5. Dirichlet’ printsiip

Dirichlet’[1] printsiip on üks lihtsamaid, kuid samas ka üks sagedamini kasutatavaid võtteid kombinatoorikaülesannete lahendamisel.

Teoreem 5.1 **(Dirichlet’ printsiip)** Olgu n positiivne täisarv. Kui vähemalt $n+1$ objekti tuleb jagada n rühma, siis leidub rühm, millesse satub vähemalt kaks objekti.

Tõestus. Oletame vastuväiteliselt, et sellist rühma ei leidu. Siis saab igas rühmas olla ülimalt 1 objekt, mis tähendab, et n rühma peale kokku saab olla ülimalt n objekti. Vastuolu. □

Ülesanne 5.1 (Lõppvoor 2000, 9. klass) Tasandil on antud 2000 sirget. Tõesta, et nende hulgas leidub kaks sellist, millel on ühepalju erinevaid lõikepunkte ülejäänud sirgetega.

Lahendus. Ühel sirgel saab olla ülejäänutega $0, 1, \ldots, 1999$ erinevat lõikepunkti. Paneme tähele, et 0 ja 1999 ei saa korraga realiseeruda. Tõepoolest, sirge, millel on 1999 lõikepunkti, peab lõikuma kõigi ülejäänutega, seega ei saa leiduda sirget, mis ühegi teisega ei lõiku.

Järelikult saab sirgete lõikepunktide arvudel olla ülimalt 1999 erinevat väärtust ja Dirichlet’ printsiibi põhjal peab antud 2000 sirge seas leiduma kaks, mille korral see arv on sama.

Ülesanne 5.2 (Lõppvoor 2009, 10. klass) Õpetaja andis Arnole ülesande valida arvu 2009^{10} positiivsete tegurite seast mõned välja nii, et ükski valitud arv ühegi teise valitud arvuga ei jaguks. Mitu tegurit saab Arno maksimaalselt välja valida?

Lahendus. Vastus: 11.

Kuna $2009 = 7^2 \cdot 41$, on kõik arvu 2009^{10} positiivsed tegurid kujul $7^a 41^b$, kus $a = 0, 1, \ldots, 20$ ja $b = 0, 1, \ldots, 10$. Kui Arno valiks vähemalt 12 tegurit, peaks Dirichlet’ printsiibi järgi leiduma nende seas kaks, milles 41 aste on sama. Järelikult esituvad nad algtegurite korrutistena kujul $7^k 41^m$ ja $7^\ell 41^m$. Kui $k \geqslant \ell$, siis $7^k 41^m \vdots 7^\ell 41^m$ ja kui $k < \ell$, siis $7^\ell 41^m \vdots 7^k 41^m$.

[1] Peter Gustav Lejeune Dirichlet [dirikl’e] oli 19. sajandi saksa matemaatik.

11 tegurit, millest ükski teisega ei jagu, on aga lihtne konstrueerida. Võime valida näiteks $7^0 41^{10}, 7^1 41^9, \ldots, 7^{10} 41^0$.

Diichlet' printsiipi saab üldistada ka juhule, kui ühes rühmas on lubatud mitu elementi.

Teoreem 5.2 **(Dirichlet' printsiip, üldvariant)** Olgu n ja k positiivsed täisarvud. Kui vähemalt $kn+1$ objekti tuleb jagada n rühma, siis leidub rühm, millesse satub vähemalt $k+1$ objekti.

Tõestus. Oletame vastuväiteliselt, et sellist rühma ei leidu. Siis saab igas rühmas olla ülimalt k objekti, mis tähendab, et n rühma peale kokku saab olla ülimalt kn objekti. Vastuolu. □

Ülesanne 5.3 (Piirkonnavoor 2009, 9. klass) Banaanias on 2009 ärimeest, kes sooritavad äritehinguid ainult omavahel (iseendaga tehinguid sooritada ei saa). Lõppeval kuul oli igal Banaania ärimehel paarisarv tehingupartnereid (võib olla ka 0). Tõesta, et Banaanias leidub kolm ärimeest, kellel oli lõppeval kuul sama arv tehingupartnereid.

Lahendus. Banaania ärimeestel saab olla $0, 2, 4, \ldots, 2008$ tehingupartnerit, kokku seega 1005 erinevat võimalust. Kui leidub ärimees, kellel oli 2008 partnerit, pidi ta äri tegema kõigi teistega, seega ei saa sel juhul leiduda ärimeest, kellel oli 0 äripartnerit. Niisiis realiseerib neist 1005-st võimalusest maksimaalselt 1004. Nüüd aga saame kasutada Dirichlet' printsiibi üldvarianti, mis ütleb, et kui $2 \cdot 1004 + 1 = 2009$ ärimehel on 1004 võimalikku tehingupartnerite arvu, peab leiduma $2 + 1 = 3$ ärimeest, kellel see arv kokku langeb.

Rohkem materjali Dirichlet' printsiibi ja tema kasutamise kohta leiab huvitatud lugeja brošüürist [4].

Ülesanded

Ülesanne 5.4 (Piirkonnavoor 1999, 10. klass) Esimesest $2n$ positiivsest täisarvust märgitakse ära rohkem kui pooled. Tõesta, et leiduvad kaks märgitud arvu, mille summa on $2n+1$.

Ülesanne 5.5 (Piirkonnavoor 2011, 9.klass) Naturaalarvude $1, 4, 7, 10, \ldots, 97, 100$ hulgast valitakse välja mingid 20 arvu. Tõesta, et leiduvad kaks erinevat valitud arvu, mille summa on 104.

Ülesanne 5.6 (Lõppvoor 2014, 10. klass) Olgu m positiivne täisarv. Tõesta, et kui Mari kirjutab tahvlile vähemalt $m+3$ arvu, siis Jüril on võimalik valida neist 4 arvu nii, et mingi kahe valitud arvu ja ülejäänud kahe valitud arvu summad annavad m-ga jagades sama jäägi.

Ülesanne 5.7 (Lõppvoor 1995, 10. klass) Kümnenda klassi iga õpilane saadab lihavõttepühadeks õnnitluskaardid oma viieteistkümnele klassikaaslasele. Tõesta, et:

a) kui klassis on 30 õpilast, siis leiduvad kindlasti kaks õpilast, kes saadavad õnnitluskaardid teineteisele;

b) kui klassis on 31 õpilast, siis on võimalik kaardid saata nii, et ükski õpilaste paar ei saada vastastikku teineteisele õnnitluskaarte.

Ülesanne 5.8 (Talvine lahtine võistlus 2017, vanem rühm) Kas leidub viis erinevat algarvu, millest iga kolme summa on samuti algarv?

Ülesanne 5.9 (Kevadine lahtine võistlus 2006, vanem rühm) Kati lõikas paberist välja kaks ühesugust korrapärast n-nurka, kirjutas mõlema n-nurga tippude juurde mingil viisil arvud 1 kuni n ning torkas siis nõela läbi n-nurkade sümmeetriakeskpunktide, nii et neid saab teineteise suhtes pöörata. Seejuures pani Kati tähele, et leidub asend, kus n-nurkade tipud on kohakuti ning ühegi kohakuti asuvate tippude paari juures olevad arvud ei ole võrdsed. Tõesta, et n-nurgad saab pöörata asendisse, kus nende tipud on kohakuti ja vähemalt kahe kohakuti asuvate tippude paari juures on arvud võrdsed.

Ülesanne 5.10 (Sügisene lahtine võistlus 2003, vanem rühm) Ruudulisele mängulauale mõõtmetega 6×9 asetatakse mõned nupud (ühelegi ruudule ei panda rohkem kui üht nuppu).

a) Kas on võimalik nupud paigutada nii, et igas 4×4 ruudus oleks erinev arv nuppe?

b) Kas on võimalik nupud paigutada nii, igas 5×5 ruudus oleks erinev arv nuppe?

Ülesanne 5.11 (Talvine lahtine võistlus 2013, vanem rühm) Õppeaasta jooksul peeti 22 aineolümpiaadi, millest igaühel auhinnati 5 paremat õpilast. On teada, et iga kahe olümpiaadi auhinnatute hulgas oli täpselt 1 ühine õpilane. Näita, et leidub õpilane, kes sai auhinna igal olümpiaadil.

Ülesanne 5.12 (Talvine lahtine võistlus 2016, vanem rühm) Olgu n ja m positiivsed täisarvud. Milline on suurim võimalik arv ruutude tippudes asuvaid punkte, mida saab märkida ruudustikus mõõtmetega $n \times m$ nii, et ükski kolm märgitud punkti ei asuks ühegi täisnurkse kolmnurga tippudes?

Lahendused

5.4 Moodustame esimesest $2n$ positiivsest täisarvust n paari, kus iga paari liikmete summa on $2n+1$:

$$(1,2n),(2,2n-1),\ldots,(n,n+1).$$

Kuna märgitud arve on rohkem kui n, peavad kaks neist Dirichlet' printsiibi järgi samasse paari sattuma. Need kaks arvu sobivadki ülesande lahendiks.

5.5 Lihtne on näha, et suurema osa antud arvudest saab jagada paaridesse, mille liikmete summa on 104: $(4,100),(7,97),\ldots,(49,55)$. Üle jäävad ainult 1 ja 52. Kuna välja valitakse 20 arvu, siis vähemalt 18 neist pole 1 ega 52 ja kuuluvad seega mingisse paari. Et paare on aga kokku 16, peavad Dirichlet' printsiibi põhjal kaks valitud arvu ühte paari kuuluma.

5.6 Kuna m-ga jagamisel saab tekkida m erinevat jääki, leidub Dirichlet' printsiibi põhjal Mari kirjutatud $m+3$ arvu seas kaks, mille jääk jagamisel m-ga on sama.

Olgu need arvud a ja b. Ülejäänud $m+1$ arvu seas peab Dirichlet’ printsiibi põhjal ikka veel leiduma kaks m-ga jagamisel sama jäägi andvat arvu; olgu need c ja d. Nüüd on lihtne näha, et a, b, c, d sobivad, sest $a + c \equiv b + d \mod m$.

5.7 a) Kui igaüks 30-st õpilasest saadab 15 õnnitluskaarti, saadetakse kaarte kokku $30 \cdot 15 = 450$ tükki. Õpilaste paare on aga $C_{30}^2 = \dfrac{30 \cdot 29}{2} = 435$. Niisiis peab leiduma kaks kaarti, mida saadetakse sama õpilaste paari vahel.

b) Paneme 31 õpilast ringi seisma ja laseme igal õpilasel saata kaardid neile 15-le klassikaaslasele, kes seisavad temast paremal 15-l järgmisel kohal.

5.8 Vastus: ei.

Uurime viie algarvu jääke jagamisel 3-ga. Kui nende viie jäägi hulgas on olemas nii 0, 1 kui 2, siis vastava kolme algarvu liitmisel saame summa, mis jagub 3-ga, aga ei saa ise olla 3; järelikult peab see summa olema kordarv.

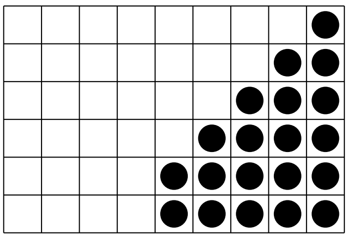
Kui aga viie jäägi hulgas on ainult kaks erinevat, peab Dirichlet’ printsiibi põhjal leiduma jääk, mille annavad kolm viiest algarvust. Vastava kolme arvu summa jagub jälle 3-ga.

5.9 Jätame ühe n-nurga paigale ja pöörame teist. Paneme tähele, et iga arvu 1 kuni n jaoks leidub täpselt üks pööre, mis viib selle arvu n-nurkade tippudes kohakuti. Tehes pöörde 0° võrra, ei ole ülesande tingimuste järgi aga ükski arv endaga võrdsega kohakuti. Üle jääb $n-1$ pööret. Kuna arve on n, peab Dirichlet’ printsiibi järgi leiduma kaks arvu, mis satuvad oma paarilisega kohakuti sama pöörde tulemusel.

5.10 Vastus: a) ei; b) jah.

a) 6×9 ruudustikus saab 4×4 ruute valida $3 \cdot 6 = 18$ erineval moel, kuid võimalikke erinevaid nuppude arve $0, 1, \ldots, 16$ on ainult 17. Dirichlet’ printsiibi põhjal peab leiduma kaks 4×4 ruutu, milles on sama arv nuppe.

b) Erinevaid võimalikke konstruktsioone on palju. Üks neist on toodud joonisel.



Nuppude arvud 5×5 ruutudes on siis $1, 2, 3, 5, 6, 9, 10, 14, 15, 19$.

5.11 Vaatleme suvalist olümpiaadi ja tähistame seda a_1. Ülesande tingimuste järgi sai seal auhinna 5 õpilast. Kuna üle jääb veel $21 = 5 \cdot 4 + 1$ olümpiaadi, peab Dirichlet’ printsiibi üldvariandi põhjal nende auhinnasaajate seas leiduma üks õpilane, kes sai auhinna veel vähemalt $4 + 1 = 5$ olümpiaadil. Tähistame neid olümpiaade $a_2, \ldots, a_6$ ja seda õpilast A.

Näitame, et A sobib otsitavaks õpilaseks. Selleks valime suvalise olümpiaadi b, mis erineb olümpiaadidest $a_1, a_2, \ldots, a_6$, ja näitame, et A pidi ka seal auhinna saama. Olümpiaadil b peab olema ühine auhinnasaaja igaühega olümpiaadidest $a_1, a_2, \ldots, a_6$, aga kuna olümpiaadil b sai auhinna 5 õpilast, peab Dirichlet’ printsiibi järgi leiduma kaks olümpiaadi a_i ja a_j nii, et $i \neq j$ ja üks õpilane sai auhinna nii olümpiaadil a_i, a_j kui ka b. Kuna olümpiaadide a_i ja a_j ainus ühine auhinnasaaja on õpilane A, pidi ta saama auhinna ka olümpiaadil b. Kuna b oli valitud suvaliselt, oleme näidanud, et A sai auhinna kõigil olümpiaadidel.

5.12 Vastus: $n+m$.

Oletame vastuväiteliselt, et nõutud moel saab märkida $n+m+1$ punkti. Ruudustikus on $n+1$ horisontaaljoont ja tänu arvu m positiivsusele kehtib võrratus $n+m+1 > n+1$. Dirichlet' printsiibi põhjal järeldub siit, et ruudustikus leidub vähemalt üks horisontaaljoon, millel paikneb vähemalt kaks märgitud punkti. Järelikult leidub ülimalt n horisontaali, millel asub mitte rohkem kui üks märgitud punkt.

Analoogiliselt tõestame, et ruudustikus on ülimalt m vertikaaljoont, millel asub mitte rohkem kui üks märgitud punkt. Niisiis on ruudustikus kokku mitte rohkem kui $n+m$ märgitud punkti, mis asuvad üksinda kas horiontaal- või vertikaaljoonel. Kuna märgitud punte oli aga $n+m+1$, saame jälle Dirichlet' printsiipi rakendades, et leidub punkt, mille jaoks leidub veel üks punkt temaga samal horisontaalil ja veel üks punkt temaga samal vertikaalil. Need kolm punkti moodustavad täisnurkse kolmnurga tipud.

Konstruktsiooni $n+m$ punktiga saame, kui märgime n punkti ruudustiku vertikaalsel serval ja m punkti horisontaalsel serval nii, et nende servade ühine tipp jääb märkimata. Joonisel on näitena toodud konstruktsioon $n=4$ ja $m=5$ jaoks.