8. Topeltloendamine

Topeltloendamine on meetod, mis teeb täpselt seda, mida tema nimi ütleb – ta loendab mingite objektide arvu kahel erineval moel. Kuna loendatud objektide arv on üks ja seesama, võime niimoodi leida huvitavaid seoseid loendamisel kasutatud väärtuste vahel.

Ülesanne 8.1 (Piirkonnavoor 1995, 9. klass) Klassiõhtul tantsis iga poiss täpselt kahe tüdrukuga ja iga tüdruk täpselt kahe poisiga. Tõesta, et poisse ja tüdrukuid oli klassiõhtul ühepalju.

Lahendus. Olgu klassiõhtust osavõtnute seas p poissi ja t tüdrukut. Loendame õhtu jooksul tantsupõrandal käinud paaride arvu n kahel erineval moel. Ühest küljest, kuna iga poiss tantsis täpselt kahe tüdrukuga, kuulub iga poiss täpselt kahte tantsupaari, mistõttu $n = 2p$. Teisest küljest, kuna ka iga tüdruk tantsis täpselt kahe poisiga, kuulub iga tüdruk samuti täpselt kahte paari, mistõttu $n = 2t$. Niisiis $2p = 2t$, millest järeldubki vajalik võrdus $p = t$.

Selleks, et topeltloendamist rakendada, on sageli kasulik ise defineerida teatud paaride hulk, mille elemente loendada ühest küljest paaride esimeste poolte ja teisest küljest teiste poolte järgi.

Ülesanne 8.2 Pidulikul vastuvõtul surus iga külaline korra kätt igaühega oma tuttavatest. Tõesta, et neid inimesi, kes kätlesid paaritu arvu külalistega, oli endid kokku paarisarv.

Lahendus. Olgu A vastuvõtule kutsutud külaliste ning K vastuvõtul aset leidnud käepigistuste hulk. Loendame elemente paaride hulgas

$$P = \{(a,k) : a \in A, k \in K, \text{külaline } a \text{ osales käepigistuses } k\}.$$

Kuna igas käepigistuses osales kaks külalist, on iga $k \in K$ jaoks hulgas P kaks elementi, seega $|P| = 2 \cdot |K|$. Muuhulgas saame, et $|P|$ on paarisarv.

Tähistame inimese a tuttavate arvu vastuvõtul $t(a)$. Siis on iga $a \in A$ jaoks hulgas P täpselt $t(a)$ elementi, järelikult

$$|P| = \sum_{a \in A} t(a).$$

Et $|P|$ on paarisarv, peab liidetavate $t(a)$ hulgas paarituid arve olema paarisarvul, mida oligi tarvis tõestada.

Kui lugejale tundub, et ta on midagi väga sarnast siin raamatus juba kohanud, siis ta ei eksi. See ülesanne on tõepoolest samaväärne teoreemiga 3.1.

Ülesanded

Ülesanne 8.3 (Piirkonnavoor 1995, 10. klass) Klassiõhtul tantsis iga poiss vähemalt pooltega tüdrukutest ja iga tüdruk mitte rohkem kui pooltega poistest. Tõesta, et nii poisse kui ka tüdrukuid oli klassiõhtul paarisarv.

Ülesanne 8.4 (Lõppvoor 1994, 9. klass) Nummerdame korrapärase viisnurga küljed ja diagonaalid arvudega $1, 2, \ldots, 10$ ja vaatleme kõikvõimalikke kolmnurki, mille tippudeks on esialgse viisnurga tipud. Kas on võimalik, et kõigi selliste kolmnurkade külgede numbrite summad osutuvad võrdseks?

Ülesanne 8.5 (Piirkonnavoor 1999, 9. klass) Kahel kumeral hulknurgal on kokku 17 tippu ja 53 diagonaali. Mitu külge on kummalgi hulknurgal?

Ülesanne 8.6 (Lõppvoor 2000, 10. klass) Tasandil antud 2000 sirgest värvitakse punaseks kõik need, millel on paaritu arv erinevaid lõikepunkte ülejäänud sirgetega.

a) Kas punaseid sirgeid võib olla paaritu arv, kui tasandil antud sirgete hulgas ei ole paralleelseid?

b) Kas punaseid sirgeid võib olla paaritu arv, kui ükski antud sirgete kolmik ei lõiku ühes punktis?

Ülesanne 8.7 (Piirkonnavoor 2007, 11. klass) Ruudustikus mõõtmetega 2007×2007 värvitakse mõned ruudud mustaks ning iga rea, iga veeru ja iga diagonaali (pikkusega 1 kuni 2007) puhul loetakse kokku seal asuvate mustade ruutude arv. Tõesta, et selliseid ridu, veerge ja diagonaale, kus esineb paarisarv musti ruute, on kokku paarisarv.

Ülesanne 8.8 (Lõppvoor 2021, 12. klass) Ruumis on valitud 6 erinevat sirget. Leia suurim võimalik selliste punktide arv, milles lõikub vähemalt 3 valitud sirget.

Ülesanne 8.9 (Lõppvoor 1996, 11. klass) Tasandile on paigutatud n kolmnurka nii, et mistahes kolmel neist kolmnurkadest leidub ühine tipp ja ühelgi neljal neist kolmnurkadest ei leidu ühist tippu. Leia arvu n suurim võimalik väärtus.

Ülesanne 8.10 (Sügisene lahtine võistlus 2014, vanem rühm) Ruudustikus on n rida ja m veergu (n ja m on positiivsed täisarvud). Leia kõik naturaalarvude paarid (k, l), mille korral saab ruudustikus osa ruute märgistada nii, et igas reas on täpselt k ruutu märgistatud ja igas veerus on täpselt l ruutu märgistatud.

Ülesanne 8.11 (Sügisene lahtine võistlus 2002, vanem rühm, a) osa) Valimisvõitluse käigus avaldasid K “kollast” ajalehte kompromiteerivat materjali P poliitiku kohta, kusjuures igast poliitikust kirjutati paaritus arvus ajalehtedes ning iga ajaleht kirjutas paaritust arvust poliitikutest. Tõesta, et ajalehtede arv K ja poliitikute arv P on kas mõlemad paaritud või mõlemad paarisarvud.

Ülesanne 8.12 (Lõppvoor 2022, 12. klass) Olgu n positiivne täisarv. Iga $k = 1, 2, \ldots, n-1$ korral nimetame *naabriteks* kaht kombinatsiooni n elemendist k-kaupa, kui neis kombinatsioonides on täpselt $k-1$ ühist elementi (ehk nad erinevad täpselt ühe elemendi poolest). Tõesta, et sellises n elemendist k-kaupa kombinatsioonide valikus, milles ükski kaks kombinatsiooni pole naabrid, ei saa olla rohkem kui C_{n-1}^{k-1} kombinatsiooni.

Vaata ka ülesannet 3.5.

Lahendused

8.3 Olgu poiste ja tüdrukute arv klassis vastavalt p ja t. Hindame tantsupaaride arvu n kahel erineval moel.

Vaatleme suvalist poissi. Neid paare, kus ta tantsis, pidi ülesande tingimuste järgi olema vähemalt $\frac{t}{2}$. Kuna klassiõhtul osales p poissi, pidi paare olema kokku vähemalt $p \cdot \frac{t}{2}$, kust saame võrratuse $n \geqslant p \cdot \frac{t}{2}$.

Vaatleme nüüd suvalist tüdrukut. Neid paare, kus ta tantsis, pidi ülesande tingimuste järgi olema mitte rohkem kui $\frac{p}{2}$. Kuna klassiõhtul osales t tüdrukut, pidi paare olema kokku ülimalt $t \cdot \frac{p}{2}$, kust saame võrratuse $n \leqslant t \cdot \frac{p}{2}$.

Kokkuvõtteks saame võrratuste ahela

$$t \cdot \frac{p}{2} \geqslant n \geqslant p \cdot \frac{t}{2},$$

millest järeldub, et mõlemas võrratuses peab tegelikult kehtima võrdus. See saab nii olla ainult siis, kui iga poiss tantsis täpselt $\frac{t}{2}$ tüdrukuga ja iga tüdruk täpselt $\frac{p}{2}$ poisiga, mistõttu p ja t peavad olema paarisarvud.

8.4 Vastus: ei.

Arvutame kahel moel kõigi kolmnurkade küljesummade summa.

Olgu iga kolmnurga külgede numbrite summa a. Kuna viisnurga tippudest saab moodustada 10 kolmnurka, peab kõigi kolmnurkade küljesummade summa ühest küljest olema $10a$.

Teisest küljest osaleb iga viisnurga külg ja diagonaal kolmes kolmnurgas. See tähendab, et otsitav summa peab olema

$$3 \cdot (1 + 2 + \ldots + 10) = 3 \cdot \frac{10 \cdot 11}{2} = 165,$$

mis on paaritu arv. Oleme saanud vastuolu, sest $10a$ peab olema paaris.

8.5 Vastus: 6 ja 11.

Leiame topeltloendamise abil valemi kumera n-nurga diagonaalide arvu a jaoks. Loendame elemente paaride hulgas

$$P = \{(t, d) : \text{tipp } t \text{ on diagonaali } d \text{ otspunkt}\}.$$

Ühest küljest lähtub n-nurga igast tipust $n-3$ diagonaali, seega $|P| = n(n-3)$. Teisest küljest on igal diagonaalil täpselt 2 otspunkti, seega $|P| = 2a$. Järelikult $2a = n(n-3)$ ehk $a = \dfrac{n(n-3)}{2}$.

Olgu vaadeldavatel hulknurkadel vastavalt n_1 ja n_2 tippu. Ülesande tingimuste ja tuletatud valemi põhjal saame võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} n_1 + n_2 &= 17 \\ \dfrac{n_1(n_1-3)}{2} + \dfrac{n_2(n_2-3)}{2} &= 53 \end{cases}.$$

Asendame esimesest võrrandist $n_2 = 17 - n_1$ teise võrrandisse:

$$\begin{aligned} \frac{n_1(n_1-3)}{2} + \frac{(17-n_1)(14-n_1)}{2} &= 53\,, \\ \frac{n_1^2 - 3n_1 + 238 - 31n_1 + n_1^2}{2} &= 53\,, \\ \frac{2n_1^2 - 34n_1 + 238}{2} &= 53\,, \\ n_1^2 - 17n_1 + 119 &= 53\,, \\ n_1^2 - 17n_1 + 66 &= 0\,, \\ (n_1-6)(n_1-11) &= 0\,. \end{aligned}$$

Niisiis on n_1 võimalikud väärtused 6 ja 11, mis annavad seosest $n_1 + n_2 = 17$ muutuja n_2 väärtusteks vastavalt 11 ja 6. Ülesande sõnastuse seisukohast saame kokkuvõttes ainult ühe võimaluse, et vaadeldavatel hulknurkadel on 6 ja 11 tippu (ning järelikult ka külge).

8.6 Vastus: a) jah, b) ei.

a) Võtame tasandil sirge ℓ ja temast väljaspool punkti M ning valime 1999 erinevat sirget, mis läbivad punkti M ning lõikavad sirget ℓ. Siis on punane ainult sirge ℓ, sest tal on ülejäänutega 1999 lõikepunkti, kõigil teistel sirgetel aga on ülejäänutega 2 lõikepunkti.

b) Vaatleme suvalist 2000 sirge paigutust tasandil, mille puhul ükski kolmik ei lõiku ühes punktis. Olgu $\mathscr{S}$ nende sirgete hulk ning $\mathscr{P}$ nende omavaheliste lõikepunktide hulk. Loendame elemente paaride hulgas

$$H = \{(s,P) : s \in \mathscr{S}, P \in \mathscr{P}, \text{ punkt } P \text{ asub sirgel } s\}\,.$$

Kuna iga lõikepunkti läbib täpselt kaks sirget, leidub iga punkti $P \in \mathscr{P}$ jaoks täpselt kaks vaadeldavat paari (s,P). Järelikult $|H| = 2 \cdot |\mathscr{P}|$; muuhulgas saame, et $|H|$ on paarisarv.

Teisest küljest panustab iga sirge s loendatavasse paaride hulka H nii mitu elementi, kui palju lõikepunkte tal teiste sirgetega on. Kuna $|H|$ on paarisarv, peab punaseid sirgeid (mis annavad loendatavate paaride koguarvu paarituarvulise panuse) olema samuti paarisarv.

Selle ülesande b)-osa saab lahendada ka teoreemi 3.1 abil. Defineerime graafi, mille tippudeks on sirged hulgast $\mathscr{S}$, ning ühendame $s_1, s_2 \in \mathscr{S}$ graafis servaga parajasti siis, kui sirged s_1 ja s_2 lõikuvad. Sel juhul on sirge $s \in \mathscr{S}$ punane parajasti siis, kui $deg(s)$ on paaritu, millest järeldubki teoreemi 3.1 abil ülesande b)-osa väide.

8.7 Olgu M ruudustiku kõigi mustaks värvitud ruutude hulk ning S tema kõigi ridade, veergude ja diagonaalide hulk (mida edaspidi nimetame ruudustiku *sirgeteks*). Loendame elemente paaride hulgas

$$P = \{(m, s) : m \in M, r \in S, \text{ruut } m \text{ asub sirgel } s\}.$$

Vaatleme kõigepealt suvalist musta ruutu m_1. Ta asub täpselt ühes reas, ühes veerus ja kahel diagonaalil. Seega leidub hulgas P täpselt neli paari, mille üheks pooleks on ruut m_1. Kuna see arutelu kehtib kõigi mustade ruutude kohta, peab hulga P elementide arv jaguma 4-ga.

Vaatleme nüüd mingit ruudustiku sirget s_1, millel asub paaritu arv musti ruute. Niisugune sirge panustab hulka P paaritu arvu paare. Kuna aga $|P|$ on paarisarv, peab paaritu arvu mustade ruutudega sirgeid olema ruudustikus paarisarvul.

Lõpetuseks paneme tähele, et ruudustikus on kokku paarisarv sirgeid (täpsemalt 12040). Niisiis peab paarisarvul olema ka neid sirgeid, millel on paarisarv mustaks värvitud ruute.

8.8 Vastus: 4.

Hindame kahel moel antud sirgetest moodustuvate paaride arvu. Ühest küljest saab kuuest sirgest moodustada $C_6^2 = \dfrac{6 \cdot 5}{2} = 15$ paari.

Vaatleme nüüd punkte, kus lõikub vähemalt kolm antud sirget; olgu nende punktide arv n. Kui ühes punktis lõikub (vähemalt) kolm sirget, tekitavad need sirged omavahel ka (vähemalt) kolm erinevat paari. Järelikult ei saa sirgete paare olla rohkem kui $3n$. Seega $3n \leqslant 15$ ehk $n \leqslant 5$.

Viie lõikepunkti realiseerumiseks peavad kõik 6 sirget omavahel lõikuma ja kõigis lõikepunktides peab lõikuma täpselt 3 sirget. Vaatleme ühte antud 6-st sirgest. Äsjatõestatu põhjal peab ta lõikuma kõigi teiste sirgetega, kusjuures lõikumised peavad toimuma 3 kaupa. See pole võimalik, sest üle on 5 sirget, aga igas vaadeldavale sirgele kuuluvas lõikepunktis peab peale vaadeldava sirge lõikuma veel kaks sirget.

Niisiis ei saa 6-st sirgest tekkida rohkem kui 4 punkti, kus lõikuks vähemalt 3 neist sirgetest. 4 punkti on aga võimalik lihtsasti realiseerida – vaatleme näiteks tetraeedrit ja tema 6 serva poolt määratud sirgeid.

8.9 Vastus: 4.

Proovime kõigepealt loendada paare kolmnurkadest ja nendele kuuluvatest tippudest. Olgu $\mathscr{K}$ kõigi vaadeldavate kolmnurkade hulk (seega $|\mathscr{K}| = n$) ning $\mathscr{S}$ tasandi nende punktide hulk, mis on tipuks vähemalt ühele vaadeldavale kolmnurgale. Loendame elemente paaride hulgas

$$P = \{(K, S) : K \in \mathscr{K}, S \in \mathscr{S}, \text{punkt } S \text{ on kolmnurga } K \text{ tipp}\}.$$

Igal kolmnurgal on 3 tippu, seega $|P| = 3 \cdot |\mathscr{K}| = 3n$. Teisest küljest on hulga $\mathscr{S}$ iga punkt tipuks mitte rohkem kui kolmele vaadeldavale kolmnurgale, mistõttu $|P| \leqslant 3 \cdot |\mathscr{S}|$. Saame võrratuse $3n \leqslant 3 \cdot |\mathscr{S}|$ ehk $n \leqslant |\mathscr{S}|$, mis ei anna meile mitte midagi huvitavat.

Proovime teistmoodi. Olgu $\mathscr{T}$ tasandi nende punktide hulk, mis on tipuks kolmele vaadeldavale kolmnurgale, ja loendame elemente paaride hulgas

$$Q = \{(K, T) : K \in \mathscr{K}, T \in \mathscr{T}, \text{punkt } T \text{ on kolmnurga } K \text{ tipp}\}.$$

Vastavalt ülesande tingimustele on igal kolmel kolmnurgal on üks ühine tipp, kusjuures see tipp peab iga kolmnurgakolmiku jaoks olema erinev, sest muidu saaksime tipu, mis kuulub vähemalt neljale kolmnurgale. Järelikult

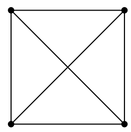
$$|\mathscr{T}| = C_n^3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}.$$

Kuna hulga $\mathscr{T}$ iga punkt on tipuks kolmele kolmnurgale, saame $|Q| = 3 \cdot |\mathscr{T}|$. Teisest küljest on igal hulga $\mathscr{K}$ kolmnurgal hulgas $\mathscr{T}$ ülimalt kolm tippu, mistõttu $|Q| \leqslant 3 \cdot |\mathscr{K}| = 3n$. Kokkuvõttes saame võrratuse

$$3 \cdot \frac{n(n-1)(n-2)}{6} \leqslant 3n,$$

mis on samaväärne võrratusega $(n-1)(n-2) \leqslant 6$. Siit järeldub $n \leqslant 4$, sest kui kehtiks $n > 4$, saaksime $(n-1)(n-2) > 3 \cdot 2 = 6$.

Konstruktsioon 4 kolmnurgaga on lihtne; vt joonist.



8.10 Vastus: sobivad kõik naturaalarvud kujul $k = t \cdot \dfrac{m}{\text{SÜT}(n,m)}$ ja $l = t \cdot \dfrac{n}{\text{SÜT}(n,m)}$, kus t on täisarv, mis rahuldab tingimusi $0 \leqslant t \leqslant \text{SÜT}(n,m)$.

Vaatleme suvalist ülesande tingimustele vastavat ruutude märgistust ja loeme märgistatud ruudud kahel moel kokku.

Ühest küljest on ruudustikus n rida ja igas reas on k märgistatud ruutu, seega on märgistatud ruute kokku nk. Teisest küljest on ruudustikus m veergu ja igas veerus on l märgistatud ruutu, seega on märgistatud ruute kokku ml. Järelikult $nk = ml$.

Arv $nk = ml$ on arvude n ja m ühine kordne, järelikult on ta ka nende vähima ühise kordse kordne.[1] Olgu siis $nk = ml = t \cdot \text{VÜK}(n,m)$, kus t on mittenegatiivne täisarv. Järelikult peavad k ja l avalduma kujul

$$k = t \cdot \frac{\text{VÜK}(n,m)}{n} \quad \text{ja} \quad l = t \cdot \frac{\text{VÜK}(n,m)}{m}$$

sama mittenegatiivse täisarvu t jaoks. Teoreemi 21.2 põhjal on need võrdused samaväärsed võrdustega

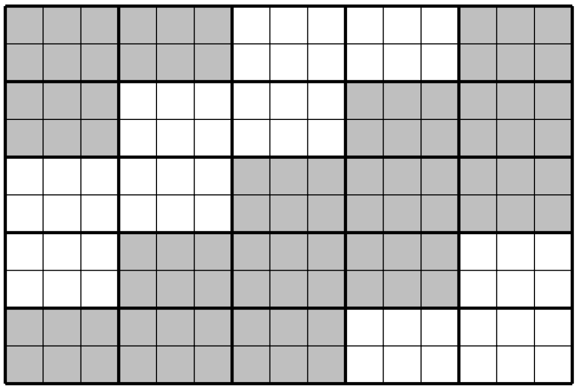
$$k = t \cdot \frac{m}{\text{SÜT}(n,m)} \quad \text{ja} \quad l = t \cdot \frac{n}{\text{SÜT}(n,m)}.$$

Kuna igas reas on m ruutu, kehtib muidugi võrratus $k \leqslant m$, millest omakorda järeldub, et $t \leqslant \text{SÜT}(n,m)$.

Näitame, et suvalise täisarvu t (kus $0 \leqslant t \leqslant \text{SÜT}(n,m)$) jaoks saab vajaliku märgistusviisi leida. Jagame algse $n \times m$ ruudustiku $\text{SÜT}(n,m) \times \text{SÜT}(n,m)$ plokiks mõõtmetega $\dfrac{n}{\text{SÜT}(n,m)}$ ja $\dfrac{m}{\text{SÜT}(n,m)}$. Märgime ruute plokkide kaupa nii, et igas

[1] See väide on lihtne järeldus teoreemist 21.1, kui uurida arvude n ja m kaonoonilisi esitusi algarvude astmete korrutisena.

plokireas ja plokiveerus on märgitud t plokki. Selleks on palju võimalusi; näiteks võime esimeses plokireas märkida t esimest plokki ja siis nihutada iga järgmist plokirida eelmisega võrreldes tsükliliselt 1 ploki võrra. Joonisel on toodud näide, mille puhul $n = 10$, $m = 15$ ja $t = 3$ (siis SÜT$(n, m) = 5$, $k = 9$ ja $l = 6$).



8.11 Kui mõnel "kollasel" ajalehel on kompromiteerivat materjali mõne poliitiku kohta, siis laseme tal sellest poliitikust kirjutada täpselt ühe artikli. Hindame artiklite arvu paarsust.

Kui ajalehtede arv K on paaritu, kirjutatakse poliitikutest kokku paaritu arv artikleid, sest igas ajalehes ilmus neid paaritul arvul. Kui poliitikute arv P oleks paaris, peaks ka artikleid olema kokku paarisarv, sest igast poliitikust kirjutati paaritus arvus artiklites. See vastuolu näitab, et ka poliitikuid pidi vaadeldaval juhul olema paaritul arvul.

Kui ajalehtede arv K on aga paaris, kirjutatakse poliitikutest kokku samuti paarisarv artikleid. Nüüd ei saa poliitikute arv P olla paaritu, sest see tähendaks, et artikleid pidanuks kokku olema paaritul arvul.

8.12 Olgu valikus M kombinatsiooni. Hindame kahel moel niisuguste $k-1$ elemendist koosnevate hulkade arvu, mis on mõne valitud kombinatsiooni alamhulgaks.

Igal k-elemendilisel kombinatsioonil on $(k-1)$-elemendilisi alamhulki $C_k^{k-1} = k$ tükki, seega on neid kõigi valitud kombinatsioonide peale kokku $M \cdot k$. Teisest küljest on kõik need alamhulgad ülesande tingimuste põhjal erinevad, järelikult ei saa neid olla rohkem kui vaadeldaval n-elemendilisel hulgal $(k-1)$-elemendilisi alamhulki kokku, s.t. C_n^{k-1} tükki. Niisiis kehtib võrratus $M \cdot k \leqslant C_n^{k-1}$ ehk $M \leqslant \dfrac{C_n^{k-1}}{k}$.

Ülesande väite tõestamiseks piisab näidata, et $\dfrac{C_n^{k-1}}{k} \leqslant C_{n-1}^{k-1}$. Teisendame seda võrratust:

$$
\begin{aligned}
\frac{C_n^{k-1}}{k} &\leqslant C_{n-1}^{k-1}\,,\\
\frac{n!}{(n-k+1)! \cdot (k-1)! \cdot k} &\leqslant \frac{(n-1)!}{(n-k)! \cdot (k-1)!}\,,\\
\frac{n}{(n-k+1) \cdot k} &\leqslant 1\,,\\
n &\leqslant (n-k+1) \cdot k\,,\\
n &\leqslant nk - k^2 + k\,,\\
k^2 &\leqslant (n-1) \cdot k + k\,.
\end{aligned}
$$

Viimane võrratus aga kehtib, sest ülesande tingimuste põhjal $k \leqslant n-1$ (ja tegelikult kehtib see võrratus isegi juhul $k = n$).

II

Algebra