7. Loendamine

Oletagem, et ma saan restoranis magustoiduks tellida kolme sorti jäätist või viit erinevat kooki. Mitu võimalust on mul nende seast magusrooga valida (loomulikult arvestades, et mitme maiuse korraga söömine pole tervislik)? Muidugi $3+5=8$. See mõttekäik on küll lihtne, kuid tal on loendamisülesannete juures nii oluline roll, et talle on antud lausa omaette nimi

Liitmisreegel: Kui objekti A valikuks on m võimalust ja objekti B valikuks n võimalust (kusjuures need valikud on teineteist välistavad), siis *kas A või B* valikuks on kokku $m+n$ võimalust.

Oletagem nüüd, et Aasia restorani peakokal on ette valmistatud kolm kastmepõhja (karri, magushapu ja mee-tšilli) ning viit tüüpi liha (kana-, pardi-, veise-, lamba- ja sealiha). Mitu erinevat kastet saab kokk nendest komponentidest kokku panna, kui kaste peab koosnema ühest kastmepõhjast ja ühte tüüpi lihast? Ta saab valmistada kanakarri, pardikarri, veisekarri, lambakarri ja seakarri ning sama moodi veel 5 magushaput ja 5 mee-tšillikastet. Niisiis on võimalusi kokku $5+5+5=3\cdot5=15$. Ka see mõttekäik üldistub ning temalegi on omaette nimi antud.

Korrutamisreegel: Kui objekti A valikuks on m võimalust ja pärast seda on objekti B valikuks n võimalust, siis *A ja B* valikuks on kokku mn võimalust.

Paljud loendamisülesanded lahenduvad nende reeglite kombineerimise teel. Sageli tuleb loendatavad objektid kõigepealt jagada üksteist välistavatesse klassidesse nii, et klassi sees saaks rakendada korrutamisreeglit, ning summeerida klasside tulemused seejärel liitmisreegli alusel.

Ülesanne 7.1 (Piirkonnavoor 2018, 11. klass) Mitu võimalust on värvida 20×18 ruudustikus kaks naaberruutu (st ühise küljega ruutu) mustaks?

Lahendus. Vastus: 682.

Olgu vaadeldavas ruudustikus 20 veergu ja 18 rida.

Kaks naaberruutu saavad paikneda kahel erineval (teineteist välistaval!) viisil – kas samas reas üksteise kõrval või samas veerus üks teise all.

Loeme kõigepealt kokku, mitu võimalust on kahe samas reas kõrvuti asuva ruudu värvimiseks. Paneme tähele, et iga ruudupaar on üheselt määratud oma vasakpoolse ruuduga. Paari vaskpoolne ruut saab asuda suvalises 18-st reast ning suvalises 19-st vasakpoolsest veerust, kusjuures kõik kombinatsioonid on võimalikud. Korrutamisreegli alusel on niisuguseid valikuid kokku $18 \cdot 19 = 342$.

Analoogiliselt on üksteise all samas veerus asuv ruudupaar üheselt määratud oma alumise ruuduga. See ruut saab asuda suvalises 20-st veerust ja 17-st alumisest reast. Korrutamisreegli alusel saame kokku $20 \cdot 17 = 340$ võimalust.

Kuna need kaks juhtu on teineteist välistavad, võime lõpptulemuse arvutada liitmisreegli abil, millest saame $342 + 340 = 682$.

Nii liitmis- kui korrutamisreegel üldistuvad loomulikul moel rohkemate objektide valikule. Kui mul on peale kolme sorti jäätise ja viie koogi võimalik valida ka kahte sorti tarretise vahel, tõuseb minu magustoiduvalikute arv $3 + 5 + 2 = 10$-ni. Kui kokk pakub lisaks kolmele kastmepõhjale ja viit tüüpi lihale veel kahte sorti nuudleid, saan ma restoranist tellida $3 \cdot 5 \cdot 2 = 30$ erinevat rooga.

Liitmisreegel üldkujul: Kui objekti A_1 valikuks on m_1 võimalust, objekti A_2 valikuks m_2 võimalust, ..., objekti A_n valikuks m_n võimalust (kusjuures need valikud on üksteist välistavad), siis *kas* A_1 *või* A_2 *või* ... *või* A_n valikuks on kokku $m_1 + m_2 + \ldots + m_n$ võimalust.

Korrutamisreegel üldkujul: Kui objekti A_1 valikuks on m_1 võimalust, objekti A_2 valikuks pärast seda m_2 võimalust, ..., objekti A_k valikuks pärast seda m_n võimalust, siis A_i *ja* A_2 *ja* ... *ja* A_n valikuks on kokku $m_1 m_2 \ldots m_n$ võimalust.

Üks sagedane olukord, kus korrutamisreeglit kasutada saab, esineb siis, kui objektide valikud on üksteisest sõltumatud. Niisuguse võttega saame tõestada järgmise olulise tulemuse.

Teoreem 7.1 Igal n-elemendilisel hulgal on 2^n alamhulka.

Tõestus. Fikseerime vaadeldava n-elemendilise hulga elementidel mingi järjestuse ning hakkame neid järjest moodustatavasse alamhulka valima. Esimese elemendi jaoks on kaks valikut (kas valida ta alamhulka või mitte), teise elemendi valikuks on esimese elemendi valikust sõltumatult samuti kaks valikut jne, kuni ka n. elemendi valikuks on kaks eelmistest valikutest sõltumatut võimalust.

Iga konkreetsete valikute komplekt annab vaadeldava hulga mingi alamhulga, lisaks on kõik erinevate valikute korral saadavad alamhulgad erinevad. Teisest küljest aga saame iga alamhulga mingi elementide valiku korral kätte. Seega on otsitavad alamhulgad ning kirjeldatud protsessi käigus tehtavate valikute komplektid üksüheses vastavuses. Kuna meil on n sõltumatut valikut kahe võimaluse vahel, saame korrutamisreegli alusel valikute (ja seega ka alamhulkade) koguarvuks $\underbrace{2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2}_{n} = 2^n$. □

Teoreemi 7.1 tõestuses kasutatud valikute sõltumatust pole alati tingimata vaja; piisab sellest, kui objekti A_2 *valikute arv* ei sõltu objekti A_1 valikust jne. Seda tähelepanekut kasutab ära järgmine teoreem.

Teoreem 7.2 n-elemendilise hulga elemente on võimalik järjestada $n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$ erineva moel.

Tõestus. Järjestuse esimese elemendi valimiseks on n võimalust. Pärast seda saame teise elemendi valida ülejäänud $n-1$ elemendi seast, kolmanda ülejäänud $n-2$ seast jne, kuni viimase elemendi valik on üheselt määratud. Korrutamisreegli alusel on võimaluste koguarv $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$. □

Antud (lõpliku) hulga kõikvõimalikke ümberjärjestusi nimetatakse ka selle hulga *permutatsioonideks*. Kuna permutatsioonide arv esineb kombinatoorikaülesannetes väga sageli, on avaldisele $n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$ antud eraldi nimi (arvu n *faktoriaal*) ja tähis $n!$. Kokkuleppeliselt loetakse, et ka tühja hulka saab ühel moel järjestada, st $0! = 1$.

Teoreemiga 7.2 sama oluline on kombinatoorikas ka järgmine tulemus.

Teoreem 7.3 n-elemendilisest hulgast k-elemendilise alamhulga väljavalimiseks on

$$\frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k \cdot (k-1) \cdot \ldots \cdot 1}$$

võimalust.

Tõestus. Olgu N vaadeldav n-elemendiline hulk ning olgu $\mathscr{C}_n^k$ tema kõigi k-elemendiliste alamhulkade hulk. Olgu $S \in \mathscr{C}_n^k$ üks hulga N k-elemendilistest alamhulkadest ning olgu $T = N \setminus S$ hulga N niisuguste elementide hulk, mis ei kuulu hulka S. Siis ilmselt $|S| = k$ ning $|T| = n-k$.

Paneme tähele, et kui me kirjutame kõigepealt üles hulga S elemendid mingis järjestuses ja sinna järele hulga T elemendid mingis järjestuses, on tulemuseks hulga N elementide järjestus. Seejuures saame me hulkade S ja T järjestusi valida teineteisest sõltumatult. Niisiis on hulga N selliseid järjestusi, kus kõigepealt on kirjutatud alamhulk S mingis järjestuses ning seejärel alamhulk T mingis järjestuses, korrutamisreegli ja teoreemi 7.2 alusel kokku $k! \cdot (n-k)!$ tükki.

Korrates sama konstruktsiooni iga $S \in \mathscr{C}_n^k$ jaoks, saame tulemuseks kõik hulga N elementide järjestused igaühe täpselt ühel korral. Järelikult kehtib võrdus

$$|\mathscr{C}_n^k| \cdot k! \cdot (n-k)! = n! \quad \text{ehk} \quad |\mathscr{C}_n^k| = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!},$$

mida oligi tarvis tõestada. □

Antud n-elemendilise hulga k-kaupa alamhulki nimetatakse *kombinatsioonideks* ning nende arvu $|\mathscr{C}_n^k|$ tähistatakse C_n^k.

Ülesanded

Ülesanne 7.2 (Piirkonnavoor 2023, 11. klass) Risttahukas mõõtmetega $6 \times 8 \times 10$ pannakse kokku 480 ühikkuubist. Mitmel erineval viisil on võimalik selles valida kaks ühise tahuga ühikkuupi?

Ülesanne 7.3 (Piirkonnavoor 2021, 11. klass) Šokolaadipoe igal ostutšekil on 9 numbrist koosnev kood (see võib alata ka nullidega). Märt arvab, et ostutšeki kood on õnnelik, kui selles on vähemalt kaks numbrit 9. Kärt arvab, et ostutšeki kood on õnnelik, kui selles leidub kaks kõrvutiolevat numbrit, mille summa on 9. Kumma jaoks leidub rohkem õnnelikke ostutšeki koode?

Ülesanne 7.4 (Piirkonnavoor 2022, 11. klass) Urnis on n palli ($n \geqslant 3$), mis on nummerdatud täisarvudega $1, 2, \ldots, n$. Võimaluste arv võtta urnist 3 palli nii, et suurima numbriga pall oleks võetud pallide seas, on täpselt 3 korda väiksem võimaluste arvust võtta urnist 3 palli nii, et suurima numbriga palli poleks võetud pallide seas (pallide võtmise järjekorda ei arvestata). Leia n.

Ülesanne 7.5 (Piirkonnavoor 2019, 12. klass) Õpilased A, B, C, D, E, F ja G võrdlesid oma tulemusi arvutamisoskuste olümpiaadil. Selgusid järgmised tõsiasjad.

1) Õpilane A oli kolme parima seas.
2) Õpilane B oli pingereas eespool õpilast C, kes omakorda oli eespool õpilast D.
3) Õpilane E oli pingereas eespool õpilast F, kes omakorda oli eespool õpilast G.
4) Kõik seitse õpilast said erineva tulemuse.

Leia kõigi seitsme õpilase erinevate võimalike omavaheliste järjestuste arv neil tingimustel.

Ülesanne 7.6 (Kevadine lahtine võistlus 2002, vanem rühm) Nimetame 10-kohalist naturaalarvu maagiliseks, kui see jagub arvuga 99999 ja selle kõik numbrid on erinevad. Kui palju on maagilisi 10-kohalisi naturaalarve (eeldame, et arv ei alga numbriga 0)?

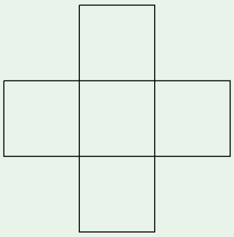
Ülesanne 7.7 (Piirkonnavoor 2005, 12. klass) Papa Carlo arvutis kehtib tingimus, et kasutaja parool peab koosnema 5 väiketähest. Turvalisuse huvides asendab papa Carlo selle uue tingimusega, et parool peab koosnema 4 väiketähest ja 1 erisümbolist (kasutaja valitud järjekorras). Buratino on selle arvuti kasutaja. Seni tundis Buratino ainult 30 väiketähte. Milline on vähim arv erisümboleid, mille ta peab selgeks õppima, et uue korra kohaselt oleks tal parooli valimiseks senisest rohkem võimalusi?

Ülesanne 7.8 (Lõppvoor 2002, 12. klass) Juku sünnipäeval loositakse külaliste vahel välja teatud arv ühesuguseid võite selliselt, et iga külaline võib saada ülimalt ühe võidu. On teada, et kui võite oleks tegelikust ühe võrra vähem, siis oleks võitude võimalikke jaotumisi külaliste vahel tegelikust 50% võrra vähem; kui aga võite oleks tegelikust ühe võrra rohkem, siis oleks võitude võimalikke jaotumisi tegelikust 50% võrra rohkem. Leia võitude võimalike jaotumiste arv.

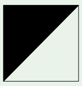
Ülesanne 7.9 (Piirkonnavoor 2004, 12. klass) Ring on jaotatud neljaks erineva suurusega sektoriks. Iga sektor värvitakse ühega neljast kasutadaolevast värvist. Mitmel erineval viisil on võimalik need sektorid värvida nii, et iga kaks naabersektorit oleksid erinevat värvi (kõiki nelja värvi ei ole kohustuslik kasutada)?

Ülesanne 7.10 (Talvine lahtine võistlus 2020, noorem rühm) Olgu n naturaalarv, $n \geqslant 2$. Ringjoonel on n lampi, mis on nummerdatud päripäeva naturaalarvudega 1 kuni n. Iga lamp saab põleda või mitte põleda. Iga kahe naaberlambi vahel on lüliti, mille iga vajutus muudab mõlema lambi oleku lülituseelsega võrreldes vastupidiseks. Algul ei põle ükski lamp. Mitu erinevat põlevate ja mittepõlevate lampide asetust on nende lülitustega võimalik saavutada?

Ülesanne 7.11 (Sügisene lahtine võistlus 2021, vanem rühm) Olgu m ja n naturaalarvud, mis on suuremad arvust 2. Ruudustikus mõõtmetega $m \times n$ asub igal ühikruudul üks lamp, mis võib kas põleda või mitte põleda. Ümber lülitada (põlevast mittepõlevaks ja vastupidi) saab korraga viis suvalises olekus lampi, mis asuvad ristina paiknevatel ühikruutudel (vt joonis). Alguses ükski lamp ei põle. Mitu erinevat põlevate lampide asetust saab nende lülitustega tekitada? Asetused, mis saadakse üksteisest pööramise või peegeldamise teel, loetakse erinevaks.



Ülesanne 7.12 (Lõppvoor 2003, 12. klass) Jüri ja Mari tahavad kumbki katta $n \times n$ ruudustiku joonisel näidatud kaartidega (iga kaart katab ühe ruudu). Jüri tahab seda teha nii, et iga kahe üksteise kõrval paikneva kaardi kõrvutiasetsevad osad oleksid eri värvi, Mari aga nii, et iga kahe üksteise kõrval paikneva kaardi kõrvutiasetsevad osad oleksid sama värvi. Kui palju erinevaid võimalusi ruudustiku soovitud viisil kaartidega katmiseks on Jüril ja kui palju Maril?



Lahendused

7.2 Vastus: 1252.

Tegemist on ülesande 7.1 kolmemõõtmelise variandiga.

Valime ruumis koordinaatteljed nii, et x-telg on suunatud vasakult paremale, y-telg eest taha ja z-telg alt üles.

Kaks ühise tahuga ühikkuupi saavad teineteise suhtes paikneda kolmel põhimõtteliselt erineval (ja üksteist välistaval!) viisil – üks teisest paremal, üks teise taga või üks teise kohal.

Loendame, kui mitmel viisil saavad kaks ühikkuupi asuda kõrvuti, üks teisest paremal. Paneme tähele, et parempoolse kuubi valik on vasakpoolse kuubi valikuga üheselt määratud, seega tuleb loendada vasakpoolse kuubi valiku võimalused. On lihtne mõista, et vasakpoolne kuup saab paikneda kõigis risttahuka yz-tasandi sihilistes kihtides peale kõige parempoolse. Niisiis on tema x-koordinaadi valikuks 5, y-koordinaadi valikuks 8 ja z-koordinaadi valikuks 10 võimalust. Korrutamisreegli alusel on võimalikke valikuid kokku $5 \cdot 8 \cdot 10 = 400$.

Analoogiliselt saame, et üks teise taga seisvate ühikkuupide paare saab olla $6 \cdot 7 \cdot 10 = 420$ ning üks teise kohal seisvate kuupide paare $6 \cdot 8 \cdot 9 = 432$. Liitmisreegli põhjal on valikuid kokku $400 + 420 + 432 = 1252$.

7.3 Vastus: Kärdi jaoks.

Esimene mõte, mis Märdi jaoks õnnelike koodide kokkulugemiseks pähe tuleb, on valida 9-st võimalikust numbripositsioonist kaks välja (selleks on C_9^2 võimalust) ning määrata sinna 9-d. Ülejäänud 7-le positsioonile võiks numbreid panna ilma kitsendusteta; korrutamisreegli alusel on selleks $\underbrace{10 \cdot \ldots \cdot 10}_{7} = 10^7$ ning kokku seega $C_9^2 \cdot 10^7$ võimalust.

Niisugune arutelu on paraku vigane. Probleem seisneb selles, et ülejäänud positsioonidele ilma kitsendusteta numbreid pannes satub sinna ka 9-id, mistõttu me loendaksime osa koode mitmekordselt. Nii näiteks loeksime koodi 999000000 kokku kolm korda, koodi 999900000 kuus korda jne. Nendele vigadele paranduste arvestamine on võimalik, kuid nõuab täiendavat tööd ning on veaohtlik.

Kavalam on läheneda teistpidi – lugeda alguses kokku kõikvõimalikud 9-kohalised koodid ja lahutada siis neist niisugused, kus 9-t üldse ei esine või esineb ainult ühe korra.

Kõikvõimalike koodide ülelugemine on lihtne – igaühe jaoks 9-st positsioonist on 10 sõltumatut võimalust, seega korrutamisreegli põhjal on neid koode kokku $\underbrace{10 \cdot \ldots \cdot 10}_{9} = 10^9$.

Koodidega, kus 9-t ei esine, läheb samuti lihtsalt. Igaühe jaoks 9-st positsioonist on nüüd 9 sõltumatut võimalust, seega korrutamisreegli põhjal saame neid koode kokku $\underbrace{9 \cdot \ldots \cdot 9}_{9} = 9^9$.

Selleks, et lugeda üle koodid, kus esineb täpselt üks 9, saame kasutada alguses välja pakutud strateegiat. Kõigepealt valime positsiooni, kuhu 9 kirjutada (selleks on 9 võimalust). Ülejäänud 8-le positsioonile saame paigutada suvalised 9-st erinevad numbrid, milleks on 9^8 võimalust. Vaadeldavat tüüpi koode on seega $9 \cdot 9^8 = 9^9$ ning Märdi jaoks õnnelike koode saame kokkuvõttes $10^9 - 2 \cdot 9^9$.

Kärdi jaoks õnnelike koodide arvu leidmisele saab läheneda sama moodi, lugedes kõigepealt kokku, kui palju on niisuguseid koode, kus *ei leidu* kahte kõrvutist numbrit summaga 9. Koodi esimese numbri võime valida suvaliselt (selleks on 10 võimalust). Iga järgmise numbri jaoks leidub täpselt üks valik, mis annaks eelmise numbriga summa 9, seega iga järgmise numbri saame Kärdi jaoks õnnetusse koodi valida ülejäänud 9 seast. Kokkvõtteks on Kärdi jaoks õnnetuid koode $10 \cdot 9^8$ ning õnnelikke $10^9 - 10 \cdot 9^8$.

Jääb võrrelda arve $10^9 - 2 \cdot 9^9$ ja $10^9 - 10 \cdot 9^8$. Lihtne on näha, et kehtivad võrratused

$$
\begin{gathered}
2 \cdot 9 > 10\,, \\
2 \cdot 9^9 > 10 \cdot 9^8\,, \\
10^9 - 2 \cdot 9^9 < 10^9 - 10 \cdot 9^8\,,
\end{gathered}
$$

niisiis on Kärdi jaoks õnnelikke koode rohkem.

7.4 Vastus: 12.

Võimalusi valida 3 palli nii, et suurima numbriga pall satub nende sekka, on C_{n-1}^2, sest sisuliselt tuleb peale suurima numbriga palli kolmikusse lisaks valida veel kaks ülejäänud $n-1$ seast. Kolme palli valimine nii, et suurima numbriga pall nende hulka ei satu, tähendab pallide valimist ülejäänud $n-1$ seast, milleks on C_{n-1}^3 võimalust. Saame võrrandi $3 \cdot C_{n-1}^2 = C_{n-1}^3$, mille lahendame teoreemi 7.3

abil:

$$\begin{aligned} 3\cdot C_{n-1}^2 &= C_{n-1}^3\,,\\ 3\cdot\frac{(n-1)!}{2!\cdot(n-1-2)!} &= \frac{(n-1)!}{3!\cdot(n-1-3)!}\,,\\ 3\cdot 3!\cdot(n-4)! &= 2!\cdot(n-3)!\,,\\ 18 &= 2\cdot(n-3)\,,\end{aligned}$$

kust saame ainsa võimalusena $n = 12$.

7.5 Vastus: 60.

Jätame õpilase A hetkeks kõrvale ja uurime, mitmel moel saab ülesande tingimustele vastavalt järjestada ülejäänud 6 õpilast. Paneme tähele, et valides 6 positsiooni seast välja 3, kuhu seada õpilased B, C ja D, on kõigi kuue õpilase omavaheline järjestus üheselt määratud. Tõepoolest, väljavalitud positsioonidele saavad B, C ja D sattuda ainult selles järjestuses ning ülejäänud kolmele positsioonile õpilased E, F ja G ainult selles järjestuses. Niisiis on õpilaste B, C, D, E, F ja G omavaheliseks järjestamiseks $C_6^3 = \frac{6!}{3!\cdot 3!} = \frac{6\cdot 5\cdot 4}{3\cdot 2\cdot 1} = 20$ erinevat võimalust.

Pärast õpilaste B, C, D, E, F ja G järjestuse valimist on alati 3 võimalust õpilase A juurdepanekuks – ta võib sattuda kas 1., 2. või 3. positsioonile. Niisiis on korrutamisreegli alusel kogujärjestuse valimiseks $20\cdot 3 = 60$ võimalust.

7.6 Vastus: 3456.

Kümnekohaline arv $\overline{abcdefghij}$ jagub 99999-ga parajasti siis, kui seda teeb arv

$$\begin{aligned} &\overline{abcdefghij} - 99999\cdot\overline{abcde} = \overline{abcdefghij} - 100000\cdot\overline{abcde} + \overline{abcde} =\\ &= \overline{abcde} + \overline{fghij}\,.\end{aligned}$$

Kuna $0 < \overline{abcde} < 99999$ ja $0 < \overline{fghij} < 99999$, on ainus võimalus, et $\overline{abcde} + \overline{fghij} = 99999$. Selles liitmistehtes ei saa esineda ühtegi ülekannet, sest kahe numbri summa ei saa olla 19. Niisiis peavad kehtima võrdused

$$a + f = b + g = c + h = d + i = e + j = 9\,.$$

Numbri a valikuks on 9 võimalust, sest $a \neq 0$; pärast seda on numbri f valik üheselt määratud. Numbri b valikuks jääb siis 8, c valikuks 6, d valikuks 4 ja e valikuks 2 võimalust (numbrite g, h, i, j valikud on jällegi üheselt määratud). Korrutamisreegli alusel saame kokkuvõttes $9\cdot 8\cdot 6\cdot 4\cdot 2 = 3456$ võimalust.

7.7 Vastus: 7.

Leiame kõigepealt võimaluste arvu moodustada 30-st väiketähest 5-tähelisi paroole. Kuna tähtede valikud parooli positsioonidele on sõltumatud (muuhulgas ei keela papa Carlo reeglid tähtedel paroolis korduda), saame korrutamisreegli alusel võimalike paroolide arvuks $\underbrace{30\cdot\ldots\cdot 30}_{5} = 30^5$.

Olgu otsitav erisümbolite arv n. Viietähelises paroolis on erisümboli positsiooni valikuks 5 võimalust ning erisümboli enda valikuks n võimalust. Allesjäävale neljale positsioonile saab Buratino väiketähti valida $\underbrace{30\cdot\ldots\cdot 30}_{4} = 30^4$ moel. Niisiis tuleb leida vähim n väärtus, mille puhul kehtiks võrratus

$$\begin{aligned} 5n\cdot 30^4 &> 30^5\,,\\ 5n &> 30\,. \end{aligned}$$

Seega on otsitavaks väärtuseks $n = 7$.

7.8 Vastus: 2002.

Olgu Juku sünnipäeval n külalist ning loositagu välja k võitu. Võitnud külaliste väljavalimiseks on siis C_n^k võimalust. Kui võite oleks k asemel $k-1$ või $k+1$, oleksid vastavad jaotumiste arvud C_n^{k-1} ja C_n^{k+1}. Niisiis saame ülesande tingimuste põhjal võrrrandisüsteemi

$$\begin{cases} C_n^{k-1} = \dfrac{1}{2}\cdot C_n^k \\ C_n^{k+1} = \dfrac{3}{2}\cdot C_n^k \end{cases}.$$

Kirjutame kombinatsioonide arvud teoreemi 7.3 abil lahti

$$\begin{cases} \dfrac{n!}{(k-1)!\cdot(n-k+1)!} = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{n!}{k!\cdot(n-k)!} \\ \dfrac{n!}{(k+1)!\cdot(n-k-1)!} = \dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{n!}{k!\cdot(n-k)!} \end{cases}$$

ja pärast taandamist saame

$$\begin{cases} \dfrac{1}{n-k+1} = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{k} \\ \dfrac{1}{k+1} = \dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{1}{n-k} \end{cases},$$

$$\begin{cases} 2k = n-k+1 \\ 2(n-k) = 3(k+1) \end{cases},$$

$$\begin{cases} 3k-1 = n \\ 2n = 5k+3 \end{cases}.$$

Asendame süsteemi esimsese võrrandi teise ja saame

$$\begin{aligned} 2(3k-1) &= 5k+3\,,\\ 6k-2 &= 5k+3\,,\\ k &= 5\,. \end{aligned}$$

Viimases süsteemi esimene võrrand annab nüüd $n = 3\cdot 5 - 1 = 14$.

Niisiis loositi Juku 14 külalise vahel välja 5 võitu, milleks on

$$C_{14}^5 = \frac{14\cdot 13\cdot 12\cdot 11\cdot 10}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 14\cdot 13\cdot 11 = 2002$$

võimalust.

7.9 Vastus: 84.

Kuna naabersektorid peavad värvilt erinema, saame kasutada kahte, kolme või nelja värvi.

Leiame kõigepealt kahe värviga värvimiste arvu. Valime esimeseks suvalise sektori. Tema värvimiseks on 4 võimalust ning pärast seda on tema naabrite värvi valikuks veel 3 võimalust (need naabrid peavad olema sama värvi). Viimase sektori värv on üheselt määratud esimese värvi valikuga. Niisiis saame korrutamisreegli alusel kokku $4 \cdot 3 = 12$ võimalust.

Kolme värviga värvides tuleb ühte värvi kasutada kaks korda. Kaks korda kasutusse mineva värvi valikuks on 4 võimalust ning nende sektorite valikuks, mida selle värviga värvida, 2 võimalust. Esimese üle jääva sektori värvi valikuks on pärast seda 3 ning viimase sektori värvi valikuks lõpuks veel 2 valikut. Kokku on sektorite värvimiseks korrutamisreegli alusel $4 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 = 48$ võimalust.

Kuna antud 4 sektorit on kõik erinevad, on nende 4 värviga värvimiseks $4! = 24$ võimalust.

Kuivõrd läbi vaadatud juhud on paarikaupa üksteist välistavad, saame liitmisreeglit rakendades lõppvastuseks $12 + 48 + 24 = 84$.

7.10 Vastus: 2^{n-1}.

Kõigepealt paneme tähele, et suvalisel moel lüliteid vajutades on võimalik saavutada ainult asetusi, kus põleb paarisarv lampe. Tõepoolest, üks lülitus võib panna põlema kaks mittepõlevat lampi, kustutada kaks põlevat lampi või ühe lambi kustutada ja teise põlema panna. Igal juhul jääb põlevate lampide arvu paarsus samaks. Kuna algselt ei põle ühtegi lampi ja 0 on paarisarv, jääbki põlevate lampide hulk kogu aeg paarisarvuliseks.

Näitame nüüd, et suvaline astus, kus põleb paarisarv lampe, on saavutatav algseisust, kus ükski neist ei põle. Alustame lambist number 1. Kui see on vaja süüdata, vajutame lülitit lampide number 1 ja 2 vahel, vastasel juhul ei vajuta. Edasi vaatleme lampi number 2. Kui meil on vaja muuta selle lambi olekut, vajutame lülitit lampide number 2 ja 3 vahel, muidu mitte. Niimoodi liigume mööda ringi edasi: kui meil on vaja muuta i. lambi olekut, vajutame lülitit lampide number i ja $i + 1$ vahel, muidu mitte. Kuna põlevate lampide koguarv peab olema paaris, on lambi number n olek lampide lambi number $1, 2, \ldots, n - 1$ olekuga üheselt määratud. Niisiis võime viimasena vaadelda lülitit lampide number $n - 1$ ja n vahel; lülitit lampide number n ja 1 vahel pole enam vaja vajutada.

Kokkuvõttes vastab igale võimalikule põlevate lampide asetusele mingi valik esimesest $(n - 1)$-st lülitist, millede vajutamine selle asetuse annab (vajutamiste järjekord pole ilmselt oluline). Paneme lisaks tähele, et kõik niimoodi saadavad asetused on erinevad. Selles veendumiseks vaatleme järjestikuseid lüliteid number $1, 2, \ldots, n - 1$ ja lampe number $1, 2, \ldots, n$ (kus lüliti number i asub lampide number i ja $i + 1$ vahel). Olgu antud kaks lülitite valikut ning olgu j vähima positsiooni number, millel asuvad lülitid nendes valikutes erinevad. Siis on lihtne näha, et vastavates lampide asetustes erineb j. lambi olek.

Kokkuvõttes oleme näidanud, et kõikvõimalikud saavutatavad põlevate lampide asetused on üksüheses vastavuses võimaluste arvuga valida $n - 1$ lüliti seast alamhulk, millesse kuuluvaid lüliteid vajutada. Teoreemi 7.1 põhjal on vastavaid valikuid 2^{n-1}.

7.11 Vastus: $2^{(m-2)(n-2)}$.

Iga rist on üheselt määratud oma keskmise ruuduga. Risti keskmiseks ruuduks sobivad ilmselt parajasti kõik need ruudud, mis ei asu ruudustiku serval, niisiis on neid kokku $(m-2)(n-2)$ tükki.

On selge, et ühtegi risti pole mõtet lülitada rohkem kui ühel korral, sest sama risti kaks korda lülitamine on samaväärne tema üldse mitte lülitamisega. Samuti pole oluline erinevate ristide lülitamise järjekord.

Niisiis saame iga võimaliku asetuse, valides ristide hulga mingi alamhulga ning lülitades kõiki valitud hulka kuuluvaid riste igaühte ühe korra. Näitame, et kõik niimoodi saadavad põlevate lampide asetused on erinevad.

Olgu antud kaks erinevat ristide hulga alamhulka. Leiame ruudustiku kõige alumise rea, kus leidub ruut, mis on keskmiseks ruuduks ristile, mis kuulub ühte valitud alamhulka, aga mitte teise. Lihtne on näha, et selle ruudu all asuva ruudu lambi olek peab kahes saadavas asetuses erinema, sest kõik teised ristid, mis saavad selle ruudu olekut mõjutada, on samaaegselt kas neisse kahte alahulka valitud või mitte valitud.

Niisiis on saadavad asetused üksüheses vastavuses ristide hulga alamhulkadega, mida on teoreemi 7.1 põhjal $2^{(m-2)(n-2)}$ tükki.

7.12 Vastus: mõlemal on ruudustiku katmiseks 2^{2n} võimalust.

Värvime ruudustiku vasakpoolse ja alumise serva mõned lõigud mustadeks ja ülejäänud valgeks. Kuna neid lõike on kokku $2n$, on võimalikke värvimisi teoreemi 7.1 alusel 2^{2n} tükki.

Laseme Jüril ja Maril kaarte ruudustikku laduda ridade kaupa vasakult paremale ja alt üles. Paneme tähele, et kui uue kaardi vasakpoolse ja alumise serva värvid on määratud (kas ruudustiku serva või varem laotud kaartide poolt), on nii Jüril kui Maril kaardi paigutamiseks alati täpselt üks võimalus. Niisiis on kaartide paigutus ruudustiku vasakpoolse ja alumise serva värvimisega üheselt määratud. Lisaks on lihtne mõista, et erinevatele värvimistele vastavad erinevad kaartide paigutused (sest erinema peab näiteks erinevalt värvitud servaruudu vastu puutuv kaart).

Niisiis on kaartide võimalikke paigutusi nii Jüri kui Mari jaoks täpselt 2^{2n}.