaalosad.append(re(kompleksarv))
    imaginaarosad.append(im(kompleksarv))

plt.plot(reaalosad, imaginaarosad, "o")

plt.show()
```

Indeks