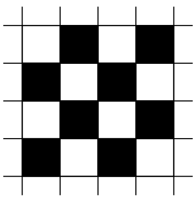
6. Invariandid

Definitsioon 6.1 Protsessi *invariandiks* nimetatakse suurust, mis selle protsessi käigus ei muutu.

Invariandid on eriti kasulikud, kui on vaja tõestada, et mingite omadustega seisu pole protsessi käigus võimalik saavutada. Vastav tõestusskeem on olemuselt väga lihtne:

- leiame invariandi väärtuse algseisus,
- tõestame, et invariant lubatud teisendustega ei muutu,
- näitame, et soovitavas lõppseisus oleks invariandi väärtus midagi muud kui alguses.

Sobiva suuruse leidmiseks tuleb tihti kasutada objektide jaotamist rühmadesse. Lahenduse parema jälgitavuse huvides räägitakse siis tavaliselt nende objektide *värvimisest*; näiteks on ruudustike puhul sageli kasulik värvida ruute malelauakorras nagu näidatud joonisel.



Rohkelt materjali ja ülesandeid värvimistega seotud invariantide kohta võib leida Elts Abeli ja Indrek Zolki brošüürist [4].

Ülesanne 6.1 (Kevadine lahtine võistlus 1999, vanem rühm) Lõpmatu ruudustiku mingil n ruudul asub igaühel üks mängunupp. Kui mõnel nuppu A sisaldava ruudu neljast naaberruudust asub nupp B ja selle taga olev ruut on tühi, võime nupu A tõsta üle nupu B sellele tühjale ruudule. Kas leidub selline nuppude paigutus, millest lähtudes võime mingi lõpliku arvu niisuguste käikude järel jõuda seisuni, kus nuppudest moodustuv kujund on samasugune kui algseisus, kuid nihkunud ühe ruudu võrra suvalises etteantud suunas, kui

a) $n = 1999$;

b) $n = 2000$;

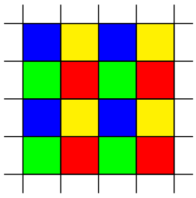
c) $n = 1998$?

Lahendus. Vastus: a) ei b) jah; c) ei.

a) Värvime ruudustiku malekorras mustaks ja valgeks. Kuna 1999 on paaritu arv, peab ühte värvi, näiteks mustadel, ruutudel algseisus asuma rohkem nuppe kui valgetel. Kui kujund liiguks ühe ruudu võrra horisontaalselt, peaks aga valgetele ruutudele sattuma rohkem nuppe kui mustadele, Samas on selge, et iga lubatud käigu korral säilitab nupp selle ruudu värvi, millel ta asub. Järelikult pole kujundi liigutamine lubatud käikudega võimalik.

b) Lihtne on näha, et neljast nupust koosnevat 2×2 kujundit saab liigutada ühe ruudu võrra ükskõik mis suunas. 2×2 plokkidest saab omakorda kokku panna näiteks 20×100 ristküliku, mida saab nende 2×2 plokkide haaval samuti liigutada ükskõik kuhu.

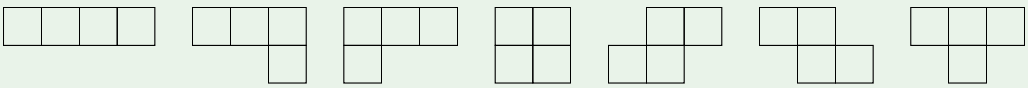
c) 1998 on paarisarv, seega ülesande a)-osa arutelu otse ei tööta. Küll aga võime leida veel teisegi värvimise, mis rahuldab samuti omadust, et iga nupp säilitab selle ruudu värvi, millel ta asub. Näiteks sobib niisugune nelja värviga värvimine nagu näidatud joonisel.



Kuna 1998 ei jagu 4-ga, peab leiduma kaks värvi nii, et neist esimest värvi ruutudel asub rohkem nuppe kui teist värvi ruutudel. Kui kujundi liigutamine ühe ruudu võrra suvalises suunas oleks võimalik, peaks esimest värvi ruutudel asuvad nupud saama viia teist värvi ruutudele. See aga pole võimalik, sest nupud säilitavad käigul oma ruudu värvi.

Alati pole protsess antud ilmutatud sammude kaudu. Tegemist võib olla ka ülesandega konstruktsiooni leidmisest, mille võimatust saab sobiva (näiteks värvimisel põhineva) invariandi abil näidata.

Ülesanne 6.2 (Piirkonnavoor 2011, 12. klass) Jukul on ruudulisest paberist välja lõigatud kõik erinevad *tetrominokujundid*, st kujundid, mis koosnevad neljast omavahel külgipidi ühendatud ühikruudust (vt joonist).



Kas Juku saab oma kujunditest moodustada ristküliku, nii et iga kujundit on kasutatud täpselt üks kord? Kujundeid võib selleks tasandil pöörata, kuid mitte üles tõsta ja teistpidi keerata.

Lahendus. Kuna tetrominokujundeid on seitse, peaks saadava ristküliku pindala olema $4 \cdot 7 = 28$. Selle ristküliku vähemalt ühe külje pikkus peab olema paarisarv. Värvides ristküliku ruudud malekorras mustaks ja valgeks, saame musti ja valgeid ruute järelikult võrdsel arvul. Lihtne on näha, et kõik tetrominokujundid peale viimase katavad kaks musta ja kaks valget ruutu, viimane aga kas ühe või kolm valget (ja vastavalt kolm või ühe musta). Järelikult pole ristkliku moodustamine võimalik.

Sagelikasutatav invariant on ka mõne suuruse paarsus (või üldisemalt jääk jagamisel mingi kindla arvuga).

Ülesanne 6.3 (Piirkonnavoor 2003, 11. klass) Korrapärase n-nurga ühe tipu juurde on kirjutatud arv 1 ja ülejäänud $n-1$ tipu juurde arvud 0. Igal sammul võime valida ühe tipu ning muuta ära selle mõlema naabertipu juures olevad arvud (0 asemele 1 või vastupidi). Kas selliste sammudega on võimalik saavutada olukord, kus n-nurga kõigi tippude juures on arvud 1, kui:

a) $n = 2002$;

b) $n = 2003$?

Lahendus. Vastus: a) ei; b) jah.

a) Paneme tähele, et kõigi tippude juures olevate arvude summa paarsus ei muutu. Tõepoolest, kahe arvu muutmiseks on neli võimalust ($00 \to 11$, $11 \to 00$, $01 \to 10$ ja $10 \to 01$) ning nad kõik muudavad arvude summat kas 0 või 2 võrra. Kuna algseisus on kõigi arvude summa 1, siis peab see paarituks jääma kogu protsessi käigus ja järelikult pole võimalik saavutada olukorda, kus lõppsumma oleks 2002.

b) Juhul $n = 2003$ võime kõigepealt valida tipu, mille juures on 1, ja muuta mõlemad tema naabrid 0-st 1-ks. Ülejäänud 2000 nulli saame muuta ühtedeks nelja kaupa teisendustega $0000 \to 1010 \to 1111$.

Ülesanded

Ülesanne 6.4 (Piirkonnavoor 1993, 9.-12. klass) Reas paikneb n väliselt erinevat nuppu. On lubatud vahetada omavahel mistahes kaks sellist nuppu, mille vahel asub täpselt üks nupp. Milliste n väärtuste korral on võimalik muuta nuppude järjestus esialgsega võrreldes vastupidiseks?

Ülesanne 6.5 (Piirkonnavoor 2017, 9. klass) Ruudustikul mõõtmetega 8×8 on osa ruute värvitud valgeks ja ülejäänud mustaks. Ühel sammul tohib suvalises ruudustiku joontega piirnevas ristkülikus mõõtmetega 2×3 või 3×2 muuta korraga kõik mustad ruudud valgeks ja valged ruudud mustaks. Kas ruudustiku ruutude iga algse värvimise korral on selliste sammudega võimalik jõuda seisu, kus kõik ruudud on mustad?

Ülesanne 6.6 (Talvine lahtine võistlus 2008, noorem rühm) Aed mõõtmetega $n \times n$ meetrit (kus n on positiivne täisarv) jaguneb ühe ruutmeetri suurusteks ruudukujulisteks platsideks. Aed on piiratud taraga, milles on sissepääs ja väljapääs, mis kumbki hõlmab parajasti ühe platsi külje. Aednik istutab aia sees platside piiriks olevatest meetristest lõikudest teatud arvu hekki täis nii, et moodustub labürint, kus on täpselt üks tee aia sissepääsust väljapääsuni ning see tee läbib aia kõik platsid. Mitu meetrit hekki istutab aednik aia sisse?

Ülesanne 6.7 (Kevadine lahtine võistlus 2005, noorem rühm) Lõpmatu ruudustiku mingil ruudul asub kuup, mis katab ruudu täpselt. Kuubi ülemine tahk on valge, ülejäänud tahud aga mustad. Ühe sammuga võib kuupi pöörata üle suvalise serva nii, et ta katab senise ruudu asemel naaberruudu. Kas on võimalik saavutada olukord, kus kuup asub esialgsel ruudul, valge tahk allpool, tehes täpselt

a) 2004 sammu;

b) 2005 sammu?

Ülesanne 6.8 (Piirkonnavoor 2014, 11. klass) Laual on kolm kivihunnikut, mille kivide arvud on 2012, 2013 ja 2014. Ühel sammul tohib võtta mingist hunnikust 2 kivi ja panna need ülejäänud kahte hunnikusse, kummassegi ühe, või võtta mingist kahest hunnikust kummastki 1 kivi ning panna need mõlemad kolmandasse. Kas on võimalik, et peale lõplikku arvu samme on

a) kõigis hunnikutes võrdselt 2013 kivi?

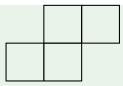
b) kõik kivid ühes hunnikus?

Ülesanne 6.9 (Piirkonnavoor 2008, 11. klass) Ribal, mis koosneb n kõrvutiasuvast ruudust, on osa ruute värvitud mustaks ja ülejäänud valgeks. Igal sammul valime välja ühe ruudu ja muudame kõigil ülejäänud ruutudel peale valitud ruudu värvi vastupidiseks. Leia kõik naturaalarvud n, mille korral on selliste sammudega võimalik antud riba ruutude mis tahes esialgse värvimise korral jõuda olukorrani, kus kõik ruudud on valged.

Ülesanne 6.10 (Piirkonnavoor 2002, 11. klass) Mereröövlite laeval on 10 piraati. Röövinud kirstu kuldmüntidega, jagasid nad mündid 10 kuhja, kuid ülelugemisel leidsid, et kuhjades pole münte ühepalju; muuhulgas oli kapteni kuhjas 2002 münti, aga pootsmani kuhjas ainult 100 münti. Piraadid otsustasid mündid ümber jagada nii: see, kelle kuhjas on kõige vähem münte, võtab endale ühe mündi iga ülejäänud piraadi kuhjast; seejärel võtab see, kelle kuhjas on nüüd kõige vähem münte, jällegi endale ühe mündi iga ülejäänud piraadi kuhjast, jne. (kui mingil sammul on vähima müntide arvuga piraate rohkem kui üks, võtab järgmisena münte juurde vanim neist). Kas võib juhtuda, et mingi arvu selliste sammude järel on kõigi piraatide kuhjades ühepalju münte?

Ülesanne 6.11 (Talvine lahtine võistlus 2015, vanem rühm) Puldil on nm lampi, mis on paigutatud $n \times m$ tabelina. Algul ükski lamp ei põle. Ühe nupuvajutusega saab ümber lülitada meelevaldselt valitud kolm ühes reas või veerus kõrvuti asuvat lampi. Milliste positiivsete täisarvude paaride (n, m) korral on võimalik saavutada olukord, kus kõik lambid põlevad?

Ülesanne 6.12 (Talvine lahtine võistlus 2011, vanem rühm) Olgu k positiivne täisarv. Milline on suurim arv neljast ruudust koosnevaid jõnkse (vt joonist), mida saab korraga paigutada $(2k+1) \times (2k+1)$ ruudustikule nii, et jõnksud üksteist ei kata ega ulatu üle ruudustiku ääre? Jõnkse võib pöörata ja ka peegeldada (ümber pöörata).



Ülesanne 6.13 (Piirkonnavoor 2019, 10. klass) Ruudustikus mõõtmetega 8×8, mille kõik ühikruudud on alguses valged, on ühel käigul lubatud valida suvaline ruudustiku joontega piirnev ala mõõtmetega 3×3 ja muuta selles kõik valged ühikruudud mustaks ja mustad ühikruudud valgeks. Kas nende sammudega on võimalik jõuda seisu, kus ruudustiku kõik ühikruudud on mustad?

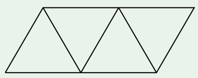
Ülesanne 6.14 (Sügisene lahtine võistlus 1994, vanem rühm) Ringjoonele paigutatakse mingis järjekorras arvud $1, 2, \ldots, 1994$. Ühe teisendusega asendatakse vabalt valitud kolm kõrvutiasetsevat arvu a, b ja c vastavalt arvudega $a - b$, b ja $c - b$. Kas lõpliku arvu teisenduste järel võib tekkida olukord, kus kõik ringjoonel asetsevad arvud on võrdsed?

Ülesanne 6.15 (Talvine lahtine võistlus 2009, vanem rühm) Suurusega 2009×2010 tabeli igas ruudus on arv 1 või -1. Tabeli iga rea ja iga veeru jaoks leitakse selles reas või veerus olevate arvude korrutis ning kõik need korrutised liidetakse kokku. Kas saadud summa saab olla

a) 123;

b) 2009?

Ülesanne 6.16 (Piirkonnavoor 2008, 12. klass) Võrdkülgne kolmnurk küljepikkusega n on võrekujuliselt jaotatud võrdkülgseteks kolmnurkadeks küljepikkuseega 1 ehk ühikkolmnurkadeks. Joonisel on näidatud neljast ühikkolmnurgast koostatud rööpkülik, mida võib pöörata ja peegeldada. Milline on suurim arv rööpkülikuid, mida saab paigutada sellele võrdkülgsele kolmnurgale nii, et iga rööpkülik katab parajasti neli ühikkolmnurka ning erinevad rööpkülikud omavahel ei kattu?



Lahendused

6.4 Vastus: nõutud ümberjärjestamine on võimalik parajasti siis, kui n on paaritu.

Ülesandes kirjeldatud teisendus jätab paaritu järjekorranumbriga nupud alati paaritutele kohtadele ning paaris järjekorranumbriga nupud paarisarvulistele kohtadele. Niisiis pole võimalik paarisarvulise n korral vahetada omavahel näiteks esimest ja viimast nuppu.

Paarituarvulise n väärtuse korral on ümberjärjestamine triviaalne. Näiteks võime kõigepealt viia algselt 1. positsioonil asunud nupu viimaseks, siis algselt 3. positsioonil asunud nupu eel-eelviimaseks jne.

6.5 Vastus: ei.

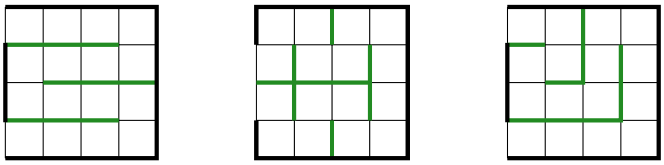
Paneme tähele, et iga lubatud sammuga jääb mustade ruutude arvu paarsus samaks. Tõepoolest, kui mingil sammul läheb muutmisele m musta ja $6 - m$ valget ruutu, on pärast seda sammu muudetute hulgas musti ruute $6 - m$. Teisest küljest on aga m ja $6 - m$ sama paarsusega arvud.

Soovitud lõppseisus on musti ruute $8 \cdot 8 = 64$, mis on paarisarv. Niisugust seisu pole ülaltõestatu põhjal võimalik saada ühestki seisust, kus on paaritul arvul musti ruute.

6.6 Vastus: $(n-1)^2$ meetrit.

Selles ülesandes pole küll protsessi, mis sammhaaval muutuks, aga on palju erinevaid võimalusi heki istutamiseks. Osutub, et ükskõik, kuidas aednik oma tööd ka ei teeks, on aia sisse istutatava heki kogupikkus sama, ja invariantide meetod aitab meil seda tõestada.

Selleks, et otsida hüpoteesi vastuse jaoks ning ideed selle tõestamiseks, on kasulik mõne väikese n väärtusega näiteid läbi proovida. Võtame $n = 4$ ja joonistame mõned võimalused välja.



Näeme, et iga näite puhul pidi aednik istutama 9 meetrit hekki. Näitame, et see ei ole juhus.

Ükskõik, kuidas moodustuv labürint ka ei kulgeks, on igal platsil tara või hekiga piiratud kaks külge ning kaks tükki jääb vabaks (nimelt üks külg, üle mille platsile tulla, ja teine, üle mille sealt lahkuda). Seega on kõigi platside piiratud külgede pikkus kokku $2n^2$ meetrit. Tara kogupikkus moodustab sellest $4n-2$ meetrit. Jääb veel tähele panna, et labürindis liikudes näeme me heki iga meetrit kaks korda – üks kord ühelt poolt ja teine kord teiselt poolt. Niisiis on hekki kokku

$$\frac{2n^2-(4n-2)}{2} = n^2-2n+1 = (n-1)^2$$

meetrit.

6.7 Vastus: a) jah, b) ei.

a) Kui me teeme kuubiga neli sammu tsüklis edasi-paremale-tagasi-vasakule, jääb valge tahk vasakule. Korrates samma tsüklit veelkord, oleme valge tahu kaheksa sammuga alla pööranud ning kuup on oma esialgsel ruudul. Ülejäänud 1996 sammu võime teha edasi-tagasi mõne naaberruudu vahel.

b) Värvime ruudustiku malelauakorras mustaks ja valgeks nii et kuubi esialgne asukoharuut on valge. Siis on selge, et paaritu arvu käikude järel satub kuup mustale ruudule, paarisarvu käikude järel aga valgele. Kuna 2005 on paaritu arv, ei saa kuup 2005 sammu järel algsele valgele ruudule naasta.

6.8 Vastus: a) ei; b) ei.

Invariandiks, mida lubatud operatsioonid ei muuda, sobib näiteks omadus, et kõigi kolme kivihunniku kivide arvude jäägid jagamisel 3-ga on erinevad. Niisiis ei saa isegi kahe hunniku kivide arvud võrdseks saada, kõigist kolmest rääkimata. Muuhulgas ei saa kahe kuhja kivide arv olla 0.

6.9 Näitame, et kui n on paaritu, siis on mustade ruutude arvu paarsus invariantne. Tõepoolest, iga sammul muudame $n-1$ ruudu värvi, aga kuna $n-1$ on paarisarv, peab nende seas olema musti ja valgeid ruute kas mõlemaid paaris- või mõlemaid paaritul arvul. Kummalgi juhul ei muutu mustade (ega ka valgete) ruutude arvu paarsus. See tähendab muuhulgas, et kui algseisus on paaritul arvul musti ruute, ei saa nende arv kunagi minna nulliks, sest null on paarisarv.

Näitame nüüd, et kui n on paaris, saame kõik ruudud valgeteks muuta. Kui musti ruute on alguses paarisarv, märgime nad kõik ära ja siis teeme lubatud sammu iga äramärgitud ruudu kui väljavalitu jaoks. Nii muudame kõiki musti ruute paaritul ja valgeid paarisarvul kordadel, järelikult on nad kõik lõpuks valged. Kui musti ruute on paaritu arv, peab paaritul arvul olema ka valgeid ruute. Märgime nüüd kõik algselt valged ruudud ja teeme lubatud sammu iga äramärgitud ruudu kui väljavalitu jaoks. Tulemusena muutuvad kõik algselt mustad ruudud paaritu ja algselt valged ruudud paarisarv kordi. See tähendab, et lõppseisus on nad kõik valged.

6.10 Vastus: ei.

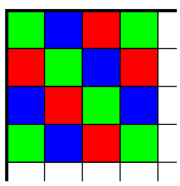
Selles ülesandes on invarianti lihtsam leida, kui teha protsess läbi tagurpidi. Oletame kõigepealt, et piraadid jõudsid olukorrani, kus kõigis kuhjades on võrdsel arvul münte, ja palume neil tehtud ümberjaotamised kirja panna.

Nüüd pöörame kõik jaotamised vastupidises järjekorras tagasi; nii jõuame uuesti algseisu. Kõik operatsioonid, mida piraadid nüüd teevad, seisnevad kelleltki üheksa mündi äravõtmises ja ühekaupa ülejäänutele jagamises. Kui tagurpidise protsessi algul oli kõigil piraatidel võrdselt münte, pidid võrdsed olema ka müntide arvude jäägid jagamisel 10-ga (ehk müntide arvude viimased numbrid). Paneme tähele, et ümberjaotusoperatsioonid seda invarianti ei muuda. Järelikult pole võimalik ülesande algseisu tagasi jõuda, sest $2002 \bmod 10 = 2$, aga $100 \bmod 10 = 0$.

Muidugi saab ülesannet lahendada ka "õigetpidi", aga sel juhul tuleb invariandiks valida olukord, kus jääkide seas, mis tekivad mündikuhjade suuruste jagamisel 10-ga, on kindlasti erinevaid.

6.11 Paneme kõigepealt tähele, et kui vähemalt üks arvudest m ja n jagub 3-ga, saab tabeli jagada 1×3 tükkideks ja nende tükkide kaupa kõik lambid süüdata.

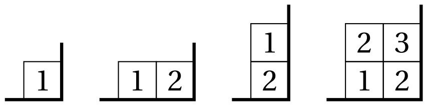
Näitame, et kui m ja n ei jagu 3-ga, pole kõigi lampide süütamine võimalik. Värvime tabeli kolme värviga mööda diagonaale nagu näidatud joonisel.



Loendame igal protsessi sammul põlevate lampide arvu ruutude värvide järgi. Alguses on iga värvi lampe süüdatud 0 ja iga kolmiku ümberlülitamine muudab iga värvi põlevate lampide arvu paarsust. Järelikult põleb iga sammu järel kas kõiki värvi lampe paarisarv või kõiki värvi lampe paaritu arv.

Jääb vaid näidata, et kui m ja n ei jagu 3-ga, pole kõiki värve tabelis sama paarsusega arv. Täpsemalt näitame, et sel juhul leidub kaks värvi nii, et ühte värvi ruute on 1 võrra rohkem kui teist värvi ruute.

Lihtne on näha, et kui $m, n \not\vdots\, 3$, saab $m \times n$ tabelist lõigata ära 1×3 plokke nii, et alles jääb üks 1×1, 1×2 või 2×2 plokk. Iga 1×3 plokk sisaldab kõiki värvi ruute võrdselt. Kui alles jääb 1×1 plokk, on selle värvi ruute algses tabelis 1 võrra rohkem kui teisi. Kui alles jääb 1×2 plokk, sisaldab ta täpselt kahte värvi ruute, mida on kokkuvõttes 1 võrra rohkem kui kolmandat värvi ruute. 2×2 plokis aga on alati ühte värvi ruute 2 ja mõlemat teist värvi ruute 1.

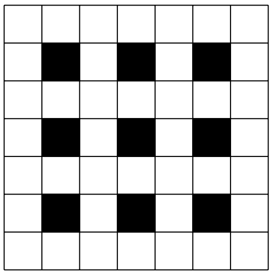


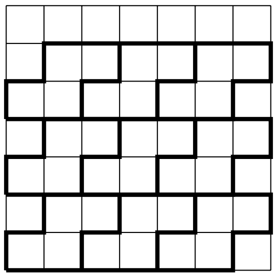
6.12 Vastus: k^2.

Värvime vaadeldavas $(2k+1) \times (2k+1)$ ruudustikus mustaks kõik ruudud, mille nii rea kui veeru number on paaris. Nõnda saab värvitud täpselt k^2 ruutu; vt vasakpoolset joonist.

Nüüd paneme tähele, et iga jõnks, mis ruudustikule paigutatakse, katab täpselt ühe värvitud ruudu. Seega ei saa jõnkse olla rohkem kui k^2.

Teisest küljest on võimalik igale $2 \times k$ ribale paigutada k jõnksu, seega on ka kogu ruudustikule k^2 jõnksu paigutamine võimalik; vt parempoolset joonist.





6.13 Vastus: ei.

Märgime ruudustiku ruudud mööda diagonaale numbritega $1, 2$ ja 3 nagu näidatud joonisel.

2	1	3	2	1	3	2	1
1	3	2	1	3	2	1	3
3	2	1	3	2	1	3	2
2	1	3	2	1	3	2	1
1	3	2	1	3	2	1	3
3	2	1	3	2	1	3	2
2	1	3	2	1	3	2	1
1	3	2	1	3	2	1	3

Niimoodi märgistatud ruudustikus esineb number 1 kokku 22 korda ning numbrid 2 ja 3 kumbki 21 korda.

Loeme iga märgendi jaoks kokku vastava märgendiga mustade ruutude arvu igal protsessi sammul. Alguses on nii $1, 2$ kui 3-ga märgendatud musti ruute 0, esimese sammu järel aga on iga märgendiga musti ruute 3.

Igas 3×3 ruudus on iga märgendiga ruute täpselt 3. Järelikult saavad edaspidised sammud muuta iga märgendiga märgendatud mustade ruutude arvu kas $+3$, $+1$, -1 või -3 võrra. Seega muudavad lubatud sammud alati kõigi märgenditega märgitud mustade ruutude arvu paarsust.

Kui lõppseisus oleksid kõik ruudud mustad, peaks märgendiga 1 musti ruute olema 22, märgenditega 2 ja 3 aga 21 ruutu. See pole äsjatõestatu põhjal võimalik, sest alguses oli kõigi märgenditega mustade ruutude arvu paarsus sama.

6.14 Vastus: ei.

Kõigi ringjoonele kirjutatud arvude summa on alguses

$$1+2+\ldots+1994=\frac{1994\cdot 1995}{2};$$

paneme tähele, et see on paaritu arv. Kui kõik ringjoonel asuvad arvud oleksid lõpuks võrdsed arvuga n, peaks nende summa olema paarisarv $1994n$. See aga pole võimalik, sest iga ülesandes kirjeldatud sammu tulemusena muutub arvude summa $2b$ võrra, mis on paarisarv.

6.15 Vastus: a) jah, b) ei.

a) Otsime lahenduse konstruktsiooni nii, et eraldame antud tabeli nurgast ristkülikukujulise osa suurusega $n_1 \times n_2$ ruutu, kus n_1 ja n_2 on paaritud arvud. Kirjutame selle osa igasse ruutu -1 ja tabeli igasse ülejäänud ruutu 1. Ridade korrutiste seas on siis n_1 arvu -1 ja $2009-n_1$ arvu 1; nende arvude summa on seega $-n_1+2009-n_1=2009-2n_1$. Veergude korrutiste summa on sarnase arutelu põhjal $2010-2n_2$ ning kõik summad kokku annavad $2009-2n_1+2010-2n_2=4019-2(n_1+n_2)$.

Seega piisab arvud n_1 ja n_2 valida nii, et kehtiks võrdus $4019-2(n_1+n_2)=123$ (ning muidugi $n_1 \leqslant 2009$ ja $n_2 \leqslant 2010$). Selleks on palju võimalusi, näiteks $n_1=1$ ja $n_2=1947$.

b) Olgu reakorrutiste seas n_1 väärtust -1 ja p_1 väärtust 1 ning sama moodi veerukorrutiste seas n_2 väärtust -1 ja p_2 väärtust 1. Siis ühest küljest muidugi

$$n_1+p_1+n_2+p_2=2009+2010=4019.$$

Teisest küljest aga kui b) osas nõutud konstruktsioon eksisteeriks, peaks selle puhul kehtima ka võrdus

$$p_1-n_1+p_2-n_2=2009.$$

Lahutades esimesest võrdusest teise saame

$$2(n_1+n_2)=2010,$$
$$n_1+n_2=1005.$$

Lihtne on näha, et n_1 ja n_2 peavad mõlemad olema sama paarsusega kui -1-de arv tabelis; muuhulgas tähendab see, et n_1 ja n_2 peavad olema sama paarsusega. Seega pole viimane võrdus võimalik.

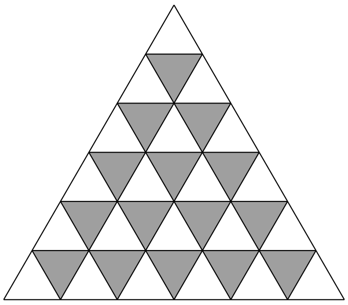
6.16 Vastus: $\left\lfloor \frac{n^2-n}{4} \right\rfloor$ (ehk suurim täisarv, mis ei ületa arvu $\frac{n^2-n}{4}$).

Tavaliselt aitab väikeste n vääruste läbiproovimine saada ettekujutust sellest, mis ülesandes toimub. Praegusel juhul aga saame näiteks $n=1,\ldots,7$ jaoks järgmised tulemused:

n	rööpkülikuid
1	0
2	0
3	1
4	3
5	5
6	7
7	10

Tekkiva jada üldvalemit pole sugugi lihtne läbi näha.

Lahendusega otsa peale saamiseks tuleb kõigepealt ära arvata õige värvimisviis. Sobivaks osutub “kolmnurkses malekorras” värvimine; vt joonist.



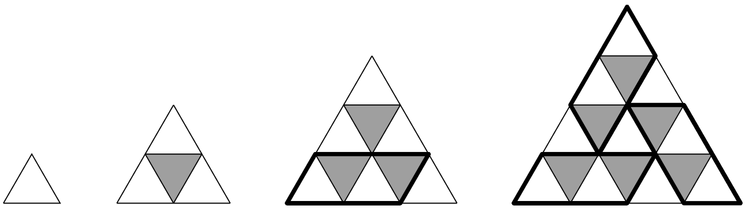
Paneme tähele, et iga rööpkülik katab täpselt kaks värvitud ja kaks värvimata ühikkolmnurka. Värvitud ühikkolmnurki on kokku

$$1+2+\ldots+(n-1)=\frac{n(n-1)}{2}=\frac{n^2-n}{2}.$$

Järelikult ei saa rööpkülikuid olla rohkem kui $\frac{n^2-n}{4}$ ning kuna rööpkülikuid peab olema täisarvul, siis isegi mitte rohkem kui $\left\lfloor \frac{n^2-n}{4} \right\rfloor$.

Näitamaks, et seda arvu saab alati realiseerida, tõestame, et iga n korral leidub suure kolmnurga niisugune kate rööpkülikutega, mis jätab katmata kas 0 või 1 värvitud kolmnurka.

Kasutame tugevat matemaatilist induktsiooni. Induktsiooni baasi $n=1,2,3,4$ korral põhjendab järgmine joonis:



Kui $n \geqslant 5$ on paaritu, siis on suure kolmnurga alumises reas paarisarv värvitud kolmnurki, mille saab katta $\frac{n-1}{2}$ rööpkülikuga. Ülejäänud kolmnurga küljepikkusega $n-1$ saab katta induktsiooni eelduse põhjal.

Kui $n \geqslant 5$ on paaris, vaatleme suure kolmnurga kolme alumist rida. Neis on kokku $(n-1)+(n-2)+(n-3)=3n-6$ värvitud kolmnurka. Need kõik saab katta $\frac{3n-6}{2}$ rööpkülikuga nii nagu näidatud joonisel paremal. Ülejäänud kolmnurga küljepikkusega $n-3$ saab katta induktsiooni eelduse põhjal.