Võrrandid ja võrrandisüsteemid

Gümnaasiumi reaalharu

Jan Willemson

https://varamu.eu

Saatesõna

Sa hoiad käes Eesti gümnaasiumi reaalharule mõeldud eksperimentaalsesse matemaatikaõpikute sarja kuuluvat õpikut. Sari on leidnud inspiratsiooni 2023. aasta gümnaasiumi laia matemaatika õppekavast, kuid ei vasta sellele üksüheselt. Autori hinnangul vajabki Eesti gümnaasiumi matemaatika ainekava põhjalikku uuendamist. Käesolev sari kujutab endast autori nägemust sellest, milline matemaatika ainekava 21. sajandi 1. veerandi lõpul välja peaks nägema, et üldhariduskooli lõpetajad oleksid valmis jätkama õpinguid ühiskonnale olulistel erialadel.

Sarja sõsarõpikuks on sama autori „Võistlusmatemaatika põhivara”, millest huvitatud lugeja leiab palju täiendavaid ülesandeid ning süvendatud materjali. Mõned jaotised ja ülesanded on kahel õppematerjalil ka ühised – aga eks matemaatika, mida neis käsitletakse, ongi ju üks ja seesama.

Sarja õpikud on hetkel mustandi staatuses – neis võib esineda lünki, vigu ning muid vajakajäämisi. Autor on tänulik kommentaaride ja tagasiside eest, mida saab saata aadressile `matemaatika@varamu.eu`.

Sisukord

PEATÜKK 1

Võrrandid

1.1 Võrdusmärk

Võrdusmärk $=$ on üks esimesi matemaatilisi sümboleid, mida me koolis õppisime. Kummatigi pole tema olemus kaugeltki lihtne. Mida me õieti silmas peame, kui ütleme, et $2+2$ võrdub 4? Kas see võrdus kehtib alati? Osutub, et mitte.

Jah, kui me küsime Pythonilt arvude võrduse kohta, saame oodatud vastuse (tuletame meelde, et Pythonis on võrdlusoperaatoriks topeltvõrdus ==):

```
>>> 2+2 == 4
True
```

Aga kes ütles, et $2+2$ ja 4 on arvud? Me võime neid mõista ka tekstistringidena ja sel juhul võrdus ei kehti:

```
>>> "2+2" == "4"
False
```

Tekstistringide liitmine tähendab nende järjestkirjutamist; nõnda saame hoopis niisuguse tõese võrduse:

```
>>> "2" + "2" == "22"
True
```

Sõltuvalt kontekstist väljendatakse võrdusemärgiga matemaatiliste objektide *samaväärsust* mingis mõttes. Avaldised $2+2$ ja $3+1$ annavad sama tulemuse, kui me nende arvväärtuse välja arvutame; seda peamegi silmas, kui kirjutame arvvõrduse $2+2=3+1$.

Kursuses „Avaldised ja arvuhulgad” uurisime polünoome ning kirjutasime näiteks $x+x=2x$ ja $(x+1)\cdot(5-x)=-x^2+4x+5$. Niisuguses kirjutises võib võrdusemärk tähendada, et asendades muutuja x suvalise reaal(või kompleks)arvuga ning leides mõlema poole arvulised väärtused, saame tõese arvvõrduse.

Aga $(x+1)\cdot(5-x) = -x^2+4x+5$ võib tähendada ka, et avades vasakul poolel sulud ning koondades sarnased liikmed, saame parema poole avaldise.

Õnneks selgub, et polünoomide puhul on need kaks tõlgendust samaväärsed, kuigi selle samaväärsuse tõestus pole kaugeltki triviaalne.[1]

Võrdusemärki saab kasutada ka paljude teiste matemaatiliste objektide puhul peale arvude ja polünoomide. Näiteks kui lõigu AB keskristsirget tähistada $\perp AB$ ning kolmnurga ABC ümberringjoone keskpunkti $O(\triangle ABC)$, saame iga kolmnurga korral panna kirja punktidevahelise võrduse

$$\perp AB \cap \perp BC \cap \perp CA = O(\triangle ABC)\,.$$

Täpsemalt – vaadeldes sirgeid punktihulkadena, annab ühisosaoperatsioon $\cap$ meile mitte lihtsalt ühe punkti, vaid ühepunktilise hulga. Niisiis oleks viimast võrdust korrektsem kirjutada hulkade vahelise võrdusena

$$\perp AB \cap \perp BC \cap \perp CA = \{O(\triangle ABC)\}\,.$$

Muuhulgas näeme, et ka hulgad on matemaatilised objektid, mille korral on võrdusmärgi kasutamisel mõte sees. Kusjuures taas kord ei väljenda võrdusmärk mitte üksühest samasust üleskirjutuste vahel, vaid teatud samaväärsust. Hulkade puhul ignoreerime võrdsuse hindamisel elementide järjekorda ja kordsust. Nii kehtib hulkade korral näiteks võrdus

$$\{1,2,3,2\} = \{2,1,1,3,1\}\,,$$

sellal kui samadest elementidest moodustatud järjestatud loendid on erinevad:

```
>>> set([1,2,3,2]) == set([2,1,1,3,1])
True
>>> [1,2,3,2] == [2,1,1,3,1]
False
```

Millised omadused peavad olema matemaatiliste objektide vahelisel seosel, et seda seost võiks mingis mõttes võrduseks lugeda? Selgub, et olulisemaid omadus on kolm ning neile vastavat seost nimetatakse matemaatikas üldistatult *ekvivalentsiks* (ehk samaväärsuseks).

Definitsioon 1.1. *Matemaatiliste objektide vahelist seost $\simeq$ nimetame* ekvivalentsiseoseks*, kui kehtivad järgmised tingimused:*

(a) iga vaadeldava objekti a korral kehtib $a \simeq a$;

(b) kui $a \simeq b$, siis ka $b \simeq a$;

(c) kui $a \simeq b$ ja $b \simeq c$, siis ka $a \simeq c$.

Ülesanne 1.1 Olgu antud positiivne täisarv n. Ütleme, et täisarvud a ja b on *jäägivõrdsed* mooduli n järgi, kui a ja b jäägid jagamisel arvuga n on samad,

[1] Keerukas osa selles tõestuses on näidata, et kui kaks polünomiaalset avaldist annavad kõigi x-i väärtuste korral sama tulemuse, siis nad on ka teisendatavad samale kanoonilisele kujule. Selleks tuleb kasutada algebra põhiteoreemi, millega tutvutakse alles ülikooli algebrakursusel.

st kui $a - b$ jagub arvuga n. Kontrolli, et jäägivõrdsus on ekvivalentsiseos.

Definitsioon 1.2. *Ülesande 1.1 seost tähistatakse*

$$a \equiv b \mod n$$

ja nimetatakse ka täisarvude ekvivalentsiks mooduli n järgi.

Ülesanne 1.2 Kahte nurka loeme samasteks, kui nende erinevus on täispöörde ehk $360°$ täisarvkordne. Kontrolli, et nurkade samasus on ekvivalentsiseos.

1.2 Võrrand

Lisaks väljendamisele, et kaks matemaatilist objekti on mingis mõttes samaväärsed, kasutatakse võrdusmärki ka teatud küsimuste esitamiseks. Näiteks kui võrreldavad objektid sõltuvad teatud muutujatest, saame võrdusmärgi abil küsida, *millised saavad olla muutujate väärtused, et vastavate objektide vahel kehtiks võrdus?*

Näiteks hulkade võrdus

$$\{1, x\} = \{10, y\}$$

kehtib parajasti siis, kui $x = 10$ ja $y = 1$, sellal kui võrdus

$$\{2, x\} = \{x, 2\}$$

kehtib suvalise x väärtuse korral.

Ülesanne 1.3 Milliste x väärtuste korral kehtivad võrdused

(a) $\{1, x\} = \{x\}$;

(b) $\{1, x\} = \{2, x\}$?

Ülesanne 1.4 Milliste hulkade A korral kehtib võrdus

(a) $A \cup \{1\} = A$?

(b) $A \cap \{1\} = A$?

Ülesanne 1.5 Milliste hulkade A ja B korral kehtib võrdus $A \cup B = A \cap B$?

Ülesanne 1.6 Kui `n` on naturaalarv ja `s` tekstistring, tähendab `n*s` Pythonis tekstistringi, mis on saadud `s`-i kirjutamisel `n` korda järjest. Näiteks

```
>>> 4*"314"
'314314314314'
```

Leia, millised saavad olla naturaalarvu `n` ja tekstistringi `s` väärtused, et kehtiks võrdus

```
>>> n*s == "abababababab"
True
```

Ülesanne 1.7 Leia kõik võimalused, millised saavad olla stringid `s` ja `t` nii, et kehtiks võrdus

```
>>> s+t == "abab"
True
```

Ülesanne 1.8 Leia kõik võimalused, millised saavad olla stringid `s` ja `t` nii, et kehtiks võrdus

```
>>> s+3*t == "aaaaaaa"
True
```

Ülesanne 1.9 Kirjuta Pythonis funktsioon `rev`, mis pöörab sisendiks antud tekstistringi ümber. Milliste stringide `s` puhul kehtib võrdus

(a) `s == rev(s)`?

(b) `s == rev(rev(s))`?

Ülesanne 1.10 Kas võib väita, et suvaliste tekstistringide `s` ja `t` korral kehtib võrdus

(a) `rev(s+t) == rev(s)+rev(t)`?

(b) `rev(s+t) == rev(t)+rev(s)`?

Ülesanne 1.11 Olgu antud positiivne reaalarv r ja tasandi punkt O. Leia kõik niisugused tasandi punktid X, mille korral $|OX| = r$.

Ülesanne 1.12 Olgu tasandil antud kaks erinevat punkti A ja B. Leia kõik sellised tasandi punktid X, mille korral $|AX| = |BX|$.

Ülesanne 1.13 Tähistagu $d(X, YZ)$ punkti X kaugust sirgest YZ. Olgu tasandil antud punktis O lõikuvad sirged OA ja OB. Leia kõik sellised tasandi punktid X, mille korral $d(X, OA) = d(X, OB)$.

1.3 Lahendused

1.1 Peame kontrollima kolme tingimust, mis on üsna lihtne töö. Tuletame meelde, et arvu m jagumine arvuga n tähendab, et jagatis $\frac{m}{n}$ on (võib-olla negatiivne!) täisarv.

(a) Suvalise täisarvu a korral kehtib $a - a = 0$, aga 0 jagub iga positiivse täisarvuga n (kusjuures jagatiseks on täisarv 0). Definitsiooni 1.2 tähistes võime siis kirjutada $a \equiv a \bmod n$.

(b) Seos $a \equiv b \bmod n$ tähendab, et arv $a-b$ jagub arvuga n, st et $(a-b) : n = k$ mingi täisarvu k jaoks. Siis aga on täisarv ka $(b-a) : n = -k$, seega ka $b \equiv a \bmod n$.

(c) Kui $a \equiv b \bmod n$ ja $b \equiv c \bmod n$, siis on $(a-b) : n = k$ ja $(b-c) : n = \ell$ täisarvud. Neid võrdusi ümber kirjutades näeme, et

$$a - b = kn \quad \text{ja} \quad b - c = \ell n\,.$$

Saadud võrduste liitmine annab

$$a - c = (a-b) + (b-c) = kn + \ell n = (k+\ell)n\,.$$

Niisiis on täisarv ka $(a-c) : n = k + \ell$, seega annavad a ja c arvuga n jagades sama jäägi.

1.2 Kontrollime jälle ekvivalentsiseose tingimusi.

(a) Iga nurga α korral kehtib $\alpha = 0 \cdot 360^\circ + \alpha$. Kuna 0 on täisarv, on iga nurk samane iseendaga.

(b) Samaste nurkade α ja β korral peab kehtima $\alpha - \beta = k \cdot 360^\circ$, kus $k \in \mathbb{Z}$. Siis aga muuhulgas $\beta - \alpha = (-k) \cdot 360^\circ$. Kuivõrd $-k \in \mathbb{Z}$, on samased ka β ja α.

(c) Nurgapaaride α ja β ning β ja γ samasus tähendab et $\alpha - \beta = k \cdot 360^\circ$ ning $\beta - \gamma = \ell \cdot 360^\circ$, kus $k, \ell \in \mathbb{Z}$. Nende võrduste liitmisel saame

$$\begin{aligned}(\alpha - \beta) + (\beta - \gamma) &= k \cdot 360^\circ + \ell \cdot 360^\circ\,,\\ \alpha - \gamma &= (k+\ell) \cdot 360^\circ\,.\end{aligned}$$

Et $k + \ell \in \mathbb{Z}$, on samased ka nurgad α ja γ.

1.3 (a) $x = 1$; (b) selliseid väärtusi ei leidu.

1.4 (a) Kui elemendi 1 lisamine hulka ei muuda, tähendab see, et 1 pidi juba enne hulka kuuluma. Niisiis kehtib ülesande võrdus nende hulkade A jaoks, mille korral $1 \in A$.

(b) Võrdus kehtib parajasti siis, kui $A = \{1\}$ või $A = \varnothing$.

1.5 Ülesande võrdus kehtib parajasti siis, kui $A = B$.

Tõepoolest, kui leiduks mingi element x, mis kuulub ühte neist hulkadest (näiteks $x \in A$), aga mitte teise (st $x \notin B$), siis ka $x \in A \cup B$, aga samas $x \notin A \cap B$. Niisiis ei saaks sel juhul hulgad $A \cup B$ ja $A \cap B$ võrdsed olla.

Teisest küljest on selge, et kui $A = B$, siis $A \cup B = A = A \cap B$.

1.6 On neli võimalust:

```
>>> n=1
>>> s="ababababab"
>>> n*s == "ababababab"
True
>>> n=2
>>> s="ababab"
>>> n*s == "ababababab"
```

```
True
>>> n=3
>>> s="abab"
>>> n*s == "ababababab"
True
>>> n=6
>>> s="ab"
>>> n*s == "ababababab"
True
```

1.7 Tuletame meelde, et tühi string on samuti string. Seega on kokku viis võimalust: `(s,t)=("","abab")`, `(s,t)=("a","bab")`, `(s,t)=("ab","ab")`, `(s,t)=("aba","b")` ja `(s,t)=("abab","")`.

1.8 Stringis `"aaaaaaa"` on 7 tähte, stringis `3*t` aga 3-ga jaguv arv tähti. Niisiis saab `3*t` olla kas `"aaa"` või `"aaaaaa"` ning vastavalt on ülesandel kaks lahendit: `(s,t)=("aaaa","a")` ja `(s,t)=("a","aa")`.

1.9 (a) Võrdus kehtib palindroomide korral, st kõigi niisuguste tekstistringide jaoks, mis on mõlemast otsast lugedes samasugused; (b) see võrdus kehtib kõigi stringide jaoks.

Kui paremat mõtet pähe ei tule, võib sisendstringi tähthaaval läbi käia ja ümberpööratud stringi neist tähtedest kokku panna.

```
def rev(s):
    res = ""
    for c in s:
        res = c + res
    return(res)
```

Testimine annab oodatud tulemuse:

```
>>> rev("Tartu")
'utraT'
>>> s = "kuulilennuteetunneliluuk"
>>> s == rev(s)
True
```

Tegelikult saab Pythonis stringi (ja üldisemalt loendit) ümber pöörata ka efektiivsemalt, kasutades alamlõigu võtmise operaatorit:

```
def rev(s):
    return(s[::-1])
```

Avaldis `s[::-1]` käsib Pythonil võtta stringist `s` alamlõik otsast lõpuni sammuga -1, st tagant ette.

1.10 (a) Ei. Näiteks kui `s="a"` ja `t="b"`, siis kehtib `rev(s+t) == "ba"`, aga samas `rev(s)+rev(t) == "ab"`.

(b) Jah. `rev(s+t)` tähistab stringi `s+t` tagurpidi kirjutatult. Sama stringi saame siis, kui kirjutame kõigepealt tagurpidi stringi `t` ja kohe tema järele tagurpidi stringi `s`.

1.11 Sobivad parajasti kõik need punktid X, mis asuvad ringjoonel keskpunktiga O ja raadiusega r. (Tegelikult on ülesande sõnastuse näol tegemist ringjoone definitsiooniga.)

1.12 Sobivad parajasti kõik need punktid X, mis asuvad lõigu AB keskristsirgel.

1.13 Sobivad parajasti kõik need punktid X, mis asuvad nurga AOB poolitajaga määratud sirgel.

PEATÜKK 2

Võrrandisüsteemid

Tuletame meelde, et ühe võrrandi eesmärk on leida kõik muutuja(te) väärtused, mille korral vastav võrdus kehtib. Võrrandeid võib korraga antud olla ka mitu. Sel juhul räägime *võrrandisüsteemist* ja vastava ülesande eesmärk on leida kõik muutuja(te) väärtused, mille korral kehtivad kõik süsteemi võrrandid üheaegselt. Sisuliselt peame leidma süsteemi kuuluvate võrrandide lahendite hulkade ühisosa.

Traditsiooni kohaselt kirjutatakse võrrandisüsteemi ette suur looksulg.

Ülesanne 2.1 Olgu tasandil antud kolm mitte ühel sirgel asuvat punkti A, B ja C. Leia kõik sellised tasandi punktid X, mis rahuldavad võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} |AX| = |BX| \\ |BX| = |CX| \end{cases}.$$

Ülesanne 2.2 Tähistagu $d(X, YX)$ punkti X kaugust sirgest YZ (vt ka ülesanne 1.13). Olgu tasandil antud kolm mitte ühel sirgel asuvat punkti A, B ja C. Leia kõik sellised tasandi punktid X, mis rahuldavad võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} d(X, OA) = d(X, OB) \\ d(X, OB) = d(X, OC) \end{cases}.$$

Ülesanne 2.3 Leia kõik võimalused, millised saavad olla hulgad A ja B, kui kehtib võrrandisüsteem

$$\begin{cases} A \cap B = \{2, 3\} \\ A \cup B = \{1, 2, 3, 4\} \end{cases}.$$

Ülesanne 2.4 Olgu `rev` funktsioon, mis pöörab antud tekstistringi ümber (vt ülesanne 1.9). Leia kõik võimalused, millised saavad olla stringid `s` ja `t`, kui kehtib tingimus

```
>>> s+t =="abab" and rev(s)+rev(t)=="abab"
True
```

2.1 Lahendused

2.1 Ülesandes 1.12 nägime, et süsteemi esimese võrrandi lahendiks on lõigu AB keskristsirge punktide hulk. Sama moodi moodustavad teise võrrandi lahendipunktid lõigu BC keskristsirge ning antud võrrandite ühine lahend on lõikude AB ja BC keskristsirgete lõikepunkt.

Paneme tähele, et antud võrranditest järeldub ka võrdus $|AX| = |CX|$, niisiis läbib sama punkti ka lõigu AC keskristsirge.

Teisest küljest tähendavad võrdused $|AX| = |BX| = |CX|$, et punkt X asub punktidest A, B ja C samal kaugusel. Järelikult on muuhulgas tegemist kolmnurga ABC ümberringjoone keskpunktiga.

2.2 Ülesandes 1.13 nägime, et süsteemi esimese võrrandi lahendiks on nurga AOB poolitajaga määratud punktide hulk. Sama moodi moodustavad süsteemi teise võrrandi lahendi punktid nurga BOC poolitajaga määratud sirge. Kokkuvõttes on lahendiks nende kahe nurgapoolitaja lõikepunkt.

Jällegi näeme, et süsteemi kahest võrrandist järeldub võrdus $d(X, OA) = d(X, OC)$, mistõttu sama punkti läbib ka kolmas nurgapoolitaja.

Teisest küljest asub süsteemi lahendina leitud punkt X kolmnurga ABC kõigist külgedest samal kaugusel; tähistame seda kaugust r. Niisiis puutub ringjoon keskpunktiga X ja raadiusega r kolmnurga kõiki külgi, st on tema siseringjoon.

2.3 On kaks võimalust: $A = \{1, 2, 3\}$ ja $B = \{2, 3, 4\}$ või $A = \{2, 3, 4\}$ ja $B = \{1, 2, 3\}$.

2.4 Ülesandes 1.9 leidsime süsteemi esimesele võrrandile viis lahendit.

Süsteemi teisest võrrandist järeldub lisaks, et `s+t == rev(s)+rev(t)`, st stringid `s` ja `t` peavad olema palintroomid. Kokkuvõttes saame kaks lahendit: `(s,t)=("a","bab")`, ja `(s,t)=("aba","b")`.

PEATÜKK 3

Arvvõrrandid

Jaotises 1.2 nägime võrrandeid, kus otsitavateks olid erinevad matemaatilised objektid (hulgad, tasandi punktid, tekstistringid). Praktikas on väga sageli otsitavateks suurusteks arvud, misjuhul võime rääkida arvvõrranditest. Arvvõrranditeks on näiteks

$$x^2 - 4x + 3 = \pi, \quad \sin z = 0 \quad \text{ja} \quad \sqrt{a+1} = 16\,.$$

Igale võrrandile (sealhulgas arvvõrrandile) vastab mingi lahendite hulk. See hulk võib olla tühi juhul, kui lahendid puuduvad, aga seal võib olla ka rohkem elemente. Näiteks

- võrrandil $x + 3 = 7$ on täpselt üks lahend $x = 4$;
- kursuses „Arvuhulgad ja avaldised" nägime, et võrrandi $x^4 = 1$ kompleksarvuliste lahendite hulk on $\{1, -1, i, -i\}$;
- võrrandi $x + 1 = x + 2$ lahendite hulk on tühi;
- võrrandi $2x = x+x$ lahendiks sobivad kõik reaal(või isegi kompleks)arvud.

Võrrandi lahendamise eesmärgiks ongi tema lahendite hulga väljaselgitamine. Tüüpiline võte on seejuures võrrandi lihtsustamine nii, et tema lahendite hulk jääks samaks. Arvvõrrrandite puhul saab lihtsustamiseks kasutada näiteks aritmeetika põhitehteid, aga ka keerukamaid funktsioone.

3.1 Polünoomvõrrandid

Iga polünoomiga

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

saame siduda vastava polünoomvõrrandi

$$p(x) = 0 \quad \text{ehk} \quad a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0\,,$$

mis küsib, milliste x väärtuste korral muutub polünoomi väärtus nulliks. Tuletame meelde, et niisuguseid väärtusi nimetatakse polünoomi $p(x)$ *nullohtadeks* ehk *juurteks*.

Tavaliselt eeldame, et $a_n \neq 0$ (sest muidu oleks tegemist madalama astme võrrandiga). Kordajad a_i kuuluvad mingisse arvuhulka (näiteks $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ või $\mathbb{C}$) ning muutuja x väärtust otsime samuti mingist arvuhulgast. Sageli on see hulk sama kui kordajate oma, kuid mitte alati. Näiteks võime küsida, millised kompleksarvulised lahendid on antud reaalarvuliste kordajatega polünoomvõrrandil (lihtsamate näidetega sellisest ülesandest puutusime kokku juba kursuses „Arvuhulgad ja avaldised").

Kuna paljud reaalelus ette tulevad ülesanded on teisendatavad polünoomvõrrandite kujule, tasub nende uurimisele rohkem aega pühendada.

3.1.1 Lineaar- ja ruutvõrrandi lahendamine

1. ja 2. astme polünoomvõrrandeid (ehk lineaar- ja ruutvõrrandeid) lahendasime juba põhikoolis. Mõlemal puhul oli lahenduse üldine idee sarnane – teisendada antud võrrand lihtsamale kujule nii, et kõik teisendussammud säilitavad võrrandi lahendite hulga. Kõige tüüpilisemateks sammudeks on

- võrrandi mõlemale poolele sama arvu liitmine või lahutamine ja
- võrrandi mõlema poole korrutamine või jagamine sama nullist erineva arvuga.

Need pole ainsad võimalikud operatsioonid; mõnede teiste võimalustega tutvume näiteks kursuses „Eksponent- ja logaritmfunktsioon". Oluline on, et rakendatavad sammud oleksid *pööratavad*, st et võrrandi teisendatud kujult saaks soovi korral algsele kujule tagasi minna. Kui see omadus on tagatud, säilitab teisendus võrrandi lahendite hulga.

Tuletame meelde, et *lineaarvõrrandiks* nimetatakse võrrandit kujul

$$ax + b = 0 \quad (a \neq 0)\,.$$

Sellise võrrandi lahendamiseks piisab kahest sammust. Kõigepealt lahutame võrrandi mõlemalt poolelt vabaliikme b, mis annab

$$\begin{aligned} ax + b &= 0 \qquad | - b \\ ax + b - b &= 0 - b \\ ax &= -b\,. \end{aligned}$$

Sellest operatsioonist võime mõelda ka kui konstandi viimisest teisele võrduse poolele koos märgi vahetusega.

Teiseks jagame mõlemad saadud võrduse pooled a-ga (tuletame meelde, et $a \neq 0$):

$$\begin{aligned} ax &= -b \quad | : a \\ \frac{ax}{a} &= \frac{-b}{a} \\ x &= -\frac{b}{a}\,. \end{aligned}$$

Sellest operatsioonist võib mõelda kui kordaja viimisest võrduse teisele poole murrujoone alla.

Niisiis on lineaarvõrrandi alati täpselt üks lahend, kusjuures juhul kui võrrandi kordajad pärinevad kas ratsionaal-, reaal- või kompleksarvude hulgast, kuulub samasse hulka ka lahend. Kui aga a ja b on täisarvud, võib lahend üldjuhul olla ratsionaalarvuline.

Ülesanne 3.1 Kirjuta Pythonis programm, mis küsib kasutaja käest kordajate a ja b väärtused ning väljastab vastava lineaarvõrrrandi $ax + b = 0$ lahendi.

Ruutvõrrandi

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0)$$

lahendamiseks tuleb veidi rohkem pingutada. Jagame võrrandi mõlemad pooled kõigepealt läbi kordajaga a ja saame

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0\,. \tag{3.1}$$

Muutuja x võimalike väärtuste leidmiseks tuleks kuidagimoodi ruutjuurt leida, aga kuidas? Kui viime lineaar- ja vabaliikme võrduse teisele poolele (miinusmärgiga!) saame

$$x^2 = -\frac{b}{a}x - \frac{c}{a}\,.$$

Mõlemast poolest ruutjuure võtmine annaks

$$x = \pm\sqrt{-\frac{b}{a}x - \frac{c}{a}}$$

(tuletame meelde, et ruutjuurel on kaks vastandarvulist väärtust). Nüüd aga pole selge, mida hakata peale avaldisega $\sqrt{-\frac{b}{a}x - \frac{c}{a}}$, kus muutuja on juuremärgi all.

Niisiis vajame teistsugust strateegiat. Kuidagi oleks vaja võtta ruutjuur võrduse (3.1) vasakust poolest nõnda, et juuremärgi alla jääksid nii ruut- kui ka lineaarliige. Selleks tuleb ära tunda, et võrrandi (3.1) vasak pool meenutab samasust $(x + k)^2 = x^2 + 2kx + k^2$. Valime k nii, et $2k = \frac{b}{a}$, st $k = \frac{b}{2a}$. Siis muuhulgas $k^2 = \frac{b^2}{4a^2}$ ja

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = x^2 + 2\cdot\frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2} = x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\,.$$

Nüüd võime teisendada

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\,.$$

Võrrandi (3.1) saame seega esitada samaväärsel kujul

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0\,,$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\,,$$

kus võrduse parem pool on konstant, kuivõrd ta ei sõltu muutujast x ning on üheselt määratud antud võrrandi kordajate väärtustega.

Järgmise sammuna tuleb võrduse mõlemalt poolelt võtta ruutjuur. Selle koha peal peame eristama, millises arvuhulgas me lahendeid otsime. Kompleksarvudest (sealhulgas negatiivsetest reaalarvudest) saab alati ruutjuurt võtta, niisiis kompleksarvulisi lahendeid otsides on edasine teisendus lihtne:

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}\,,$$

kust saame

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{\sqrt{4a^2}} = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} =$$
$$= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\,.$$

Seda valemit tunneme juba põhikoolist, aga nüüd nägime, et ta kehtib tegelikult ka kõigi kompleksarvuliste kordajatega ruutvõrrandite puhul.

Kui antud ruutvõrrandi kordajad on reaalarvud ning me otsime reaalarvulisi lahendeid, tuleb ettevaatlik olla avaldisest $\frac{b^2-4ac}{4a^2}$ ruutjuurt võttes. $4a^2$ on kindlasti positiivne, niisiis on reaalarvulise ruutjuure leidumiseks vaja, et avaldis $b^2 - 4ac$ oleks mittenegatiivne. Seda avaldist nimetatakse ruutvõrrandi *diskriminandiks* ning tema mittenegatiivsus ongi kriteeriumiks, kas antud reaalarvuliste kordajatega ruutvõrrandil leidub reaalarvulisi lahendeid või mitte. (Rõhutame veelkord, et kompleksarvulised lahendid on alati kindlasti olemas.) Seejuures kui $b^2 - 4ac = 0$, on ruutvõrrandil ainult üks lahend $x = -\frac{b}{2a}$.

Ülesanne 3.2 Kirjuta Pythonis programm, mis küsib kasutaja käest reaalarvuliste kordajate a, b ja c väärtused ning väljastab vastava ruutvõrrandi $ax^2 + bx + c = 0$ reaalarvulised lahendid. Kas vaatasid kõikvõimalikud erijuhud korralikult läbi?

3.1.2 Projektülesanne: kuupvõrrandi lahendamine

Kuupvõrrand üldkujul

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \quad (a \neq 0)$$

nõuab ruutvõrrandiga võrreldes tunduvalt rohkem nuputamist. Proovime näiteks kasutada ruutvõrrandi lahendamisel jaotises 3.1.1 toiminud trikki. Pealiikme kordajaga a läbi jagades saame võrrandi viia kujule

$$x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = 0\,.$$

Selleks, et kasutada ära samasust $(x+k)^3 = x^3 + 3kx^2 + 3k^2x + k^3$, tuleks leida niisugune k, et kehtiksid võrdused

$$3k = \frac{b}{a} \quad \text{ja} \quad 3k^2 = \frac{c}{a}\,.$$

See aga pole enamasti võimalik. Tõepoolest, esimesest võrdusest saame $k = \frac{b}{3a}$, niisiis peaks kehtima

$$\frac{c}{a} = 3k^2 = 3\left(\frac{b}{3a}\right)^2 = \frac{b^2}{3a^2},$$

aga see on nii ainult mõnede väga spetsiifiliste a, b ja c valikute korral.

Üldkujulise kuupvõrrandi lahendivalemi tuletasid 16. sajandil Itaalia matemaatikud Gerolamo Cardano ja Nicolo Tartaglia (avastades töö käigus poolkogemata kompleksarvud!), aga selle tulemuse esitus jääb meie õpiku raamidest kahjuks natuke välja. Küll aga saame Pythoni abil otsida ligikaudseid lahendeid.

Vaatleme siinses ülesandes reaalarvuliste kordajatega kuupvõrrandit. Kursuses „Arvuhulgad ja avaldised" nägime, et paaritu astmega reaalpolünoomi graafik lõikab kindlasti koordinaattasandi x-telge. Kuna 3 on paaritu arv, tähendab see, et reaalarvuliste kordajatega kuupvõrrandil peab kindlasti olema vähemalt üks reaalarvuline lahend!

Tähistame $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ning eeldame üldisust kitsendamata, et $a > 0$ (kui see nii ei ole, korrutame antud võrrandi mõlemad pooled läbi arvuga -1). Otsime kuupvõrrandi $p(x) = 0$ lahendit lõigu poolitamise meetodil. Meetodi ideeks on leida kõigepealt sellised reaalarvud x_1 ja x_2, et $x_1 < x_2$, $p(x_1) < 0$ ja $p(x_2) > 0$. Me teame, et niisugused väärtused peavad kindlasti leiduma, sest tänu eeldusele $a > 0$ läheb kuupparabooli vasakpoolne haru $-\infty$-sse ja parempoolne $+\infty$-sse.

Ülesanne 3.3 Lahendame näiteks kuupvõrrandit $x^3 - x^2 - 2x + 3 = 0$. Selleks defineerime Pythonis polünoomi $p(x) = x^3 - x^2 - 2x + 3$:

```
def p(x):
    a,b,c,d = 1,-1,-2,3      # Muuda neid (aga jäta a>0)
    return(a*x*x*x + b*x*x + c*x + d)
```

Kirjuta programm, mis väljastab niisugused reaalarvud x_1 ja x_2, et $x_1 < x_2$, $p(x_1) < 0$ ja $p(x_2) > 0$.

Nüüd on meil käes *alglähend*, st lõik $[x_1; x_2]$, mille otspunktides on polünoomi p väärtused erinevate märkidega. Tänu polünoomfunktsiooni pidevusele teame, et kusagil selles lõigus peab leiduma reaalarv x, mille korral $p(x) = 0$.

Poovime järgmiseks kandidaadiks lõigu $[x_1; x_2]$ keskpunkti, st väärtust $x = \frac{x_1+x_2}{2}$. Kui $p(x) = 0$, oleme sobiva lahendi leidnud (praktikas kontrollime muidugi jälle, kas $|p(x)|$ on piisavalt väike). Kui $p(x) < 0$, võime järgmiseks lähendiks võtta $[x; x_2]$; kui aga $p(x) > 0$, võime järgmiseks lähendiks võtta $[x_1; x]$. Nüüd on meil kaks korda lühem lõik, mille otspunktidel on $p(x)$ väärtused erinevate märkidega, niisiis võime korrata sama operatsiooni uue kandidaatlõiguga. Programmi, mis kutsub välja iseennast (mingis mõttes väiksemal sisendil) nimetatakse *rekursiivseks*.

Ülesanne 3.4 Kirjuta see rekursiivne programm valmis ja leia ülesande 3.3 polünoomi nullkoha lähend.

Nüüd oleme leidnud ühe reaalarvu x_0, mille jaoks $p(x_0) = 0$. Aga kuidas leida ka vaadeldava võrrandi ülejäänud lahendid (mis võivad muuhulgas olla kompleksarvulised)? Siinkohal aitab meid Bezout' väike teoreem (vt kursus

„Arvuhulgad ja avaldised"), mille põhjal saame polünoomi $p(x)$ esitada kujul

$$p(x) = (x - x_0) \cdot q(x)\,,$$

kus $q(x)$ on 1 astme võrra madalam, st ruutpolünoom. Niisiis teiseneb võrrand $p(x) = 0$ kujule

$$(x - x_0) \cdot q(x) = 0\,,$$

mille ühte lahendit x_0 me juba teame, ülejäänud lahendid aga saame leida ruutvõrrandist $q(x) = 0$.

Ülesanne 3.5 Leia ülesande 3.3 kuupvõrrandi kaks ülejäänud lahendit (ligikaudselt).

Ülesanne 3.6 Lahenda ülesande 3.3 kuupvõrrand `sympy` abil otse ja võrdle tulemust enda saaduga.

3.2 Lahendused

3.1 Kasutaja käest võime sisendit küsida käsuga `input`, millele saab ette anda küsimuse teksti. Kuna `input` väljastab vaikimisi stringi, peame selle käsuga `float` reaalarvuks teisendama. Väljundi saame kuvada käsuga `print`, andes talle ette vormindatud stringi. Vormindatud stringi (*format string*) tunnuseks on täht `f` stringi ees. See võimaldab meil stringi sees looksulgude vahel arvutusi teha, kusjuures tulemuse kuvab Python stringi osana. Paneme programmi algusesse ka väikese tutvustuse ja tulemusena saame näiteks sellise skripti:

```
print("Lahendame lineaarvõrrandit ax+b=0.")

a = float(input("Sisesta a: "))
b = float(input("Sisesta b: "))

print(f"Lahend on x={-b/a}")
```

Kas märkad selles skriptis matemaatilist viga? Kui kasutaja sisestab `a` kohale väärtuse 0, annab Python veateate nulliga jagamise kohta:

```
Lahendame lineaarvõrrandit ax+b=0.
Sisesta a: 0
Sisesta b: 2
Traceback (most recent call last):
File "<string>", line 6, in <module>
ZeroDivisionError: float division by zero
```

Niisiis tuleb skripti natuke täiendada:

```
print("Lahendame lineaarvõrrandit ax+b=0.")

a = float(input("Sisesta a: "))
b = float(input("Sisesta b: "))

if a==0:
```

```
    print("a peab nullist erinema!")
else:
    print(f"Lahend on x={-b/a}")
```

Võimalikke edasiarendusi on veel. Näiteks võib juhtuda, et kasutaja sisestab (kogemata või meelega) midagi muud kui reaalarvu. Uuri iseseisvalt, kuidas seda olukorda tuvastada!

Samuti võime tahta lubada sisenditena kompleksarve. Mida käsu `float` asemel siis kasutada tuleks?

3.2 Tuletame meelde, et reaalarvude korral pole suurt mõtet kontrollida võrdust nulliga. Niisiis selle asemel, et uurida, kas diskriminant `d` on null, küsime pigem, kas tema absoluutväärtus on väiksem mingist lävendist (antud juhul $0{,}0000001$).

```
from math import sqrt

print("Lahendame ruutvõrrandit ax^2+bx+c=0.")

a = float(input("Sisesta reaalarv a: "))
b = float(input("Sisesta reaalarv b: "))
c = float(input("Sisesta reaalarv c: "))

if a==0:
    print("a peab nullist erinema!")
else:
    d = b*b-4*a*c
    if d<0:
        print("Lahendid puuduvad")
    elif abs(d)<0.0000001:
        print(f"On üks lahend x={-b/(2*a)}.")
    else:
        print("On kaks lahendit:")
        print(f"x_1={(-b+sqrt(d))/(2*a)};")
        print(f"x_2={(-b-sqrt(d))/(2*a)}.")
```

3.3 Kuna vaadeldava kuupparabooli vasakpoolne vasakpoolne haru $-\infty$-sse ja parempoolne $+\infty$-sse, saame soovitavaid väärtusi otsida näiteks lisatingimustel $x_1 < 0$ ja $x_2 > 0$; see garanteerib meile automaatselt tingimuse $x_1 < x_2$. Võimalikke lahendusstrateegiaid on palju. Näiteks võime x_1 rolli proovida kõigepealt -1; kui see ei sobi (st $p(x_1) \geqslant 0$), vaatleme järgmiseks kandidaati -2, siis $-4, -8, -16$ jne. Sama moodi saame x_2, proovides läbi väärtusi $1, 2, 4, 8, 16$ jne. Iga järgmise kandidaadi 2-ga korrutamine aitab liikuda oluliselt kiiremini kui liiguksime näiteks jadaga $1, 2, 3, 4, \ldots$. See kiirus on oluline, sest sobiv väärtus võib asuda 0-st väga kaugel.

Kokkuvõttes saame näiteks sellise skripti:

```
x1 = -1
while (p(x1) >= 0):
    x1 *= 2
```

```
x2 = 1
while (p(x2) <= 0):
    x2 *= 2

print(x1,x2)
```

3.4 Rekursiivse programmi puhul on väga oluline kõigepealt kontrollida rekursioonist väljumise tingimust, sest muidu võime lihtsasti lõpmatult arvutama jääda. Funktsioonis `nullkoht` on autor kasutanud suurtähelisi muutujaid, et oleks selge, millised x-id tähistavad alglähendit ja millised on funktsiooni sisesed muutujad. Kui me kasutaksime igal pool väiketähti, suudaks Python neil muutujate skoobi põhjal vahet teha küll, kuid inimese jaoks hakkab programmi loetavus kannatama ja see pole hea stiil.

```
def nullkoht(X1,X2):
    X = (X1+X2)/2
    if abs(p(X))<0.0000001:
        return(X)
    elif p(X)<0:
        return(nullkoht(X,X2))
    else:
        return(nullkoht(X1,X))

print(nullkoht(x1,x2))    # Siia sisesta alglähend
```

Ülesande 3.3 võrrandi $x^3 - x^2 - 2x + 3 = 0$ lahendi lähendiks saame selle programmiga $-1{,}5468182787299156$. (Sinu tulemus võib veidi erineda sõltuvalt Pythoni versioonist ja kasutatavast alglähendist.)

3.5 Selleks, et leida polünoom $q(x)$, peame polünoomi $p(x) = x^3 - x^2 - 2x + 3$ jagama polünoomiga $x - x_0 = x + 1{,}5468182787299156$. Pythoni moodulis `sympy` on õnneks polünoomide jäägiga jagamine realiseeritud meetodi `div` abil (tuletame meelde, et sümboli `x` kasutamiseks polünoomi muutujana tuleb see enne eraldi deklareerida):

```
from sympy import div
from sympy.abc import x

p = x**3 - x**2 - 2*x + 3
d = x + 1.5468182787299156

q, r = div(p,d)

print("Jagatis:", q)
print("Jääk:", r)
```

See skript annab niisuguse väljundi:

```
Jagatis: 1.0*x**2 - 2.54681827872992*x + 1.93946506614289
Jääk: -1.52679540121881e-8
```

Näeme, et jääk $-1{,}52679540121881 \cdot 10^{-8} \approx 0$, nagu oligi oodata. Uuritava kuupvõrrandi kaks ülejäänud lahendit saame seega ruutvõrradist

$$x^2 - 2{,}54681827872992x + 1{,}93946506614289 = 0\,.$$

Selle ruutvõrrandi diskriminant on negatiivne arv

$$(-2{,}54681827872992)^2 - 4 \cdot 1{,}93946506614289 \approx -1{,}2715769196987274\,.$$

Seega on ülejäänud otsitavad lahendid kompleksarvulised. Laseme Pythonil nad välja arvutada (tuletame meelde, et $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ ning et kompleksarvulise ruutjuure leidmiseks tuleb Pythonis kasutada just nimelt astendamist astmele $\frac{1}{2}$):

```
a = 1
b = -2.54681827872992
c = 1.93946506614289

d = b**2 - 4*a*c

print((-b+d**(1/2))/(2*a))
print((-b-d**(1/2))/(2*a))
```

Tulemuseks saame

```
(1.27340913936496+0.56382109744553j)
(1.27340913936496-0.56382109744553j)
```

Lõpetuseks võime kontrollida, et tegemist on tõepoolest polünoomi $p(x) = x^3 - x^2 - 2x + 3$ nullkohtadega:

```
def p(x):
    a,b,c,d = 1,-1,-2,3
    return(a*x*x*x + b*x*x + c*x + d)

print(p(1.27340913936496+0.56382109744553j))
print(p(1.27340913936496-0.56382109744553j))
```

väljastab

```
(-1.5267926478657046e-08+1.2878587085651816e-14j)
(-1.5267926478657046e-08-1.2878587085651816e-14j)
```

Mõlema kompleksarvu reaalosa on suurusjärgus 10^{-8} ja imaginaarosa suurusjärgus 10^{-14}, seega on nad tõesti ümardamise täpsusega nullid.

3.6 Proovime kasutada mooduli `sympy` meetodit `solve`:

```
from sympy import solve
from sympy.abc import x

print(solve(x**3 - x**2 - 2*x + 3))
```

mis väljastan tulemuseks

```
[1/3 - 7/(3*(-1/2 - sqrt(3)*I/2)*(9*sqrt(29)/2 +
61/2)**(1/3)) - (-1/2 - sqrt(3)*I/2)*(9*sqrt(29)/2 +
61/2)**(1/3)/3,
1/3 - (-1/2 + sqrt(3)*I/2)*(9*sqrt(29)/2 +
61/2)**(1/3)/3 - 7/(3*(-1/2 + sqrt(3)*I/2)*
```

```
(9*sqrt(29)/2 + 61/2)**(1/3)),
-(9*sqrt(29)/2 + 61/2)**(1/3)/3 - 7/(3*(9*sqrt(29)/2 +
61/2)**(1/3)) + 1/3]
```

Mis siin toimub? `sympy` kasutab Cardano valemeid, mis annavad täiesti täpse tulemuse, aga paremaks arusaamiseks tuleks need teisendada ligikaudsele kümnendkujule. Selleks võime kasutada `sympy` meetodit `N`, mis teisenduse meie jaoks ära teeb.

```
from sympy import solve,N
from sympy.abc import x

lahendid = solve(x**3 - x**2 - 2*x + 3)

for lahend in lahendid:
    print(N(lahend))
```

väljastab

```
1.27340913844204 + 0.563821092829119*I
1.27340913844204 - 0.563821092829119*I
-1.54681827688408
```

Tõepoolest, need väärtused on suure täpsusega samad, mis me ise lahendades saime!

PEATÜKK 4*

Funktsionaalvõrrandid

Oleme siinses kursuses juba näinud, et võrrandi kujul saab esitada ülesandeid leidmaks hulki, tekstristringe, tasandi punkte ja arve. Sellega võimalused aga ei piirdu. Võrrandeid saab koostada ka teiste matemaatiliste objektide, sealhulgas funktsioonide kohta.

Kui funktsioon f on määratud hulga X elementidel ning omandab väärtusi hulgast Y, kirjutame $f : X \to Y$. Nii võime kuupfunktsiooni kohta kirjutada näiteks $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^3$, ruutfunktsiooni kohta aga $f : \mathbb{R} \to [0; \infty) : x \mapsto x^2$.

Definitsioon 4.1. *Funktsioonide võrdsus tähendab nende väärtuste võrdsust kõigil argumentide korral. St funktsioonid $f : X \to Y$ ja $g : X \to Y$ on võrdsed parajasti siis, kui iga $x \in X$ korral $f(x) = g(x)$. Sel juhul kirjutame üldiselt $f(x) = g(x)$ või lihtsalt $f = g$.*

Just funktsioonide võrdsust peame silmas, kui kirjutame $(x-1)^2 = x^2 - 2x + 1$ või $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$. Võrduse $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ paremal poolel seisab 1, mis pole tegelikult mitte lihtsalt arv, vaid konstantne funktsioon, mis väljastab iga x väärtuse korral arvu 1.

Võrrandit, mille lahendina otsime funktsiooni, nimetame *funktsionaalvõrrandiks*. Funktsionaalvõrrandiülesande vastuseks on tavaliselt vaja leida otsitava funktsiooni võimalikult lihtne esitus arvutuseeskirjana, mis määrab funktsiooni käitumise ära kõigil võimalikel sisenditel.

Tüüpiliselt on otsitava funktsiooni sisendhulk lõpmatu (näiteks $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ või $\mathbb{R}$). See võib tunduda veidi hirmutav – me peame leidma, kuidas funktsioon käitub lõpmata paljudel kohtadel!

Aga õnneks esitavad ka funktsionaalvõrrandites antud võrdused tingimusi lõpmata paljude sisendite kohta ja lisaks on õpikus (või võistlustel) antud ülesannetel garanteeritult olemas üks lihtsa esitusega lahend (või lahendite pere).

Ülesanne 4.1 Leia kõik funktsioonid $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, mis rahuldavad kõigi $x, y \in \mathbb{R}$

korral võrdust
$$f(x) + y = f(y) + x\,.$$

Lahendus. Kuna ülesande võrdus kehtib suvaliste reaalarvude x ja y korral, saame seda võrdust lihtsustada, proovides muutujate asemele konkreetseid arvväärtusi (ja saadav võrdus jääb endiselt kehtima). Meie eesmärgiks on tuletada funktsiooni arvutuseeskiri kujul $f(x) = \ldots$. Praegusel juhul aitab meid seega valik $y = 0$, mis annab iga $x \in \mathbb{R}$ jaoks võrduse

$$f(x) = f(0) + x\,.$$

Siin $f(0)$ on lihtsalt üks reaalarv, niisiis peavad kõik lahendid esituma kujul $f(x) = x + a$ mingi $a \in \mathbb{R}$ korral. Kas kõik sellisel kujul esituvad funktsioonid sobivad lahendeiks? Osutub, et sobivad küll, sest kõigi $x, y \in \mathbb{R}$ korral kehtib

$$f(x) + y = (x + a) + y = (y + a) + x = f(y) + x\,.$$

Niisiis on antud funktsionaalvõrrandi lahenditeks parajasti funktsioonid kujul $f(x) = x + a$. □

Funktsionaalvõrrandi lahendit tuleb alati kontrollida!

Ülesanne 4.2 Leia kõik funktsioonid $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, mis rahuldavad kõigi $x, y \in \mathbb{R}$ korral võrdust
$$f(x) \cdot y = f(y) \cdot x\,.$$

Ülesanne 4.3 Leia kõik funktsioonid $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, mis rahuldavad kõigi naturaalarvude a ja b korral võrdust

$$f(a + b) = f(a) + f(b)\,.$$

Lahendus. Tuletame meelde, et siinses õpikusarjas loeme naturaalarvuks ka arvu 0. Proovime jälle võtta näiteks $b = 0$ ja saame

$$f(a) = f(a) + f(0)\,,$$

millest järeldub, et $f(0) = 0$. Seda pole just palju, aga alustuseks midagi ikka!

Püüame uurida, millega võiks võrduda $f(1)$. Asendame $a = 0$ ja $b = 1$ ja saame
$$f(0 + 1) = f(0) + f(1)\,,$$

mis (arvestades, et $f(0) = 0$) lihtsustub võrduseks $f(1) = f(1)$. See ei anna meile mingit uut informatsiooni.

Jätame $f(1)$ korraks rahule ja uurime väärtust $f(2)$. Selle võime saada, valides $a = b = 1$:
$$f(2) = f(1 + 1) = f(1) + f(1) = 2f(1)\,.$$

Ahhaa, see on huvitav! Milline iganes ka ei oleks $f(1)$ väärtus, $f(2)$ on temast kaks korda suurem!

Kuidas on lugu $f(3)$ väärtusega? Valik $a = 2, b = 1$ annab

$$f(3) = f(2 + 1) = f(2) + f(1) = 2f(1) + f(1) = 3f(1)\,.$$

Järjest huvitavamaks läheb! Milline iganes ka ei oleks $f(1)$ väärtus, $f(3)$ on temast kolm korda suurem! Kas siit hakkab välja kooruma muster?

Proovime $f(4)$ ja $f(5)$ ka läbi:

$$f(4) = f(3+1) = f(3) + f(1) = 3f(1) + f(1) = 4f(1)\,,$$
$$f(5) = f(4+1) = f(4) + f(1) = 4f(1) + f(1) = 5f(1)\,.$$

See ei saa enam juhus olla. Tähistades $f(1) = k$ tekib hüpotees, et sobivad parajasti funktsioonid kujul $f(n) = n \cdot k$ (ehk $f(n) = k \cdot n$), kus k on mingi fikseeritud naturaalarv. Kontrollime, et kõik sellised funktsioonid rahuldavad ülesande võrdust. Tõepoolest, kõigi $a, b \in \mathbb{N}$ korral saame

$$f(a+b) = k \cdot (a+b) = k \cdot a + k \cdot b = f(a) + f(b)\,.$$

Kas me aga oleme eespool juhte $n = 0, 1, \ldots, 5$ läbi vaadates tõestanud, et $f(n) = k \cdot n$ kehtib tõepoolest *kõigi* naturaalarvude n jaoks? Rangelt võttes mitte. Selleks tuleb teha veel kaks tähelepanekut.

Esiteks näitame, et ülaltehtud arutelu abil saame võrdusest $f(n) = k \cdot n$ järeldada võrduse $f(n+1) = k \cdot (n+1)$ (kus n tähistab nüüd mingit konkreetset naturaalarvu ja $k = f(1)$). See on lihtne: kui $f(n) = k \cdot n$, siis saame ülesande tingimuses valida $a = n$ ja $b = 1$, mis annab

$$f(n+1) = f(n) + f(1) = k \cdot n + k = k \cdot (n+1)\,. \tag{4.1}$$

Olles kontrollinud väite kehtivuse $n = 0$ puhul, saame võrduse (4.1) abil tuletada väite kehtivuse juhul $n = 1$, sealt omakorda juhul $n = 2$ jne.

Nüüd jääb üle tõdeda, et sel moel jõuame kõigi naturaalarvudeni[1], mis lõpetabki väite tõestuse.

Niisugust tehnikat, kus kõigepealt tõestatakse väide mõnel lihtsal väikesel juhul ning tuletatakse seejärel üldine reegel järjest suurematele juhtudele liikumiseks, nimetatakse *matemaatiliseks induktsiooniks*. Põhjalikumalt saad matemaatilisest induktsioonist lugeda õpikust „Võistlusmatemaatika põhivara”. □

Ülesanne 4.4 Leia kõik funktsioonid $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, mis rahuldavad kõigi täisarvude a ja b korral võrdust

$$f(a+b) = f(a) + f(b)\,.$$

Ülesanne 4.5 Leia kõik funktsioonid $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, mille jaoks iga $x \in \mathbb{R}$ korral kehtib võrdus

$$(f(x))^2 = 4x(f(x) - x)\,.$$

4.1 Lahendused

4.2 Püüame jälle lihtsustada ülesande võrrandi kujule $f(x) = \ldots$. Seda aitab teha valik $y = 1$, mis annab

$$f(x) = f(1) \cdot x\,.$$

[1]Rangelt võttes on see tõdemus tegelikult osa naturaalarvude hulga definitsioonist.

Ka $f(1)$ peab olema mingi reaalarv, niisiis saavad lahendid esituda ainult kujul $f(x) = ax$ ($a \in \mathbb{R}$). Jääb veel kontrollida, et kõik niisugused funktsioonid sobivad:

$$f(x) \cdot y = (ax)y = (ay)x = f(y) \cdot x \,.$$

Niisiis on antud funktsionaalvõrrandi lahenditeks parajasti funktsioonid kujul $f(x) = ax$, kus a on mingi fikseeritud reaalarv.

4.4 Ülesandes 4.3 nägime, et naturaalarvude korral sobivad ainult funktsioonid kujul $f(n) = k \cdot n$, kus $k = f(1)$ on mingi naturaalarv. Täpselt sama moodi saame nüüd tõestada, et $n = 0, 1, 2, \ldots$ jaoks sobivad parajasti funktsioonid kujul $f(n) = k \cdot n$, kus $k = f(1)$ on täisarv (st k võib olla ka negatiivne).

Mis saab negatiivsete argumendiväärtustega? Vaatleme funktsiooni kohal $-n$ (kus $n > 0$). Valides ülesande võrduses $a = n$ ja $b = -n$ ja tuletade meelde, et $f(0) = 0$, saame

$$0 = f(0) = f(n + (-n)) = f(n) + f(-n) = k \cdot k + f(-n)\,,$$

millest järeldub

$$f(-n) = -k \cdot n = k \cdot (-n)\,.$$

Niisiis kehtib võrdus $f(n) = k \cdot n$ ka negatiivsete väärtuste korral (ja järelikult ka kõigi täisarvude jaoks).

4.5 Teisendame ülesandes antud võrdust:

$$\begin{aligned}
(f(x))^2 &= 4x(f(x) - x)\,,\\
(f(x))^2 &= 4xf(x) - 4x^2\,,\\
(f(x))^2 - 4xf(x) + (2x)^2 &= 0\,,\\
(f(x) - 2x)^2 &= 0\,.
\end{aligned}$$

Reaalarvu ruut on 0 parajasti siis, kui reaalarv ise on 0. Kuna võrdus peab kehtima iga muutuja x väärtuse korral, saame samuti iga $x \in \mathbb{R}$ jaoks

$$f(x) = 2x\,,$$

mis ongi ülesande ainsaks lahendiks.

Indeks