9. Teleskoopsummad

Teleskoopsumma on ülesandetüüp, kus pika summaavaldise arvutamiseks tuleb liikmeid omavahel kavalalt kombineerida.

Esimene tüüpvõte on summa liikmeid niimoodi teisendada, et vahepealsed väärtused välja koonduvad.

Ülesanne 9.1 Olgu $n \geqslant 1$. Tõesta võrratus

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}<1\,.$$

Lahendus. Paneme tähele, et

$$\frac{1}{k\cdot(k+1)}=\frac{k+1-k}{k\cdot(k+1)}=\frac{k+1}{k\cdot(k+1)}-\frac{k}{k\cdot(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\,.$$

Seega saame ülesande summat teisendada järgmiselt:

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=1-\frac{1}{n+1}<1\,.$$

Teine võte, mida samuti tihti esineb, on summa liikmeid paarikaupa kombineerida ja saada nii mingi lihtsam või lausa konstantne avaldis.

Ülesanne 9.2 (Lõppvoor 2006, 10. klass) Arvuta summa

$$\frac{1}{1+2^{-2006}}+\ldots+\frac{1}{1+2^{-1}}+\frac{1}{1+2^{0}}+\frac{1}{1+2^{1}}+\ldots+\frac{1}{1+2^{2006}}\,.$$

Lahendus. Ülesande summa kuju vihjab, et kasulik on kombineerida liimeid paarikaupa summa otstest. Tõepoolest:

$$\frac{1}{1+2^{-n}}+\frac{1}{1+2^{n}}=\frac{1+2^{n}+1+2^{-n}}{(1+2^{-n})(1+2^{n})}=\frac{1+2^{n}+1+2^{-n}}{1+2^{n}+2^{-n}+1}=1\,.$$

Selliseid paare on summas 2006 tükki, lisaks jääb üle keskmine liige $\frac{1}{1+2^{0}}=\frac{1}{2}$.

Seega on kogu summa väärtus $2006\frac{1}{2}$.

Ülesanded

Ülesanne 9.3 (Lõppvoor 2010, 9. klass) Tõesta, et

$$2010 < \frac{2^2+1}{2^2-1} + \frac{3^2+1}{3^2-1} + \ldots + \frac{2010^2+1}{2010^2-1} < 2010\frac{1}{2}\,.$$

Ülesanne 9.4 (Lõppvoor 1999, 11. klass) Leia avaldise

$$f\left(\frac{1}{2000}\right) + f\left(\frac{2}{2000}\right) + \ldots + f\left(\frac{1999}{2000}\right) + f\left(\frac{2000}{2000}\right) + f\left(\frac{2000}{1999}\right) + \ldots + f\left(\frac{2000}{1}\right)$$

väärtus, kui $f(x) = \dfrac{x^2}{1+x^2}$.

Ülesanne 9.5 (Sügisene lahtine võistlus 2019, noorem rühm) Leia avaldise

$$\frac{1}{(\frac{1}{2019})^2+1} + \frac{1}{(\frac{2}{2018})^2+1} + \frac{1}{(\frac{3}{2017})^2+1} + \ldots + \frac{1}{(\frac{2018}{2})^2+1} + \frac{1}{(\frac{2019}{1})^2+1}$$

väärtus.

Ülesanne 9.6 (Lõppvoor 2022, 10. klass) Leia summa

$$\sqrt{1+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}} + \sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}} + \ldots + \sqrt{1+\frac{1}{2021^2}+\frac{1}{2022^2}}\,.$$

Ülesanne 9.7 (Piirkonnavoor 2009, 10. klass) Tõesta võrratus

$$\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{2009^2}\right) \geqslant \frac{2}{3}\,.$$

Ülesanne 9.8 (Piirkonnavoor 1998, 12. klass) Tõesta võrdus

$$\frac{\sin 1^\circ}{\cos 1^\circ \cos 2^\circ} + \frac{\sin 1^\circ}{\cos 2^\circ \cos 3^\circ} + \ldots + \frac{\sin 1^\circ}{\cos 14^\circ \cos 15^\circ} = \frac{\sin 14^\circ}{\cos 15^\circ \cos 1^\circ}\,.$$

Lahendused

9.3 Teisendame ülesande summat:

$$\begin{aligned}
&\frac{2^2+1}{2^2-1} + \frac{3^2+1}{3^2-1} + \ldots + \frac{2010^2+1}{2010^2-1} = \\
&= 1 + \frac{2}{2^2-1} + 1 + \frac{2}{3^2-1} + \ldots + 1 + \frac{2}{2010^2-1} = \\
&= 2009 + \frac{2}{2^2-1} + \frac{2}{3^2-1} + \ldots + \frac{2}{2010^2-1}\,.
\end{aligned}$$

Ühest küljest näeme, et

$$\frac{2}{2^2-1} + \frac{2}{3^2-1} + \frac{2}{4^2-1} = \frac{2}{3} + \frac{2}{8} + \frac{2}{15} = \frac{2\cdot 40 + 2\cdot 15 + 2\cdot 8}{120} = \frac{126}{120} > 1\,,$$

mis tõestab vasakpoolse võrratuse.

Teisest küljest

$$\frac{2}{n^2-1} = \frac{(n+1)-(n-1)}{(n+1)(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}\,.$$

Seega

$$\begin{aligned}&\frac{2}{2^2-1} + \frac{2}{3^2-1} + \frac{2}{4^2-1} + \ldots + \frac{2}{2008^2-1} + \frac{2}{2009^2-1} + \frac{2}{2010^2-1} = \\ &= \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{2007} - \frac{1}{2009} + \frac{1}{2008} - \frac{1}{2010} + \frac{1}{2009} - \frac{1}{2011} = \\ &= \frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2010} - \frac{1}{2011} < 1\frac{1}{2}\,,\end{aligned}$$

mis tõestab parempoolse võrratuse.

9.4 Kombineerime liikmeid paarikaupa summa otstest. Näeme, et

$$f\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{(\frac{a}{b})^2}{1+(\frac{a}{b})^2} = \frac{\frac{a^2}{b^2}}{\frac{a^2+b^2}{b^2}} = \frac{a^2}{a^2+b^2}\,.$$

Sama moodi saame ka $f\left(\frac{b}{a}\right) = \frac{b^2}{a^2+b^2}$, järelikult

$$f\left(\frac{a}{b}\right) + f\left(\frac{b}{a}\right) = \frac{a^2}{a^2+b^2} + \frac{b^2}{a^2+b^2} = 1\,.$$

Niisuguseid paare on summas 1999 tükki, lisaks jääb üle veel keskmine liige väärtusega $f\left(\frac{2000}{2000}\right) = f(1) = \frac{1}{1+1^2} = \frac{1}{2}$. Kogu summa väärtus on siis järelikult $1999\frac{1}{2}$.

9.5 Kombineerime liikmeid paarikaupa summa otstest. Näeme, et

$$\frac{1}{(\frac{a}{b})^2+1} = \frac{1}{\frac{a^2+b^2}{b^2}} = \frac{b^2}{a^2+b^2}\,.$$

Sama moodi $\frac{1}{(\frac{b}{a})^2+1} = \frac{a^2}{a^2+b^2}$, mistõttu

$$\frac{1}{(\frac{a}{b})^2+1} + \frac{1}{(\frac{b}{a})^2+1} = \frac{b^2}{a^2+b^2} + \frac{a^2}{a^2+b^2} = 1\,.$$

Niisuguseid paare on summas $\left\lfloor \frac{2019}{2} \right\rfloor = 1009$ tükki, lisaks jääb üle veel keskmine liige $\frac{1}{(\frac{1010}{1010})^2+1} = \frac{1}{2}$. Kogu summa väärtus on seega $1009\frac{1}{2}$.

9.6 Paneme tähele, et

$$\begin{aligned}\sqrt{1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}} &= \sqrt{\frac{n^2(n+1)^2+(n+1)^2+n^2}{n^2(n+1)^2}} = \\ =&\sqrt{\frac{n^4+2n^3+3n^2+2n+1}{n^2(n+1)^2}} = \sqrt{\frac{(n^2+n+1)^2}{n^2(n+1)^2}} = \frac{n^2+n+1}{n(n+1)} = \\ =&1+\frac{1}{n(n+1)} = 1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}.\end{aligned}$$

Seega

$$\begin{aligned}&\sqrt{1+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}}+\ldots+\sqrt{1+\frac{1}{2021^2}+\frac{1}{2022^2}} = \\ &= 1+\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\ldots+1+\frac{1}{2021}-\frac{1}{2022} \\ &= 2021+\frac{1}{1}-\frac{1}{2022} = 2021\frac{2021}{2022}.\end{aligned}$$

9.7 Paneme tähele, et

$$1-\frac{1}{k^2} = \frac{k^2-1}{k^2} = \frac{(k-1)(k+1)}{k^2} = \frac{k-1}{k}\cdot\frac{k+1}{k}.$$

Järelikult

$$\begin{aligned}&\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{5^2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{2008^2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{2009^2}\right) = \\ &= \frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\ldots\cdot\frac{2007}{2008}\cdot\frac{2009}{2008}\cdot\frac{2008}{2009}\cdot\frac{2010}{2009} = \\ &= \frac{2}{3}\cdot\frac{2010}{2009} > \frac{2}{3}.\end{aligned}$$

9.8 Paneme tähele, et iga $n=1,2,\ldots,14$ korral

$$\begin{aligned}\frac{\sin 1^\circ}{\cos n^\circ\cos(n+1)^\circ} = \frac{\sin((n+1)^\circ-n^\circ)}{\cos n^\circ\cos(n+1)^\circ} &= \frac{\sin(n+1)^\circ\cos n^\circ-\cos(n+1)^\circ\sin n^\circ}{\cos n^\circ\cos(n+1)^\circ} = \\ &= \tan(n+1)^\circ-\tan n^\circ.\end{aligned}$$

Järelikult saame ülesande avaldise teisendada kujule

$$\begin{aligned}&\tan 2^\circ-\tan 1^\circ+\tan 3^\circ-\tan 2^\circ+\tan 4^\circ-\tan 3^\circ+\ldots+\tan 15^\circ-\tan 14^\circ = \\ =&\tan 15^\circ-\tan 1^\circ.\end{aligned}$$

Jääb veel tähele panna, et

$$\frac{\sin 14^\circ}{\cos 15^\circ\cos 1^\circ} = \frac{\sin(15^\circ-1^\circ)}{\cos 15^\circ\cos 1^\circ} = \frac{\sin 15^\circ\cos 1^\circ-\cos 15^\circ\sin 1^\circ}{\cos 15^\circ\cos 1^\circ} = \tan 15^\circ-\tan 1^\circ.$$