Võrratused

Gümnaasiumi reaalharu

Jan Willemson

https://varamu.eu

Saatesõna

Sa hoiad käes Eesti gümnaasiumi reaalharule mõeldud eksperimentaalsesse matemaatikaõpikute sarja kuuluvat õpikut. Sari on leidnud inspiratsiooni 2023. aasta gümnaasiumi laia matemaatika õppekavast, kuid ei vasta sellele üksüheselt. Autori hinnangul vajabki Eesti gümnaasiumi matemaatika ainekava põhjalikku uuendamist. Käesolev sari kujutab endast autori nägemust sellest, milline matemaatika ainekava 21. sajandi 1. veerandi lõpul välja peaks nägema, et üldhariduskooli lõpetajad oleksid valmis jätkama õpinguid ühiskonnale olulistel erialadel.

Sarja sõsarõpikuks on sama autori „Võistlusmatemaatika põhivara”, millest huvitatud lugeja leiab palju täiendavaid ülesandeid ning süvendatud materjali. Mõned jaotised ja ülesanded on kahel õppematerjalil ka ühised – aga eks matemaatika, mida neis käsitletakse, ongi ju üks ja seesama.

Sarja õpikud on hetkel mustandi staatuses – neis võib esineda lünki, vigu ning muid vajakajäämisi. Autor on tänulik kommentaaride ja tagasiside eest, mida saab saata aadressile `matemaatika@varamu.eu`.

Sisukord

1 Järjestatud hulgad **5**
1.1 Järjestusseos . . . 5
1.2 Järjestatud arvuhulgad . . . 6
1.3 Lahendused . . . 10

2 Arvvõrratused **13**
2.1 Naturaalarvude võrdlemine . . . 13
2.2 Ratsionaalarvude võrdlemine . . . 14
2.3 Ettevaatust nõudvad kohad võrratuste tõestamisel . . . 15
2.4 Juuravaldiste võrdlemine . . . 16
2.5 Lahendused . . . 17

3 Võrratuste tõestamine **21**
3.1 Reaalarvu ruut on mittenegatiivne . . . 21
3.2 Kahe arvu aritmeetilise ja geomeetrilise keskmise vaheline võrratus . . . 24
3.3 Aritmeetilise ja geomeetrilise keskmise vahelise võrratuse üldkuju 26
3.4 Lahendused . . . 28

PEATÜKK 1

Järjestatud hulgad

1.1 Järjestusseos

Võrratusega väljendatakse olukorda, kus üks objekt on mingis mõttes suurem kui teine. Objektide võrdlemine võimaldab neid omavahel *järjestada*.

Definitsioon 1.1. *Hulga H elementide vahelist seost $\preccurlyeq$ nimetame* (mitterangeks) järjestuseks*, kui kehtivad järgmised tingimused:*

(a) iga vaadeldava objekti a korral kehtib $a \preccurlyeq a$;

(b) kui $a \preccurlyeq b$ ja $b \preccurlyeq a$, siis $a = b$;

(c) kui $a \preccurlyeq b$ ja $b \preccurlyeq c$, siis ka $a \preccurlyeq c$.

Võrdle seda definitsiooni ekvivalentsiseose definitsiooniga 1.1 kursusest „Võrrandid ja võrrandisüsteemid"! Kui suurt erinevust märkad? Kui oluline see erinevus on?

Ülesanne 1.1 Tõesta, et hulkade vaheline seos $\subset$ on järjestusseos.

Ülesanne 1.2 Vaatleme tõeväärtusi `true` ja `false` ning defineerime seose $\Rightarrow$ tingimustega $\texttt{false} \Rightarrow \texttt{false}$, $\texttt{false} \Rightarrow \texttt{true}$ ja $\texttt{true} \Rightarrow \texttt{true}$. Näita, et $\Rightarrow$ on järjestusseos hulgal hulgal $\{\texttt{true}, \texttt{false}\}$.

Ülesanne 1.3 Ütleme, et naturaalarv a *jagab* naturaalarvu b (ja kirjutame $a \mid b$), kui leidub niisugune naturaalarv k, et $k \cdot a = b$. Näita, et seos $\mid$ on naturaalarvude hulgal järjestusseos.

Ülesanne 1.4 Kui naturaalarv a jagab naturaalarvu b, siis ütleme ka, et arv b *jagub* arvuga a ja kirjutame $a \vdots b$. Kas $\vdots$ on järjestusseos naturaalarvudel?

Ülesanne 1.5 Sama moodi saame seose $a \mid b$ defineerida täisarvudel. Kas ka see seos osutub järjestuseks?

Ülesanne 1.6 Uuri, kuidas saab Pythonis kindlaks teha, kas üks string on teise alamstring. Tõesta, et alamstringiks olemine on stringide vaheline järjestusseos.

Näeme, et sugugi mitte kõigi järjestusseoste puhul ei pea kõik elemendid omavahel võrreldavad olema.

Ülesanne 1.7 Leia ülesannete 1.1–1.6 näidete seast sellised, mille puhul kõik objektid on omavahel võrreldavad.

Kõigi vaadeldavate objektide omavaheline võrreldavus on nii oluline omadus, et sellele on antud omaette nimi.

Definitsioon 1.2. *Ütleme, et hulk H on järjestusseosega $\preccurlyeq$ on* lineaarselt *järjestatud, kui kõigi elementide $a, b \in H$ puhul kehtib kas $a \preccurlyeq b$ või $b \preccurlyeq a$. Hulka H nimetame sel juhul* lineaarselt järjestatuks *ehk lihtsalt* järjestatuks.

Iga mitterange järjestusega $\preccurlyeq$ käib kaasas vastav pöördjärjestus $\succcurlyeq$ ning samuti vastavad ranged järjestused $\prec$ ja $\succ$.

Definitsioon 1.3. *Kui $a \preccurlyeq b$, siis kirjutame ka $b \succcurlyeq a$. Kui $a \preccurlyeq b$ ja $a \neq b$, siis kirjutame $a \prec b$ ja $b \succ a$.*

Range järjestuse korral tähendab järjestuse lineaarsus, et iga kahe elemendi $a, b \in H$ puhul kehtib kas $a = b$, $a \prec b$ või $b \prec a$.

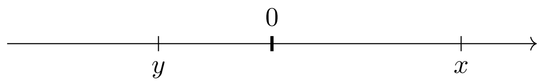
1.2 Järjestatud arvuhulgad

Väga olulised lineaarselt järjestatud hulgad on arvuhulgad $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ ja $\mathbb{R}$ nende elementide loomuliku järjestuse $\leqslant$ suhtes (millega käib samuti kaasas pöördjärjestus $\geqslant$ ning vastavad ranged järjestused $<$ ja $>$). See tähendab, et iga kahe (reaal)arvu puhul saame otsustada, kas üks on suurem kui teine või on need arvud võrdsed.

Järjestatud arvuhulkade korral saame defineerida ka positiivsuse ja negatiivsuse mõisted.

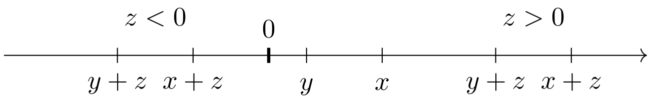
Definitsioon 1.4. *Järjestatud arvuhulgas ütleme, et arv x on* positiivne*, kui $x > 0$,* negatiivne*, kui $x < 0$,* mittenegatiivne*, kui $x \geqslant 0$, ja* mittepositiivne*, kui $x \leqslant 0$.*

Tuletame meelde, et geomeetriliselt saab reaalarvud seada vastavusse sirge punktidega (vt kursus „Arvuhulgad ja avaldised”, jaotis 1.6). Võrratus $x > y$ tähendab siis, et arvule x vastav punkt asub joonisel paremal pool kui arvule y vastav punkt. Muuhulgas jäävad positiivsed arvud arvust 0 paremale ja negatiivsed vasakule.



Arvuhulkadel on määratud ka aritmeetilised tehted liitmine, lahutamine, korrutamine ja jagamine. Kuidas need tehted järjestusse suhtuvad?

Arvudele x ja y sama arvu z liitmine tähendab, et need arvud liiguvad arvteljel sama suuruse võrra paremale (kui $z > 0$), vasakule (kui $z < 0$) või ei liigu üldse (kui $z = 0$). See tähendab, et arvude x ja y vaheline järjestusseos (ükskõik kas range või mitterange) jääb kehtima.



Nõnda saame sõnastada järgmised reeglid:

(J1) kui $x \geqslant y$, siis iga z korral $x + z \geqslant y + z$;

(J1') kui $x > y$, siis iga z korral $x + z > y + z$.

Vaatleme võrratust $x \geqslant y$ ning rakendame reeglit J1, võttes $z = -y$. Saame

$$\begin{aligned} x &\geqslant y\,, \qquad | -y \\ x - y &\geqslant y - y\,, \\ x - y &\geqslant 0\,. \end{aligned}$$

Teisest küljest võime ka võrratusele $x - y \geqslant 0$ rakendada reeglit J1, võttes $z = y$:

$$\begin{aligned} x - y &\geqslant 0\,, \qquad | +y \\ x - y + y &\geqslant 0 + y\,, \\ x &\geqslant y\,. \end{aligned}$$

Niisiis on võrratused $x \geqslant y$ ja $x - y \geqslant 0$ samaväärsed, sest esimesest järeldub teine ja teisest esimene. Sellist olukorda võime lühidalt kirjutada

$$x \geqslant y \quad \Longleftrightarrow \quad x - y \geqslant 0\,.$$

Analoogiliselt saame reegli J1' abil näidata, et

$$x > y \quad \Longleftrightarrow \quad x - y > 0\,.$$

Üldisemalt saame samaväärsuse ka siis, kui me ei vii võrratuses ühte poolt täielikult teisele poole, nii näiteks kehtib ka

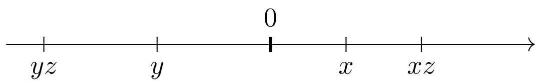
$$x_1 + x_2 \geqslant y_1 + y_2 \quad \Longleftrightarrow \quad x_1 + x_2 - y_2 \geqslant y_1\,.$$

Need reeglid võime lühidalt kokku võtta ühe lausega.

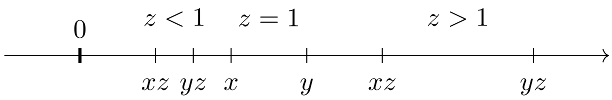
> Võrratus jääb samaväärseks, kui tema ühelt poolt viia mõni liidetav teisele poole vastandmärgiga.

Mis juhtub korrutamise puhul? Vaatleme arvude x ja y korrutamist arvuga $z > 0$. Kui $x = y$, siis muidugi $xz = xy$. Kui $x > y$, vaatame läbi kolm erinevat võimalust.

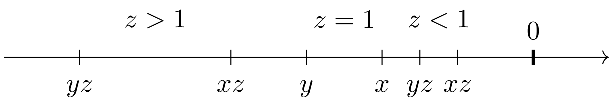
Juhul kui x on positiivne ja y mittepositiivne (st $x > 0 \geqslant y$), on tingimuse $z > 0$ tõttu vastavalt ka xz positiivne ja yz mittepositiivne. Seega $xz > 0 \geqslant yz$, mis tähendab, et $xz > yz$.



Juhul kui x ja y on mõlemad positiivsed, tähendab võrratus $x > y$, et $x - y > 0$. Järelikult ka $(x-y)z > 0$, mis annab $xz - yz > 0$ ehk $xz > yz$. Geomeetriliselt võime mõelda, et arvuga z korrutamine „venitab" lõike pikkustega x ja y sama teguri jagu ja kui lõik pikkusega y oli enne lühem kui lõik pikkusega x, on ka lõik pikkusega yz pärast venitamist lühem kui lõik pikkusega xz. See kehtib nii juhul $z > 1$ (ja lõike tõepoolest „venitatakse välja"), juhul $z < 1$ (kui lõike „surutakse kokku") kui ka juhul $z = 1$ (kui lõigud jäävad sama pikaks).



Juhul kui x on mittepositiivne ja y negatiivne (st $0 \geqslant x > y$), kehtib ülaltooduga analoogiline arutelu, ainult et reaaltelje negatiivses suunas:



Kokkuvõttes oleme näidanud, et reaalarvude korral kehtivad veel ka sellised reeglid:

> **(J2)** kui $x \geqslant y$, siis iga $z > 0$ korral $xz \geqslant yz$;
>
> **(J2')** kui $x > y$, siis iga $z > 0$ korral $xz > yz$.

Ülesanne 1.8 Näita, et $z > 0$ puhul kehtivad ka järeldused

$$xz \geqslant yz \Longrightarrow x \geqslant y\,,$$
$$xz > yz \Longrightarrow x > y\,.$$

Osutub, et tingimused J1, J1', J2 ja J2' kirjeldavad väga hästi ära järjestatud arvuhulkade taga oleva intuitsiooni ning teised järjestuse omadused saab juba otse nendest tuletada. Tõestame näiteks järgmise kasuliku teoreemi.

Teoreem 1.1 Võrratuse poolte korrutamine arvuga -1 pöörab võrratusemärgi vastupidiseks.

Tõestus. Eeldame, et $x \geqslant y$ ning tõestame, et $-x \leqslant -y$ ehk $-y \geqslant -x$. Kasutame omadust J1 ning liidame võrratuse $x \geqslant y$ mõlemale poolele arvu $z = -x - y$:

$$
\begin{aligned}
x &\geqslant y\,, \qquad | -x-y \\
x - x - y &\geqslant y - x - y\,, \\
-y &\geqslant -x\,,
\end{aligned}
$$

mida oligi tarvis tõestada. Täpselt sama arutelu kehtib ka range võrratuse korral, kasutades omadust J1'. □

Kuna positiivse arvuga korrutamine jätab võrratusemärgi samaks ja iga negatiivse arvu $-z$ saame esitada kujul $(-1) \cdot z$, kus $z > 0$, saame teoreemist 1.1 järgmise järelduse.

Järeldus 1.1 Võrratuse poolte korrutamine negatiivse arvuga pöörab võrratusemärgi vastupidiseks.

Ülesanne 1.9 Tõesta omadustele J2 ja J2' tuginedes, et $x, y \geqslant 0$ korral kehtivad lineaarselt järjestatud arvuhulgas samaväärsused

(a) $x \geqslant y \iff x^2 \geqslant y^2$;

(b) $x > y \iff x^2 > y^2$.

Kuivõrd tingimused J1, J1', J2 ja J2' kehtivad reaalarvude hulga $\mathbb{R}$ jaoks, kehtivad nad ja tema alamhulkade $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$ ja $\mathbb{Q}$ korral. Kuidas on lood aga kompleksarvudega? Mõnevõrra üllatuslikult selgub, et kompleksarvud pole lineaarselt järjestatavad.

Teoreem 1.2 Kompleksarvude hulgal $\mathbb{C}$ ei saa defineerida lineaarset järjestust nii, et kehtiksid tavalised arvutusreeglid ning järjestatud arvuhulkade omadused J1' ja J2'.

Tõestus. Näitame, et lineaarselt järjestatud arvuhulga iga elemendi x puhul kehtib võrratus $x^2 \geqslant 0$. Definitsiooni 1.2 põhjal peab kehtima kas $x = 0$, $x > 0$ või $x < 0$.

Kui $x = 0$, siis $x^2 = 0 \cdot 0 \geqslant 0$.

Kui $x > 0$, siis omaduse J2' põhjal $x \cdot x > 0 \cdot 0$, st $x^2 > 0$.

Kui $0 > x$, siis omaduse J1' põhjal võime selle võrratuse mõlemale poolele liita $-x$ ja saame $0 - x > x - x$ ehk $-x > 0$. Nüüd saame eelmise juhuga analoogiliselt tingimusest J2', et $(-x) \cdot (-x) > 0 \cdot 0$ ehk $x^2 > 0$.

Muuhulgas kuna $1 \neq 0$, siis $1 = 1^2 > 0$, millest mõlemale võrratuse poolele arvu -1 liites saame omaduse J1' põhjal $1 + (-1) > 0 + (-1)$ ehk $0 > -1$. Samas kompleksarvu i jaoks $i^2 = -1$, mis peaks arvu ruuduna eeltõestatu põhjal olema mittenegatiivne. Saime vastuolu. Niisiis ei saa kompleksarvude hulka lineaarselt järjestada viisil, mis säilitaks arvutusreeglid ning tagaks omadused J1' ja J2'. □

1.3 Lahendused

1.1

1.2

1.3

1.4

1.5

1.6

1.7

1.8 Olgu $z > 0$ ning eeldame võrratuse $xz \geqslant yz$ kehtivust. Kuna ka $\frac{1}{z} > 0$, saame kasutada reeglit J2, võttes z rolli $\frac{1}{z}$:

$$\begin{aligned} xz &\geqslant yz\,, \qquad \Big| \cdot \frac{1}{z} \\ xz \cdot \frac{1}{z} &\geqslant yz \cdot \frac{1}{z}\,, \\ x \cdot 1 &\geqslant y \cdot 1\,, \\ x &\geqslant y\,, \end{aligned}$$

mida oligi tarvis tõestada.

Järelduse $xz > yz \Rightarrow x > y$ tõestus on reegli J2' abil analoogiline.

1.9 (a) Näitame kõigepealt, et võrratusest $x \geqslant y$ järeldub võrratus $x^2 \geqslant y^2$. Ideeks on seejuures tõestada võrratuste ahel

$$x^2 \geqslant xy \geqslant y^2\,, \tag{1.1}$$

millest vajalik võrratus järeldub definitsioon 1.1 omaduse (c) põhjal.

Kui $x = 0$, siis tänu võrratustele $x \geqslant y \geqslant 0$ peab kehtima ka $y = 0$ ja võratuste ahel (1.1) kehtib võrdustena. Kui $x > 0$, saame omadusest J2, võttes $z = x$:

$$\begin{aligned} x &\geqslant y\,, \qquad | \cdot x \\ x \cdot x &\geqslant y \cdot x\,, \\ x^2 &\geqslant xy\,, \end{aligned}$$

mis tõestab ahela (1.1) esimese võrratuse.

Kui $y = 0$, kehtib ahela teine võrratus võrdusena. Kui $y > 0$, saame omaduses J2 võtta $z = y$:

$$\begin{aligned} x &\geqslant y\,, \qquad | \cdot y \\ x \cdot y &\geqslant y \cdot y\,, \\ xy &\geqslant y^2\,, \end{aligned}$$

mida oligi tarvis tõestada.

Eeldame nüüd, et $x, y \geqslant 0$ ja $x^2 \geqslant y^2$ ning näitame, et $x \geqslant y$.

Kuna vaadeldav arvuhulk on eelduse põhjal lineaarselt järjestatud, peab kehtima üks kolmest võrratusest $x > y$, $x = y$ või $x < y$. Esimese kahe korral vajalik järeldus kehtib, niisiis tuleb tõestada, et võrratus $x < y$ pole võimalik.

Eeldame vastuväiteliselt, et $y > x$, ja näitame ülaltehtuga analoogiliselt, et siis peavad kehtima võrratused $y^2 > xy \geqslant x^2$, millest järeldub $y^2 > x^2$, mis on vastuolu eeldusega $x^2 \geqslant y^2$.

Kuna $y > x \geqslant 0$, peab kehtima $y > 0$. Kasutame omadust J2', võttes $z = y$:

$$\begin{aligned} y &> x\,, \qquad & &| \cdot y \\ y \cdot y &> x \cdot y\,, \\ y^2 &> xy\,. \end{aligned}$$

Kui $x = 0$, kehtib teine võrratus $xy \geqslant x^2$ võrdusena. Kui $x > 0$, saame kasutada omadust J2', võttes $z = x$:

$$\begin{aligned} y &> x\,, \qquad & &| \cdot x \\ y \cdot x &> x \cdot x\,, \\ xy &> x^2\,, \end{aligned}$$

mida oligi tarvis tõestada.

(b) Samaväärsuse $x > y \iff x^2 > y^2$ tõestus on (a)-osaga analoogiline.

PEATÜKK 2

Arvvõrratused

2.1 Naturaalarvude võrdlemine

Naturaalarvude võrdlemine on lihtne, kui arvud on esitatud standardsel kümnendkujul. Siis saame peale vaadates öelda, et $5 < 7$, $100 \geqslant 11$, $204 \leqslant 204$ jne.

Naturaalarvud võivad aga olla esitatud ka avaldistena. Siis tuleb rohkem vaeva näha. Lihtsamal juhul saame avaldiste väärtused lihtsalt välja arvutada.

Ülesanne 2.1 Kumb arvudest on suurem, kas

(a) 2^3 või 3^2?

(b) 2^4 või 4^2?

(c) 2^5 või 5^2?

(d) 5^2 või 3^3?

(e) 2^{10} või 10^3?

Lahendus.

(a) $2^3 = 8$ ja $3^2 = 9$, seega $2^3 < 3^2$.

(b) $2^4 = 16$ ja $4^2 = 16$, seega $2^4 = 4^2$.

(c) $2^5 = 32$ ja $5^2 = 25$, seega $2^5 > 5^2$.

(d) $5^2 = 25$ ja $3^3 = 27$, seega $5^2 < 3^3$.

(e) $2^{10} = 1024$ ja $10^3 = 1000$, seega $2^{10} > 10^3$.

□

Ülesande 2.1 näited on piisavalt väikesed, et vastavad arvud peast või paberil välja arvutada. Astendamise korral kasvavad arvud aga väga kiiresti väga suurteks. Sel juhul tulevad appi kursuses „Arvuhulgad ja avaldised” õpitud astendamisreeglid (vt tolle kursuse jaotis 2.1).

Ülesanne 2.2 Kumb arvudest on suurem, kas $16^{25} \cdot 25^{100}$ või 7^{200}?

Lahendus. Paneme tähele, et $16^{25} = (2^4)^{25} = 2^{4 \cdot 25} = 2^{100}$ ja $7^{200} = 7^{2 \cdot 100} = (7^2)^{100} = 49^{100}$. Nüüd saame ülesande võrdlust teisendada

$$\begin{aligned} 16^{25} \cdot 25^{100} \ &? \ 7^{200}\,, \\ 2^{100} \cdot 25^{100} \ &? \ 49^{100}\,, \\ (2 \cdot 25)^{100} \ &? \ 49^{100}\,, \\ 50^{100} \ &? \ 49^{100}\,. \end{aligned}$$

Kuna $50 > 49$, siis ka $50^{100} > 49^{100}$, niisiis esimene arv on suurem. □

Ülesanne 2.3 (Sügisene lahtine võistlus 2014, noorem rühm) Kumb arvudest 2^{2014} ja $3^{303} \cdot 4^{404} \cdot 5^{505}$ on suurem?

2.2 Ratsionaalarvude võrdlemine

Olgu meil tarvis võrrelda kahte ratsionaalarvu. Jaotises1.2 nägime, et erimärgiliste arvude võrdlemine on triviaalne ja negatiivsete arvude võrdlemise saame taandada positiivsete arvude võrdlemisele. Niisis piisab uurida, kuidas võrrelda positiivseid ratsionaalarve.

See küsimus võib osutuda keerukamaks kui alul paistab, sest ratsionaalarvudel võib olla erinevaid esitusi. Kas sa näiteks oskad kohe öelda, kumb on suurem, kas $\frac{22}{7}$ (mida kasutas arvu π lähendina Archimedes) või $3{,}14$ (mida me sageli tänapäeval kasutame)?

Me teame, et ratsionaalarvu saab alati teisendada harilikuks murruks, niisiis $3{,}14 = \frac{314}{100}$. Seega tuleb uurida, milline võrratusemärk sobib avaldises

$$\frac{22}{7} \ ? \ \frac{314}{100}$$

küsimärgi asemele. Sellele küsimusele vastamiseks võime korrutada avaldise mõlemat poolt arvuga 700, mis annab

$$\begin{aligned} \frac{22}{7} \ &? \ \frac{314}{100}\,, \quad | \cdot 700 \\ \frac{22}{7} \cdot 700 \ &? \ \frac{314}{100} \cdot 700\,, \\ 22 \cdot 100 \ &? \ 314 \cdot 7\,, \\ 2200 \ &? \ 2198\,. \end{aligned}$$

Ilmselt $2200 > 2198$, aga mida me saame sellest järeldada algse võrratuse kohta? Paneme tähele, et ülaltehtud arutlussammud on kõik pööratavad. Sealhulgas saame korrutamise arvuga 700 pöörata tagasi, kui korrutame arve $22 \cdot 100$ ja $314 \cdot 7$ arvuga $\frac{1}{700}$. Kuivõrd $\frac{1}{700} > 0$, säilitab temaga korrutamine kõik võrratusemärgid (vt omadused (J2) ja (J2’)). Niisiis järeldub võrratusest

$2200 > 2198$, et $\frac{22}{7} > \frac{314}{100}$. (Tõepolest, arvuti või kalkulaatori abil saad kontrollida, et $\frac{22}{7} \approx 3{,}14285714$.)

Seda arutelu üldistades saame, et kui $b, d > 0$, siis

$$\frac{a}{b} > \frac{c}{d} \quad \Longleftrightarrow \quad ad > bc\,.$$

2.3 Ettevaatust nõudvad kohad võrratuste tõestamisel

Arutluskäigu pööratavus on võrratuste tõestamisel väga oluline. Meie eesmärk on ju tõestatav võrratus kuidagi *järeldada*, samas tahab inimese aju arutledes kusagilt pihta hakata ja kust mujalt on tal pihta hakata, kui eesmärgiks seatud võrratusest.

Peamine oht võrratuste tõestamisega viltu minna on võrrandite lahendamisest tuttavate võtete ettevaatamatu kasutamine. Nii võrrandite kui võrratuste korral on lubatud mõlemale poolele sama arvu liitmine-lahutamine ning mõlema poole korrutamine-jagamine sama positiivse arvuga.

Võrrandite lahendamisel tohib võrduse mõlemaid pooli ruutu tõsta ja kõik väärtused, mis sobisid algse võrrandi lahenditeks, rahuldavad ka ruututõstetud pooltega võrrandit. Tõsi, lisanduda võib võõrlahendeid, mistõttu tuleb kõiki saadavaid lahendeid pärast kontrollida.

Võrratustega on olukord aga hullem. Nimelt võib poolte ruututõstmine muuta tõese võrratuse vääraks, nagu võime näha järgmisest lihtsast näitest:

$$\begin{aligned} -3 &\leqslant 2\,, \quad |()^2 \\ (-3)^2 &\leqslant 2^2\,, \\ 9 &\leqslant 4\,. \end{aligned}$$

Kustkohast see pahandus tekib ja kas ruututõstmine on alati keelatud? Teise küsimuse vastus on ei. Ülesandes 1.9 tõestasime, et mittenegatiivsete arvude x ja y korral on võrratused $x \geqslant y$ ja $x^2 \geqslant y^2$ samaväärsed, st sel juhul säilitab ruututõstmine võrratusemärgi. Niisiis saab pahandus ruututõstmisega tekkida ainult siis, kui algse võrratuse ühel (või mõlemal) poolel on negatiivne arv. (Ka tõene võrratus $-3 \leqslant -2$ annab ruutu tõstes väära võrratuse $9 \leqslant 4$.)

Seega saame võrratuste tõestamisel järgmise reegli.

Enne võrratuse poolte ruutu tõstmist kontrolli, et võrratuse mõlemad pooled oleks mittenegatiivsed!

Teine operatsioon, mis võrduste tõestamisega võrreldes teist moodi töötab, on võrratuste liitmine. Liites kaks samapidist tõest võrratust on endiselt tulemuseks tõene võrratus, aga ka väärale võrratusele tõest võrratust liites võime saada tõese võrratuse:

$$\begin{array}{r} -2 \geqslant 1 \\ + \quad 8 \geqslant 2 \\ \hline 6 \geqslant 3 \end{array}$$

See tähendab, et võrratuste tõestamisel tuleb olla ettevaatlik, kui me liidame tõestatavale võrratusele tõese ning tõdeme, et tulemus on samuti tõene. Sellest ei järeldu algse võrratuse tõesus!

Põhjalikuma analüüsi selle kohta, millised sammud (ja miks!) on võrratuste tõestamisel lubatud, leiad „Võistlusmatemaatika põhivara” peatükist „Võrratuste tõestamine”.

2.4 Juuravaldiste võrdlemine

Ülesandes 1.9 nägime, et mittenegatiivsete arvude x ja y korral on võrratused $x \geqslant y$ ja $x^2 \geqslant y^2$ samaväärsed. See võimaldab ruutjuurt sisaldavaid mittenegatiivseid avaldisi võrrelda ruututõstmise teel.

Ülesanne 2.4 Kumb arvudest $4\sqrt{3}$ ja 7 on suurem?

Lahendus. Kuna $4\sqrt{3}$ ja 7 on positiivsed arvud, on järgmised võrdlused samaväärsed iga võrrarusemärgi $?$ korral:

$$\begin{aligned} 4\sqrt{3} \;&?\; 7\,, \qquad |()^2 \\ (4\sqrt{3})^2 \;&?\; 7^2\,, \\ 16 \cdot 3 \;&?\; 49\,, \\ 48 \;&?\; 49\,. \end{aligned}$$

Et $48 < 49$, siis ka $4\sqrt{3} < 7$. □

Ülesanne 2.5 Kumb arvudest $12\sqrt{2}$ ja 17 on suurem?

Ülesanne 2.6 (Piirkonnavoor 2025, 10. klass) Järjesta kasvamise järjekorras arvud $7\sqrt{5}$, $11\sqrt{2}$ ja $9\sqrt{3}$.

Ülesanne 2.7 Kumb arvudest $3 + 4\sqrt{2}$ ja $5\sqrt{3}$ on suurem?

Ülesanne 2.8 Kumb arvudest $6\sqrt{2}$ ja $2\sqrt{5} + 4$ on suurem?

Ülesanne 2.9 (Piirkonnavoor 2025, 11. klass) Kumb arvudest $9\sqrt{5}$ ja $8 + 7\sqrt{3}$ on suurem?

Ülesanne 2.10 (Piirkonnavoor 2017, 11. klass) Kumb arvudest $7 + \sqrt{37}$ ja $3\sqrt{19}$ on suurem?

Kuidas on lugu avaldistega, mis sisaldavad kõrgema astme juuri (kuupjuur, 4. juur jne)? Ülesande 1.9 lahendusega analoogiliselt saame näidata, et mittenegatiivsete x ja y korral järelduvad võrratusest $x \geqslant y$ võrratused

$$\begin{gathered} x^3 \geqslant x^2y \geqslant xy^2 \geqslant y^3\,, \\ x^4 \geqslant x^3y \geqslant x^2y^2 \geqslant xy^3 \geqslant y^4 \end{gathered}$$

jne.

Veel enamgi, kui eeldada näiteks, et $x^3 \geqslant y^3$, siis on lihtne näha, et võrratus $x < y$ annab vastuolu $x^3 < y^3$. Seega peab kehtima $x \geqslant y$ ja järelikult kehtib samaväärsus $x \geqslant y \iff x^3 \geqslant y^3$. Sama arutelu saame üldistada suvalisele naturaalarvulisele astmele. Sõnastame selle tulemuse teoreemina.

Teoreem 2.1 Kui $n \geqslant 1$ on naturaalarv, kehtivad igas lineaarselt järjestatud arvuhulgas $x, y \geqslant 0$ jaoks samaväärsused

$$x \geqslant y \iff x^n \geqslant y^n\,,$$
$$x > y \iff x^n > y^n\,.$$

Ülesanne 2.11 Kumb arvudest $\sqrt{2}$ ja $\sqrt[3]{3}$ on suurem?

Ülesanne 2.12 (Piirkonnavoor 2010, 11. klass) Kas arv $\sqrt{5} \cdot \sqrt[4]{6}$ on suurem või väiksem arvust $3{,}5$?

Ülesanne 2.13 (Piirkonnavoor 2014, 11. klass) Kumb arvudest $\sqrt[7]{3}$ ja $\sqrt[3]{\frac{5}{3}}$ on suurem?

2.5 Lahendused

2.3 Vastus: $3^{303} \cdot 4^{404} \cdot 5^{505}$ on suurem.

Võrdleme ülesandes antud arve ning lihtsustame võrdlust arvu 4 astmete taandamisega:

$$\begin{aligned} 2^{2014} &\ ?\ 3^{303} \cdot 4^{404} \cdot 5^{505}\,, \\ 4^{1007} &\ ?\ 3^{303} \cdot 4^{404} \cdot 5^{505}\,, \\ 4^{603} &\ ?\ 3^{303} \cdot 5^{505}\,. \end{aligned}$$

Kindlasti kehtib võrratus $5^{505} > 4^{505}$, niisiis piisaks, kui suudaksime lisaks tõestada võratuse $3^{303} > 4^{98}$. Seda saame teha näiteks võrratuste ahelaga

$$3^{303} > 3^{300} = (3^3)^{100} = 27^{100} > 4^{100} > 4^{98}\,.$$

Niisiis peab kehtima ka võrratus $3^{303} \cdot 4^{404} \cdot 5^{505} > 2^{2014}$.

2.5 Vastus: 17 on suurem.

Kuna $12\sqrt{2}$ ja 17 on positiivsed arvud, on järgmised võrdlused samaväärsed iga võrrarusemärgi $?$ korral:

$$\begin{aligned} 12\sqrt{2} &\ ?\ 17\,, \quad |()^2 \\ (12\sqrt{2})^2 &\ ?\ 17^2\,, \\ 144 \cdot 2 &\ ?\ 289\,, \\ 288 &\ ?\ 289\,. \end{aligned}$$

Et $288 < 289$, siis ka $12\sqrt{2} < 17$.

2.6 Vastus: $11\sqrt{2} < 9\sqrt{3} < 7\sqrt{5}$.

Kuna kõik antud arvud on positiivsed ja ruututõstmine säilitab arvude omavahelise järjekorra, võime uurida nende arvude ruutude järjestust:

$$\begin{aligned}(7\sqrt{5})^2 &= 49 \cdot 5 = 245\,,\\ (11\sqrt{2})^2 &= 121 \cdot 2 = 242\\ (9\sqrt{3})^2 &= 81 \cdot 3 = 243\,.\end{aligned}$$

Kuna $242 < 243 < 245$, siis ka $11\sqrt{2} < 9\sqrt{3} < 7\sqrt{5}$.

2.7 Vastus: $5\sqrt{3}$ on suurem.

Ülesande avaldised on positiivsed, seega võime võrrelda nende ruute.

$$\begin{aligned}3 + 4\sqrt{2} &\ ?\ 5\sqrt{3}\,, \quad |()^2\\ (3 + 4\sqrt{2})^2 &\ ?\ (5\sqrt{3})^2\,,\\ 9 + 24\sqrt{2} + 32 &\ ?\ 25 \cdot 3\,,\\ 24\sqrt{2} + 41 &\ ?\ 75\,, \quad | - 41\\ 24\sqrt{2} &\ ?\ 34\,, \quad | : 2\\ 12\sqrt{2} &\ ?\ 17\,.\end{aligned}$$

Ülesandes 2.5 nägime, et $12\sqrt{2} < 17$. Järelikult ka $3 + 4\sqrt{2} < 5\sqrt{3}$.

2.8 Vastus: $6\sqrt{2}$ on suurem.

Ülesande avaldised on positiivsed, seega võime võrrelda nende ruute.

$$\begin{aligned}6\sqrt{2} &\ ?\ 2\sqrt{5} + 4\,, \quad |()^2\\ (6\sqrt{2})^2 &\ ?\ (2\sqrt{5} + 4)^2\,,\\ 36 \cdot 2 &\ ?\ 4 \cdot 5 + 16\sqrt{5} + 16\,,\\ 72 &\ ?\ 16\sqrt{5} + 36\,, \quad | - 36\\ 36 &\ ?\ 16\sqrt{5}\,.\end{aligned}$$

Viimase võrdluse arvud on positiivsed, niisiis võime võrrelda nende ruute. Et $36^2 = 1296$ ja $(16\sqrt{5})^2 = 256 \cdot 5 = 1280$, siis $36 > 16\sqrt{5}$ ja järelikult ka $6\sqrt{2} > \sqrt{5} + 4$.

2.9 Vastus: $9\sqrt{5}$ on suurem.

Ülesande avaldised on positiivsed, seega võime võrrelda nende ruute.

$$\begin{aligned}9\sqrt{5} &\ ?\ 8 + 7\sqrt{3}\,, \quad |()^2\\ (9\sqrt{5})^2 &\ ?\ (8 + 7\sqrt{3})^2\,,\\ 81 \cdot 5 &\ ?\ 64 + 112\sqrt{3} + 49 \cdot 3\,,\\ 405 &\ ?\ 112\sqrt{3} + 211\,, \quad | - 211\\ 194 &\ ?\ 112\sqrt{3}\,, \quad | : 2\\ 97 &\ ?\ 56\sqrt{3}\,.\end{aligned}$$

Viimase võrdluse arvud on jälle positiivsed, seega võime nad võrdlemiseks ruutu tõsta. Saame $97^2 = 9409$ ja $(56\sqrt{3})^2 = 3136 \cdot 3 = 9408$. Kuna $9409 > 9408$, peab kehtima ka võrratus $9\sqrt{5} > 8 + 7\sqrt{3}$.

Arvutil või kalkulaatoril saame kontrollida, et $9\sqrt{5} \approx 20{,}1246$ ja $8+7\sqrt{3} \approx 20{,}1244$, niisiis on nende kahe arvu vahe imepisike!

2.10 Vastus: $7 + \sqrt{37}$ on suurem.

Ülesande avaldised on positiivsed, niisiis võime nad võrdlemiseks ruutu tõsta:

$$\begin{aligned} 7 + \sqrt{37} &\ ?\ 3\sqrt{19}\,, \\ (7 + \sqrt{37})^2 &\ ?\ (3\sqrt{19})^2\,, \\ 49 + 14\sqrt{37} + 37 &\ ?\ 9 \cdot 19\,, \\ 14\sqrt{37} + 86 &\ ?\ 171\,, \\ 14\sqrt{37} &\ ?\ 85\,, \\ (14\sqrt{37})^2 &\ ?\ 85^2\,, \\ 196 \cdot 37 &\ ?\ 85^2\,. \end{aligned}$$

Nüüd võime vahetult arvutada, et $196 \cdot 37 = 7252$ ja $85^2 = 7225$, niisiis $196 \cdot 37 > 85^2$ ja kuna kõik teisendused säilitasid võrratusmärgi, peab kehtima ka $7 + \sqrt{37} > 3\sqrt{19}$.

2.11 Vastus: $\sqrt[3]{3}$ on suurem.

Kuidas võrrelda ruutjuurt ja kuupjuurt? Selle ülesande võtmeks on leida ühine astendaja, millega astendades kaovad mõlemad juured. Niisuguseks astendajaks sobib juurenäitajate 2 ja 3 vähim ühiskordne 6. Arvestades, et ülesande arvud on positiivsed, saame järgmise samaväärsete võrdluste jada:

$$\begin{aligned} \sqrt{2} &\ ?\ \sqrt[3]{3}\,, \quad |()^6 \\ (\sqrt{2})^6 &\ ?\ (\sqrt[3]{3})^6\,, \\ 2^{\frac{1}{2}\cdot 6} &\ ?\ 3^{\frac{1}{3}\cdot 6}\,, \\ 2^3 &\ ?\ 3^2\,. \end{aligned}$$

Kuna $2^3 = 8 < 9 = 3^2$, peab lehtima ka võrratus $\sqrt{2} < \sqrt[3]{3}$.

Tõepoolest, arvuti või kalkulaatoriga saame kontrollida, et $\sqrt{2} \approx 1{,}41$ ja $\sqrt[3]{3} \approx 1{,}44$.

2.12 Vastus: väiksem.

Selleks, et võrrelda (positiivseid) arve $\sqrt{5} \cdot \sqrt[4]{6}$ ja $3{,}5 = \frac{7}{2}$, võime nad tõsta

4. astmele. Teoreemi 2.1 põhjal saame samaväärsete võrratuste ahela:

$$\begin{aligned}
\sqrt{5}\cdot\sqrt[4]{6} \ &? \ \frac{7}{2}\,,\\
(\sqrt{5}\cdot\sqrt[4]{6})^4 \ &? \ \left(\frac{7}{2}\right)^4\,,\\
5^2\cdot 6 \ &? \ \frac{7^4}{2^4}\,,\\
150 \ &? \ \frac{2401}{16}\,,\\
16\cdot 150 \ &? \ 2401\,,\\
2400 &< 2401\,,
\end{aligned}$$

seega $\sqrt{5}\cdot\sqrt[4]{6} < 3{,}5$.

2.13 Vastus: $\sqrt[3]{\frac{5}{3}}$ on suurem.

Selleks, et antud avaldistes juurtest lahti saada, võime mõlemad tõsta 21. astmele. Teoreemi 2.1 põhjal saame samaväärsete võrratuste ahela:

$$\begin{aligned}
\sqrt[7]{3} \ &? \ \sqrt[3]{\frac{5}{3}}\,,\\
\left(\sqrt[7]{3}\right)^{21} \ &? \ \left(\sqrt[3]{\frac{5}{3}}\right)^{21}\,,\\
3^3 \ &? \ \frac{5^7}{3^7}\,,\\
3^3\cdot 3^7 \ &? \ 5^7\,,\\
3^{10} \ &? \ 5^7\,.
\end{aligned}$$

Nüüd võime lihtsalt arvutada, et $3^{10} = 59049$ ja $5^7 = 78125$, niisiis $3^{10} < 5^7$, mistõttu ka $\sqrt[7]{3} < \sqrt[3]{\frac{5}{3}}$.

PEATÜKK 3

Võrratuste tõestamine

Kuna kompleksarvude puhul pole järjestus teoreemi 1.2 põhjal hästi defineeritav, vaatleme siin peatükis ainult reaalarvuliste muutujatega võrratusi.

Ülesanne 3.1 Võrdle arve järgmistes paarides:

(a) $2 \cdot 4$ ja $3 \cdot 3$,

(b) $5 \cdot 7$ ja $6 \cdot 6$,

(c) $9 \cdot 11$ ja $10 \cdot 10$,

(d) $1{,}5 \cdot 3{,}5$ ja $2{,}5 \cdot 2{,}5$.

Kas paned midagi huvitavat tähele? Sõnasta reegel ja põhjenda see!

Ülesanne 3.2 Aga kuidas on paaridega

(a) $2 \cdot 6$ ja $4 \cdot 4$,

(b) $15 \cdot 25$ ja $20 \cdot 20$,

(c) $9{,}9 \cdot 10{,}1$ ja $10 \cdot 10$?

Sõnasta üldine reegel ja põhjenda see!

3.1 Reaalarvu ruut on mittenegatiivne

Peatükis 2 nägime, et igas lineaarselt järjestatud arvuhulgas (sh reaalavude hulgas) kehtib iga elemendi x korral võrratus $x^2 \geqslant 0$, kusjuures $x^2 = 0$ parajasti siis, kui $x = 0$. See lihtne tähelepanek võimaldab lahendada palju ülesandeid ja teha huvitavaid järeldusi.

Nii näiteks peavad iga $x \in \mathbb{R}$ korral kehtima võrratused

$$
\begin{aligned}
(x-1)^2 &\geqslant 0\,,\\
x^2-2x+1 &\geqslant 0\,,\\
x^2+1 &\geqslant 2x\,.
\end{aligned}
$$

Ülesanne 3.3 Joonesta arvutis funktsioonide $y = x^2 + 1$ ja $y = 2x$. Veendu, et funktsiooni $y = x^2 + 1$ graafik jääb kõikjal ülespoole funktsiooni $y = 2x$ graafikust, välja arvatud ühel kohal. Mis koht see on?

Üks tüüpiline võte võrratuseülesannete lahendamisel on *ruutude eraldamine*, kus antud avaldis esitatakse täisruutude summana.

Ülesanne 3.4 Tõesta, et iga reaalarvu x korral kehtib võrratus

$$x^4 + 3x^2 + 4x + 5 > 0\,.$$

Lahendus. Esitame ülesande avaldise kahe täisruudu summana:

$$x^4 + 3x^2 + 4x + 5 = (x^4 + 2x^2 + 1) + (x^2 + 4x + 4) = (x^2 + 1)^2 + (x + 2)^2\,.$$

Kuna $x^2 \geqslant 0$, siis $x^2 + 1 > 0$ ja $(x^2 + 1)^2 > 0$. Samas ka $(x + 2)^2 \geqslant 0$, seega kokkuvõttes on nende avaldiste summa rangelt suurem kui 0. □

Ülesanne 3.5 Tõesta, et kõigi reaalarvude x, y ja z korral kehtib võrratus

$$x^2 + y^2 + z^2 \geqslant xy + yz + zx\,.$$

Millal kehtib võrdus?

Lahendus. Kirjutame tõestatava võrratuse ümber kujul

$$x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx \geqslant 0\,.$$

Selleks, et tunda vasaku poole avaldises ära ruutude summa, tasub teha veel üks trikk ja korrutada võrratuse mõlemad pooled 2-ga:

$$
\begin{aligned}
x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx &\geqslant 0\,, \quad | \cdot 2\\
2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy - 2yz - 2zx &\geqslant 0\,,\\
(x^2 - 2xy + y^2) + (y^2 - 2yz + z^2) + (z^2 - 2zx + x^2) &\geqslant 0\,,\\
(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 &\geqslant 0\,.
\end{aligned}
$$

Viimane võrratus aga kehtib, sest vasakul poolel on tegemist on reaalarvude ruutude summaga. Võrdus kehtib parajasti siis, kui kõigi liidetavate väärtus on 0, st juhul $x = y = z$. □

Ülesanne 3.6 Tõesta, et mistahes reaalarvuliste x ja y väärtuste korral kehtib võrratus

$$x^2 + y^2 + 2x + 2y + 2xy + 1 \geqslant 0\,.$$

Ülesanne 3.7 (Lõppvoor 1993, 10. klass) Tõesta, et mistahes reaalarvuliste x ja y väärtuste korral kehtib võrratus

$$x(5x+2)+y(4x+y)+5>0\,.$$

Ülesanne 3.8 (Lõppvoor 1987, 9. klass) Tõesta, et kui $2x+4y=1$, siis $20x^2+20y^2\geqslant 1$.

Ülesanne 3.9 (Lõppvoor 1995, 10. klass) Tõesta, et mistahes reaalarvu $x\geqslant 0$ korral kehtib võrratus

$$\sqrt{15}(4+\sqrt{7x})\leqslant 9\sqrt{4+5x}\,.$$

Ülesanne 3.10 (Lõppvoor 2018, 10. klass) Tõesta, et kõigi reaalarvude x,y,z korral

$$5(x^2+y^2+z^2)\geqslant 4(xy+yz+zx)\;.$$

Ülesanne 3.11 (Piirkonnavoor 1993, 11. klass) Olgu x,y positiivsed arvud ja $x+y=1$. Tõesta, et

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)\geqslant 9\,.$$

Ülesanne 3.12 (Piirkonnavoor 1987, 10. klass) Tõesta, et kui $xy=1$, siis

$$x^2+y^2\geqslant 2\sqrt{2}(x-y)\,.$$

Vahel saab võrratuste abil lahendada ka võrrandeid. See osutub võimalikuks siis, kui võrrand kirjeldab teatud võrratuse võrdusejuhtu.

Ülesanne 3.13 (Piirkonnavoor 2013, 10. klass) Leia võrrandi

$$x^2+\frac{1}{x^2}=\frac{1}{2}\cdot\left(x+\frac{1}{x}\right)^2$$

kõik reaalarvulised lahendid.

Lahendus. Tõstame parema poole sulgavaldise ruutu ja teisendame:

$$\begin{aligned}
x^2+\frac{1}{x^2}&=\frac{1}{2}\cdot x^2+1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2}\,,\\
\frac{1}{2}\cdot x^2-1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2}&=0\,,\\
\frac{1}{2}\cdot\left(x^2-2+\frac{1}{x^2}\right)&=0\,,\\
\frac{1}{2}\cdot\left(x-\frac{1}{x}\right)^2&=0\,.
\end{aligned}$$

Iga reaalarvu x korral kehtib võrratus $\left(x-\frac{1}{x}\right)^2\geqslant 0$, kusjuures võrdus kehtib parajasti siis, kui $x-\frac{1}{x}=0$ ehk $x=\frac{1}{x}$ ehk $x^2=1$. Viimast võrdust rahuldavad ainult $x=1$ ja $x=-1$ ning vahetu kontroll näitab, et need mõlemad väärtused sobivad. □

3.2 Kahe arvu aritmeetilise ja geomeetrilise keskmise vaheline võrratus

Olgu $x, y \geqslant 0$; siis on olemas reaalarvulised ruutjuured $\sqrt{x}$ ja $\sqrt{y}$. Vaatleme avaldise $\sqrt{x} - \sqrt{y}$ ruutu, mis peab olema mittenegatiivne:

$$\begin{aligned}
(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 &\geqslant 0\,, \\
(\sqrt{x})^2 - 2\sqrt{x}\sqrt{y} + (\sqrt{y})^2 &\geqslant 0\,, \\
x - 2\sqrt{xy} + y &\geqslant 0\,, \\
x + y &\geqslant 2\sqrt{xy}\,, \\
\frac{x+y}{2} &\geqslant \sqrt{xy}\,.
\end{aligned}$$

Saadud võrratuses kehtib võrdus parajast siis kui $\sqrt{x} = \sqrt{y}$ ehk kui $x = y$.

Selle võrratuse pooled esinevad matemaatikas väga sageli ja neile on antud eraldi nimed.

Definitsioon 3.1. *Reaalarvude x ja y* aritmeetiliseks keskmiseks *nimetatakse suurust $\frac{x+y}{2}$ ja* geomeetriliseks keskmiseks *suurust $\sqrt{xy}$.*

Sõnastame saadud tulemuse teoreemina.

Teoreem 3.1 Mittenegatiivsete reaalarvude x ja y aritmeetiline keskmine on alati vähemalt sama suur kui geomeetriline, st

$$\frac{x+y}{2} \geqslant \sqrt{xy}\,.$$

Võrdus kehtib parajasti siis, kui $x = y$.

Teoreemil 3.1 on olemas ka ilus geomeetriline tõestus (kust selgub muuhulgas, mida geomeetrilist geomeetrilises keskmises õieti on).

Tõestus. Vaatleme lõiku AB pikkusega $x+y$ ja joonestame talle kui diameetrile poolringjoone. Olgu C selle lõigu niisugune punkt, et $|AC| = x$ (seega $|CB| = y$), ning olgu O lõigu AB keskpunkt. Tõmbame lõigule AB punktides C ja O ristsirged ning lõikugu need poolringjoonega vastavalt punktides D ja E, vt joonist 3.1.

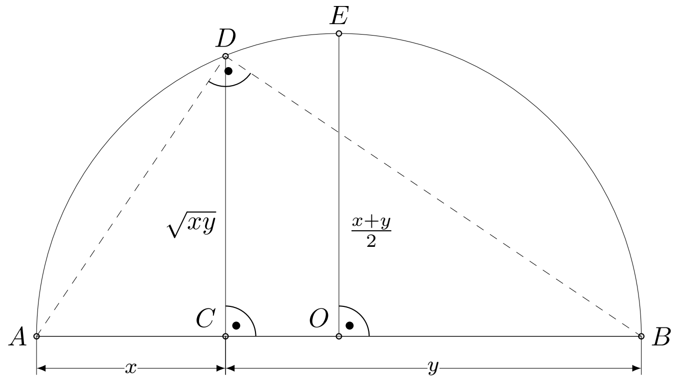
Kuna OE on poolringjoone raadius, siis $|OE| = \frac{|AB|}{2} = \frac{x+y}{2}$.

Lõigu CD pikkuse arvutamiseks paneme kõigepealt tähele, et $\triangle ADC \sim \triangle ABD$ tunnuse NN alusel, sest nurk tipu A juures on ühine ning $\angle ACD = 90°$ ja $\angle ADB = 90°$ kui diameetrile toetuv piirdenurk. Sama moodi näitame, et $\triangle ABD \sim \triangle DBC$. Järelikult $\triangle ADC \sim \triangle DBC$. Sarnaste kolmnurkade vastavad küljed on võrdelised, seega

$$\frac{|AC|}{|CD|} = \frac{|CD|}{|CB|}\,,$$

millest omakorda saame

$$|CD|^2 = |AC| \cdot |CB| = xy \quad \text{ehk} \quad |CD| = \sqrt{xy}\,.$$



Joonis 3.1: Aritmeetilise ja geomeetrilise keskmise vaheline võrratus

Jooniselt 3.1 on ilmne, et $|CD| \leqslant |OE|$, kusjuures võrdus kehtib parajasti siis, kui C on lõigu AB keskpunkt ehk $x = y$. □

Aritmeetilise ja geomeetrilise keskmise vaheline võrratus võimaldab anda summadele alumisi piire korrutiste kaudu. Järgmise ülesande tulemus leiab teiste ülesannete lahendamisel ka iseseisvat kasutust.

Ülesanne 3.14 Tõesta, et iga positiivse reaalarvu summa tema pöördarvuga on vähemalt 2, st iga $x > 0$ korral kehtib võrratus

$$x + \frac{1}{x} \geqslant 2\,.$$

Millal kehtib selles võrratuses võrdus?

Lahendus. Hindame summat $x + \frac{1}{x}$. Selleks võime kasutada aritmeetilise ja geomeetrilise keskmise vahelist võrratust (valides $y = \frac{1}{x}$, mis peab samuti positiivne olema):

$$\frac{x + \frac{1}{x}}{2} \geqslant \sqrt{x \cdot \frac{1}{x}} = \sqrt{1} = 1\,,$$
$$x + \frac{1}{x} \geqslant 2$$

nagu oligi vaja.

Lisaks näeme, et võrdus kehtib parajasti siis, kui $x = \frac{1}{x}$ ehk $x^2 = 1$, mis tänu arvu x positiivsusele on samaväärne tingimusega $x = 1$. □

Ülesanne 3.15 Joonista arvutil funktsiooni $y = x + \frac{1}{x}$ graafik. Veendu, et $x > 0$ korral jääb graafik kõrgemale joonest $y = 2$. Mis toimub negatiivsete x väärtuste korral? Sõnasta ja tõesta vastav väide!

Ülesanne 3.16 (Lõppvoor 1986, 11. klass) Tõesta võrratus

$$\frac{a^2+3}{\sqrt{a^2+2}} > 2\,.$$

Ülesande 3.14 tulemust saab sõnastada ka järgnevalt.

Ülesanne 3.17 Tõesta, et positiivsete reaalarvude a ja b korral kehtib võrratus

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a} \geqslant 2\,.$$

Millal kehtib võrdus?

Kahe arvu aritmeetilise ja geomeetrilise keskmise vahelist võrratust sõnastatakse vahel ka järgmisel kujul.

Ülesanne 3.18 Tõesta, et kõigi reaalarvude x ja y korral kehtib võrratus

$$\frac{x^2+y^2}{2} \geqslant xy\,,$$

kusjuures võrdus kehtib parajasti siis, kui $x = y$.

Ülesanne 3.19 (Piirkonnavoor 1993, 12. klass) Tõesta, et täisnurkse kolmnurga pindala ei ole suurem kui üks neljandik hüpotenuusi ruudust. Millisel juhul võib pindala võrduda ühe neljandikuga hüpotenuusi ruudust?

Ülesanne 3.20 Tõesta, et kõigi positiivsete arvude x, y, z korral kehtib võrratus

$$(x+y)(y+z)(z+x) \geqslant 8xyz\,.$$

Millal kehtib võrdus?

Ülesanne 3.21 (Sügisene lahtine võistlus 2022, noorem rühm) Leia avaldise

$$\frac{(x^2+1)(4y^2+1)(9z^2+1)}{6xyz}$$

vähim võimalik väärtus, kui muutujate x, y ja z väärtused on positiivsed arvud (mitte tingimata täisarvud).

3.3 Aritmeetilise ja geomeetrilise keskmise vahelise võrratuse üldkuju

Ülesanne 3.22 Tõesta, et suvaliste mittenegatiivsete reaalarvude x_1, x_2, x_3, x_4 jaoks kehtib võrratus

$$\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4} \geqslant \sqrt[4]{x_1x_2x_3x_4}\,,$$

kusjuures võrdus kehtib parajasti siis, kui $x_1 = x_2 = x_3 = x_4$.

Ülesanne 3.22 motiveerib järgmise üldistatud definitsiooni.

Definitsioon 3.2. *Olgu antud naturaalarv $n > 1$ ja reaalarvud $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Nende reaalarvude* aritmeetiliseks keskmiseks *nimetatakse suurust*

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$$

ja geomeetriliseks keskmiseks *suurust*

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}\,.$$

On võimalik tõestada, et kehtib ka teoreemi 3.1 üldistus.

Teoreem 3.2 Mittenegatiivsete reaalarvude $x_1, x_2, \ldots, x_n$ aritmeetiline keskmine on alati vähemalt sama suur kui geomeetriline, st

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}\,.$$

Võrdus kehtib parajasti siis, kui $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

Selle teoreemi täieliku tõestuse leiab lugeja „Võistlusmatemaatika põhivara” peatükist „Põhivõrratused”.

Ülesanne 3.23 Tõesta, et iga reaalarvu $x \geqslant 0$ korral kehtib võrratus

$$\frac{1 + x + x^3 + x^4}{4} \geqslant x^2\,.$$

Millal kehtib võrdus?

Joonista arvuti abil funktsioonide $y = \frac{1+x+x^3+x^4}{4}$ ja $y = x^2$ graafikud. Kas ülesande võrratus kehtib ka negatiivsete x väärtuste puhul?

Ülesanne 3.24 (Piirkonnavoor 1974, 9. klass) Tõesta, et positiivsete arvude a, b ja c korral

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geqslant 3\,,$$

kusjuures võrdus kehtib juhul, kui $a = b = c$.

Ülesanne 3.25 (Lõppvoor 2003, 10. klass) Olgu a, b ja c positiivsed reaalarvud, mis ei ole suuremad arvust 2. Tõesta, et kehtib võrratus

$$\frac{abc}{a + b + c} \leqslant \frac{4}{3}\,.$$

Ülesanne 3.26 (Lõppvoor 1996, 12. klass) Milliste positiivsete reaalarvude x

korral on avaldisel

$$x^{1000} + x^{900} + x^{90} + x^6 + \frac{1996}{x}$$

vähim väärtus?

3.4 Lahendused

3.1 Võrdleme ülesande korrutisi:

$$\begin{aligned}
2 \cdot 4 = 8 < 9 = 3 \cdot 3\,, \\
5 \cdot 7 = 35 < 36 = 6 \cdot 6\,, \\
9 \cdot 11 = 99 < 100 = 10 \cdot 10\,, \\
1{,}5 \cdot 3{,}5 = 5{,}25 < 6{,}25 = 2{,}5 \cdot 2{,}5\,.
\end{aligned}$$

Näeme, et paremad pooled on alati suuremad, kusjuures täpselt 1 võrra.

Üldjuhul on võrratuste vasakul pool arvud $(x-1)\cdot(x+1)$ ning paremal pool arvud $x \cdot x$. Kuna

$$(x-1)\cdot(x+1) = x^2 - 1 < x \cdot x\,,$$

kehtib see reegel kõigi reaalarvude x korral.

3.2 Võrdleme ülesande korrutisi:

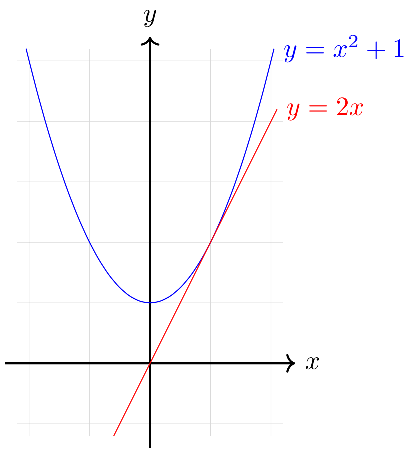
$$\begin{aligned}
2 \cdot 6 = 12 < 16 = 4 \cdot 4\,, \\
15 \cdot 25 = 375 < 400 = 20 \cdot 20\,, \\
9{,}9 \cdot 10{,}1 = 99{,}99 < 100 = 10 \cdot 10\,.
\end{aligned}$$

Jälle on paremad pooled suuremad. Vasaku poole korrutiste üldkuju on nüüd $(x-d)\cdot(x+d)$, parema poole üldkuju on aga endiselt $x \cdot x = x^2$. Vasaku poole saame summa ja vahe korrutise valemi järgi teisendada kujule

$$(x-d)\cdot(x+d) = x^2 - d^2.$$

Kui $d \neq 0$, siis $d^2 > 0$, seega $x^2 - d^2 < x^2$. Niisiis kehtib ka seekord võrratus üldjuhul kõigi reaalarvude x ja $d \neq 0$ korral.

3.3 Joonis näeb välja niisugune:



Näeme, et graafikud puutuvad ainult kohal $x = 1$. Nii peabki olema, sest võrratus $x^2 + 1 \geqslant 2x$ on ju samaväärne võrratusega $(x-1)^2 \geqslant 0$, kus võrdus kehtib parajasti juhul $x = 1$.

3.6 Otsime ülesande avaldisest täisruutu:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + 2x + 2y + 2xy + 1 &= (x^2 + 2xy + y^2) + 2x + 2y + 1 = \\ &= (x+y)^2 + 2(x+y) + 1 = \\ &= ((x+y)+1)^2 = (x+y+1)^2 \,. \end{aligned}$$

Seega esitub ülesande avaldis täisruuduna, mis tähendab, et tema väärtus on suvaliste $x, y \in \mathbb{R}$ korral mittenegatiivne.

3.7 Teisendame ülesande avaldist, eraldades täisruudud:

$$\begin{aligned} x(5x+2) + y(4x+y) + 5 &= 5x^2 + 2x + 4xy + y^2 + 5 = \\ &= x^2 + 2x + 1 + 4x^2 + 4xy + y^2 + 4 = \\ &= (x+1)^2 + (2x+y)^2 + 4 \,. \end{aligned}$$

Kahe täisruudu ja ühe positiivse arvu summa peab kokkuvõttes olema positiivne.

3.8 Tingimusest $2x + 4y = 1$ saame $x = \frac{1-4y}{2}$. Asendame selle avaldisse $20x^2 + 20y^2 - 1$:

$$\begin{aligned} 20x^2 + 20y^2 - 1 &= 20 \cdot \left(\frac{1-4y}{2}\right)^2 + 20y^2 - 1 = \\ &= 20 \cdot \frac{1 - 8y + 16y^2}{4} + 20y^2 - 1 = \\ &= 5 \cdot (1 - 8y + 16y^2) + 20y^2 - 1 = \\ &= 5 - 40y + 80y^2 + 20y^2 - 1 = \\ &= 100y^2 - 40y + 4 = \\ &= (10y - 2)^2 \geqslant 0 \,, \end{aligned}$$

millest järeldubki võrratus $20x^2 + 20y^2 \geqslant 1$.

3.9 Võrratuse mõlemad pooled on positiivsed, niisiis jääb võrratus ruutu tõstes algsega samaväärseks:

$$\begin{aligned} \sqrt{15}(4+\sqrt{7x}) &\leqslant 9\sqrt{4+5x}\,, \qquad |()^2 \\ 15\cdot(16+8\sqrt{7x}+7x) &\leqslant 81\cdot(4+5x)\,, \\ 240+120\sqrt{7x}+105x &\leqslant 324+405x\,, \\ 0 &\leqslant 84-120\sqrt{7x}+300x\,, \\ 0 &\leqslant 28-40\sqrt{7x}+100x\,, \\ 0 &\leqslant (2\sqrt{7}-10\sqrt{x})^2\,. \end{aligned}$$

Viimane võrratus kehtib, sest tema paremal pool on reaalarvulise avaldise ruut. Võrdus kehtib parajasti siis, kui $2\sqrt{7}=10\sqrt{x}$ ehk $x=\frac{7}{25}$.

3.10 Ülesande 3.5 põhjal teame, et

$$x^2+y^2+z^2 \geqslant xy+yz+zx\,.$$

Kuna lisaks $x^2, y^2, z^2 \geqslant 0$, saame kokkuvõttes

$$5(x^2+y^2+z^2) \geqslant 4(x^2+y^2+z^2) \geqslant 4(xy+yz+zx)\,.$$

Teise võimaliku lahenduse saame, kui viime ülesande võrratuse samaväärsele kujule

$$5x^2+5y^2+5z^2-4xy-4yz-4zx \geqslant 0$$

ja paneme tähele, et selle võrratuse vasakul poolel saab liikmeid grupeerida, mis annab järgmised samaväärsed võrratused:

$$\begin{aligned} (x^2-4xy+4y^2)+(y^2-4yz+4z^2)+(z^2-4zx+4x^2) &\geqslant 0\,, \\ (x-2y)^2+(y-2z)^2+(z-2x)^2 &\geqslant 0\,. \end{aligned}$$

Viimne võrratus aga kehtib, sest tema vasakul poolel on ruutude summa.

3.11 Kuna x ja y on positiivsed, säilitavad järgmised teisendused võrratuse samaväärsuse:

$$\begin{aligned} \left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right) &\geqslant 9\,, \\ \frac{x+1}{x}\cdot\frac{y+1}{y} &\geqslant 9\,, \\ xy+x+y+1 &\geqslant 9xy\,, \\ x+y+1-8xy &\geqslant 0\,. \end{aligned}$$

Arvestades lisaks, et $x+y=1$ (ja seega $y=1-x$), saame teisendamist jätkata:

$$\begin{aligned} 2-8x(1-x) &\geqslant 0\,, \\ 2(1-4x+4x^2) &\geqslant 0\,, \\ 2(1-2x)^2 &\geqslant 0\,. \end{aligned}$$

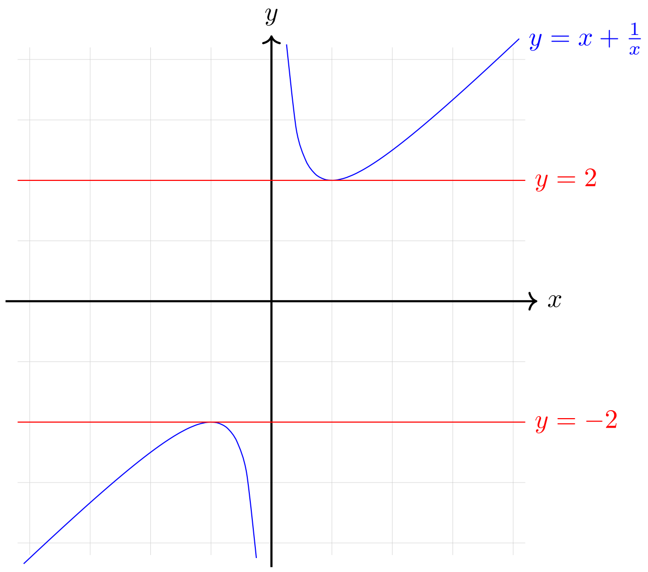
Viimane võrratus on ülesande võrratusega samaväärne, aga samas ka ilmselt kehtiv, sest suvalise reaalarvu ruut on mittenegatiivne.

3.12 Lahenduse ideeks on teisendada võrratust nii, et vasakule poole jääks reaalarvulise avaldise ruut ning paremale poole 0. Paneme tähele, et eelduse $xy = 1$ põhjal on järgmised võrratused samaväärsed:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &\geqslant 2\sqrt{2}(x-y)\,, \\ x^2 - 2xy + y^2 &\geqslant 2\sqrt{2}(x-y) - 2\,, \\ (x-y)^2 - 2\sqrt{2}(x-y) + 2 &\geqslant 0\,, \\ ((x-y) - \sqrt{2})^2 &\geqslant 0\,. \end{aligned}$$

Saadud võrratuse vasakul pool on reaalarvu ruut, niisiis viimane võrratus kehtib. Seega kehtib ka temaga samaväärne ülesande võrratus.

3.15 Funktsiooni $y = x + \frac{1}{x}$ graafik koosneb kahest harust:



Näeme, et positiivne haru jääb tõepoolest ülespoole sirget $y = 2$ puutumisega kohal $x = 1$.

Negatiivne haru aga tundub jääma allapoole sirget $y = -2$ puutumisega kohal $x = -1$. Kas meil õnnestub tõestada, et kui $x < 0$, siis

$$x + \frac{1}{x} \leqslant -2\,?$$

See tõestus pole raske. Paneme tähele, et kui $x < 0$, siis $-x > 0$ ja me saame kasutada positiivsete väärtuste jaoks tõestatud võrratust, mille põhjal

$$-x + \frac{1}{-x} \geqslant 2\,.$$

Jääb ainult korrutada mõlemad pooled arvuga -1 (pane tähele, et võrratusemärk muutub selle peale vastupidiseks!).

3.16 Teisendame ülesande võrratuse vasakut poolt:

$$\frac{a^2+3}{\sqrt{a^2+2}} = \frac{(a^2+2)+1}{\sqrt{a^2+2}} = \sqrt{a^2+2} + \frac{1}{\sqrt{a^2+2}}\,.$$

See avaldis on kujul $x + \frac{1}{x}$ reaalarvu $x = \sqrt{a^2+2}$ jaoks, niisiis on tema väärtus ülesande 3.14 põhjal vähemalt 2. Seejuures saaks avaldise väärtus olla täpselt 2 ainult siis, kui $\sqrt{a^2+2} = 1$. Kuna aga $a^2 + 2 \geqslant 2$, kehtib muuhulgas $\sqrt{a^2+2} \geqslant \sqrt{2} > 1$. Niisiis peab ülesande avaldise väärtus olema rangelt suurem kui 2.

3.17 Kasutame aritmeetilise ja geomeetrilise keskmise vahelist võrratust:

$$\frac{\frac{a}{b}+\frac{b}{a}}{2} \geqslant \sqrt{\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}} = \sqrt{1} = 1\,,$$

millest järeldubki vajalik võrratus. Võrdus kehtib parajasti siis, kui $\frac{a}{b} = \frac{b}{a}$ ehk $a^2 = b^2$, mis tänu eeldusele $a, b > 0$ on samaväärne tingimusega $a = b$.

3.18 Kasutame täisruuduks teisendamise võtet:

$$\begin{aligned} \frac{x^2+y^2}{2} &\geqslant xy\,, \\ x^2+y^2 &\geqslant 2xy\,, \\ x^2-2xy+y^2 &\geqslant 0\,, \\ (x-y)^2 &\geqslant 0\,. \end{aligned}$$

Viimane võrratus aga kehtib, sest tegemist on reaalarvu ruuduga. Võrdus kehtib parajasti siis kui $x - y = 0$ ehk $x = y$.

3.19 Olgu täisnurkse kolmnurga kaatetite pikkused a ja b. Kolmnurga pindala on siis $\frac{ab}{2}$, hüpotenuusi ruut aga Pythagorase teoreemi põhjal $c^2 = a^2+b^2$. Niisiis tuleb tõestada võrratus

$$\frac{ab}{2} \leqslant \frac{a^2+b^2}{4}\,,$$

mis on samaväärne võrratusega $\frac{a^2+b^2}{2} \geqslant ab$. Selle võrratuse aga tõestasime ülesandes 3.18. Võrdus kehtib parajasti siis, kui $a = b$, st juhul kui kolmnurk on võrdhaarne.

3.20 Aritmeetilise ja geomeetrilise keskmise vahelisest võrratusest saame

$$\frac{x+y}{2} \geqslant \sqrt{xy}\,, \quad \frac{y+z}{2} \geqslant \sqrt{yz} \quad \text{ja} \quad \frac{z+x}{2} \geqslant \sqrt{zx}\,.$$

Kuna kõigi nende võrratuste mõlemad pooled on positiivsed, võime nad omavahel korrutada. Saame

$$\frac{x+y}{2}\cdot\frac{y+z}{2}\cdot\frac{z+x}{2} \geqslant \sqrt{xy}\cdot\sqrt{yz}\cdot\sqrt{zx} = \sqrt{x^2y^2z^2} = xyz\,,$$

millest järeldubki ülesande võrratus.

Võrdus kehtib parajasti siis, kui $x = y = z$.

Mõtle, kas võrratus jääb kehtima, kui lubada muutujatel x, y, z võtta mittenegatiivseid väärtusi? Millised on sel puhul võrdusejuhud?

3.21 Vastus: 8.

Teisendame ülesande avaldist:

$$\begin{aligned}\frac{(x^2+1)(4y^2+1)(9z^2+1)}{6xyz} &= \frac{x^2+1}{x}\cdot\frac{4y^2+1}{2y}\cdot\frac{9z^2+1}{3z} = \\ &= \frac{x^2+1}{x}\cdot\frac{(2y)^2+1}{2y}\cdot\frac{(3z)^2+1}{3z} = \\ &= \left(x+\frac{1}{x}\right)\cdot\left(2y+\frac{1}{2y}\right)\cdot\left(3z+\frac{1}{3z}\right) \geqslant \\ &\geqslant 2\cdot 2\cdot 2 = 8\,,\end{aligned}$$

kus võrratus kehtib tänu ülesande 3.14 tulemusele. Võrdus kehtib parajasti siis, kui $x=2y=3z=1$ ehk $x=1, y=\frac{1}{2}$ ja $z=\frac{1}{3}$.

3.22 Kasutame teoreemi 3.1 mitu korda:

$$\begin{aligned}\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4} &= \frac{\frac{x_1+x_2}{2}+\frac{x_3+x_4}{2}}{2} \geqslant \frac{\sqrt{x_1x_2}+\sqrt{x_3x_4}}{2} \geqslant \\ &\geqslant \sqrt{\sqrt{x_1x_2}\sqrt{x_3x_4}} = \sqrt[4]{x_1x_2x_3x_4}\,.\end{aligned}$$

Võrdus kehtib parajasti siis, kui $x_1 = x_2$, $x_3 = x_4$ ja $\frac{x_1+x_2}{2} = \frac{x_3+x_4}{2}$. Viimase võrduse saame eeldustel $x_1 = x_2$ ja $x_3 = x_4$ teisendada kujule

$$\begin{aligned}\frac{2x_1}{2} &= \frac{2x_3}{2}\,, \\ x_1 &= x_3\,,\end{aligned}$$

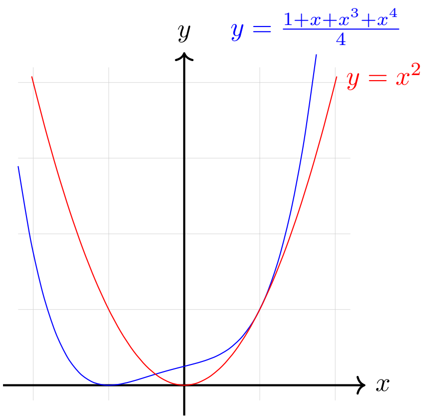
seega peab tõestatud võrratuse võrdusejuhul kehtima $x_1 = x_2 = x_3 = x_4$.

3.23 Kasutame teoreemi 3.2 (või ülesannet 3.22):

$$\frac{1+x+x^3+x^4}{4} \geqslant \sqrt[4]{1\cdot x\cdot x^3\cdot x^4} = \sqrt[4]{x^8} = x^2\,.$$

Võrdus kehtib parajasti siis, kui $1 = x = x^3 = x^4$, st lihtsalt kui $x = 1$.

Funktsioonide $y = \frac{1+x+x^3+x^4}{4}$ ja $y = x^2$ graafikud näevad välja sellised:



Näeme, et kõigi mittenegatiivsete x väärtuste korral asub funktsiooni $y = \frac{1+x+x^3+x^4}{4}$ graafik tõepoolest ülalpool funktsiooni $y = x^2$ graafikut (puutumisega kohal $x = 1$), kuid see pole nii sugugi mitte kõigi negatiivsete x väärtuste puhul.

3.24 Kasutame aritmeetilise ka geomeetilise keskmise vahelist võrratust:

$$\frac{\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}}{3} \geqslant \sqrt[3]{\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{c}\cdot\frac{c}{a}} = \sqrt[3]{1} = 1\,,$$

kust järeldubki vajalik võrratus.

Võrratuses kehtib võrdus kehtib parajasti siis, kui $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{a}$. Esimesest neist võrdusest saame $a = \frac{b^2}{c}$ ning teisest $b = \frac{c^2}{a}$. Järelikult

$$a = \frac{b^2}{c} = \frac{\left(\frac{c^2}{a}\right)^2}{c} = \frac{c^4}{a^2 c}\,,$$

mis on samaväärne võrdusega $a^3 = c^3$ ehk $a = c$. Analoogiliselt näitame, et $a = b$.

3.25 Teisendame ülesande võrratuse samaväärsele kujule

$$\frac{a+b+c}{3} \geqslant \frac{abc}{4}\,.$$

Aritmeetilise ja geomeetrilise keskmise vahelisest võrratusest saame

$$\frac{a+b+c}{3} \geqslant \sqrt[3]{abc}\,,$$

seega piisab tõestuse lõpetamiseks näidata $\sqrt[3]{abc} \geqslant \frac{abc}{4}$, mis on samaväärne võrratusega $4 \geqslant (abc)^{\frac{2}{3}}$. Kuna aga $a, b, c \leqslant 2$, siis ka $(abc)^{\frac{2}{3}} \leqslant 8^{\frac{2}{3}} = 4$.

3.26 Vastus: avaldise väärtus on vähim kui $x = 1$.

Esitame $\frac{1996}{x}$ kui 1996 murru summa $\frac{1}{x} + \ldots + \frac{1}{x}$. Siis saame ülesande avaldist hinnata aritmeetilise ja geomeetrilise keskmise vahelise võrratuse abil kui

$$\frac{x^{1000}+x^{900}+x^{90}+x^6+\frac{1}{x}+\ldots+\frac{1}{x}}{2000} \geqslant$$
$$\geqslant \sqrt[2000]{x^{1000}\cdot x^{900}\cdot x^{90}\cdot x^6\cdot\frac{1}{x}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{x}} = 1\,.$$

Järelikult

$$x^{1000}+x^{900}+x^{90}+x^6+\frac{1996}{x} \geqslant 2000\,,$$

kusjuures võrdus kehtib parajasti siis, kui $x^{1000} = x^{900} = x^{90} = x^6 = \frac{1}{x}$ ehk kui $x = 1$.

Indeks

arv
- mittenegatiivne, 6
- mittepositiivne, 6
- negatiivne, 6
- positiivne, 6

jagamine, 5
jagumine, 5

järjestus
- lineaarne, 6
- mitterange, 5
- range, 6

keskmine
- aritmeetiline, 24, 27
- geomeetriline, 24, 27