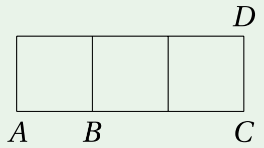
40. Mitmesuguseid ülesandeid

Siinsesse peatükki on autor koondanud ülesandeid, mis konkreetsete teemade alla ei mahtunud, aga olid autori hinnangul nii huvitavad, et väärisid kohta selles raamatus.

Ülesanded

Ülesanne 40.1 (Lõppvoor 2001, 10. klass) Joonisel on kujutatud kolm ruutu. Leia nurkade ADC ja BDC suuruste summa.



Ülesanne 40.2 (Lõppvoor 1995, 12. klass) Arvuta summa

$$1\cdot\frac{1}{2}+2\cdot\frac{1}{4}+3\cdot\frac{1}{8}+\ldots+n\cdot\frac{1}{2^n}+\ldots.$$

Ülesanne 40.3 (Lõppvoor 2014, 12. klass) Tahvlile kirjutatakse mingi positiivne täisarv n ühe korra, seejärel kirjutatakse arvu $n-1$ kaks korda jne, igal järgneval sammul kirjutatakse viimati tahvlile kirjutatud arvudest ühe võrra väiksemat arvu kaks korda rohkem kordi. Nullideni jõudmisel lõpetatakse. Tõesta, et lõpuks tahvlil olevate arvude summa on väiksem kui 2^{n+1}.

Ülesanne 40.4 (Lõppvoor 2011, 12. klass) Kas leidub selline positiivne reaalarv C, et kõigi positiivsete reaalarvude x_1, x_2, x_3, x_4 korral kehtib võrratus

$$x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4 \leqslant C(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_4+x_4x_1)\,?$$

Ülesanne 40.5 (Lõppvoor 2012, 12. klass) Rivis seisab üksteise taga 2^n sõdurit, kus n on positiivne täisarv. Igal ümberrivistumisel võetakse uue rivi etteotsa enne paaritutel kohtadel seisnud sõdurid (nende omavahelist järjekorda muutmata) ja nende järele enne paariskohtadel seisnud sõdurid (samuti omavahelist järjekorda muutmata). Tõesta, et n ümberrivistumise järel on sõdurid samas järjekorras nagu alguses.

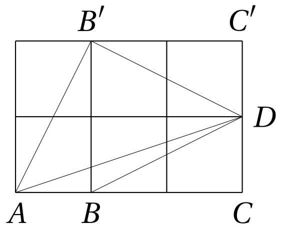
Ülesanne 40.6 (Lõppvoor 2020, 12. klass) Kas leidub selline positiivne täisarv n, et arvu 2^n esimene number on 3 ja teine number on 9?

Ülesanne 40.7 (Talvine lahtine võistlus 2006, vanem rühm) Kas leidub naturaalarv $n > 2$, mille korral mingi n järjestikuse täisarvu ruutude summa on omakorda täisarvu ruut?

Lahendused

40.1 Vastus: $135°$.

Peegeldame antud ruute nende ühise ülemise servaga määratud sirge suhtes; olgu punktide B ja C peegeldused vastavalt B' ja C'.



Paneme tähele, et punkti A saame punktist D pöördega $90°$ võrra päripäeva ümber punkti B'. Seega on ADB' võrdhaarne täisnurkne kolmnurk tipunurgaga $\angle ADB' = 45°$. Nüüd saame lihtsasti leida, et

$$\angle ADC + \angle BDC = \angle ADC + \angle B'DC' = 180° - \angle ADB' = 180° - 45° = 135°.$$

40.2 Teisendame ülesande avaldist ja kasutame geomeetrilise jada summa valemit:

$$\begin{aligned}
&1\cdot\frac{1}{2} + 2\cdot\frac{1}{4} + 3\cdot\frac{1}{8} + \ldots + n\cdot\frac{1}{2^n} + \ldots = \\
&= \underbrace{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots\right)}_{1} + \underbrace{\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots\right)}_{\frac{1}{2}} + \underbrace{\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\ldots\right)}_{\frac{1}{4}} + \ldots = \\
&= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots = 2\,.
\end{aligned}$$

40.3 Igal sammul kirjutatakse tahvlile 2 korda rohkem arve kui eelmisel. Kõigi tahvlile kirjutatud arvude summa on seega

$$1\cdot n + 2\cdot(n-1) + 4\cdot(n-2) + \ldots + 2^{n-3}\cdot 3 + 2^{n-2}\cdot 2 + 2^{n-1}\cdot 1\,.$$

Paneme tähele, et kui jagada seda summat arvuga 2^n, on tulemuseks

$$\frac{n}{2^n} + \frac{n-1}{2^{n-1}} + \frac{n-2}{2^{n-2}} + \ldots + \frac{3}{2^3} + \frac{2}{2^2} + \frac{1}{2^1}\,.$$

Viimases avaldises tunneme ära ülesande 40.2 lõpmatu summa lõpliku osasumma. Seega kui kõigi tahvlile kirjutatud arvude summa on S, kehtib võrratus

$$\frac{S}{2^n} < 2\,,$$

millest omakorda järeldub käesoleva ülesande väide $S < 2^{n+1}$.

40.4 Vastus: ei.

Ülesande võrratus on samaväärne võrratustega

$$x_1x_3 + x_2x_4 \leqslant (C-1)(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_1)\,,$$
$$\frac{x_1x_3 + x_2x_4}{x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_1} \leqslant C-1\,.$$

Näitame, et viimase võrratuse vasaku poole avaldis võib võtta kuitahes suuri väärtusi. Selleks võime x_1 ja x_3 valida suured ning x_2 ja x_4 väikesed. Näiteks kui $x_1 = x_3 = X > 0$ ja $x_2 = x_4 = X^{-1}$, siis $x_1x_3 = X^2$, $x_2x_4 = X^{-2}$ ja $x_1x_2 = x_2x_3 = x_3x_4 = x_4x_1 = 1$. Sel juhul

$$\frac{x_1x_3 + x_2x_4}{x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_1} = \frac{X^2 + X^{-2}}{1+1+1+1} > \frac{X^2}{4}\,.$$

Viimane avaldis võib X kasvades võtta kuitahes suuri väärtusi ega saa seega olla ülalt tõkestatud ühegi konstandiga.

40.5 Nummerdame sõdurid algjärjestuses numbritega $0, 1, \ldots, 2^n - 1$. Lihtne on näha, et sõdurid number 0 ja $2^n - 1$ jäävad alati oma algsetele kohtadele. Mis toimub teiste sõduritega? Kirjutame välja esimese ümberjärjestuse tulemuse $n = 4$ (ehk 16 sõduri) jaoks:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0	2	4	6	8	10	12	14	1	3	5	7	9	11	13	15

Näeme, et positsioonidele number $0, 1, 2, \ldots, 2^{n-1} - 1$ asuvad sõdurid vastavalt numbritega $2 \cdot 0 = 0, 2 \cdot 1 = 2, 2 \cdot 2 = 4, \ldots, 2 \cdot (2^{n-1} - 1) = 2^n - 2$. Ka teise poolde asuvate sõdurite järjekorranumbrid $1, 3, 5 \ldots$ kasvavad 2 võrra. Kas me saame ka neid väljendada 2-ga korrutamise abil nii, et tekiks vastavused $8 \to 1, 9 \to 3, 10 \to 5$ jne? Jah, saame, kui leiame korrutise jäägi mooduli 15 järgi, kuivõrd $2 \cdot 8 \equiv 1 \bmod 15$, $2 \cdot 9 \equiv 3 \bmod 15$ jne.

Üldjuhul näeme, et positsioonidele number $2^{n-1}, 2^{n-1} + 1, \ldots, 2^n - 2$ asuvad sõdurid vastavalt numbritega

$$2 \cdot 2^{n-1} = 2^n \equiv 1 \bmod (2^n - 1)\,,$$
$$2 \cdot (2^{n-1} + 1) = 2^n + 2 \equiv 3 \bmod (2^n - 1)\,,$$
$$\ldots,$$
$$2 \cdot (2^n - 2) = 2^{n+1} - 4 \equiv 2^n - 3 \bmod (2^n - 1)\,.$$

Jääb veel tähele panna, et mooduli $2^n - 1$ järgi taandamine ei muuda midagi ka esimese poole sõdurite järjekorranumbrite arvutuses. Seega kokkuvõttes satub esimese ümberjärjestamise tulemusena positsioonile number i sõdur number $2 \cdot i \bmod (2^n - 1)$ (kus $i = 0, 1, 2 \ldots, 2^n - 2$; sõdur number $2^n - 1$ jääb paigale).

Sama aruteluga jätkates näeme, et teise ümberjärjestamise tulemusena satub positsioonile number i sõdur number $2 \cdot 2 \cdot i \bmod (2^n - 1)$, kolmanda ümberjärjestamise tulemusena sõdur number $2^3 \cdot i \bmod (2^n - 1)$ jne. Ülaltehtud näidet jätkates saame:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0	2	4	6	8	10	12	14	1	3	5	7	9	11	13	15
0	4	8	12	1	5	9	13	2	6	10	14	3	7	11	15
0	8	1	9	2	10	3	11	4	12	5	13	5	14	7	15
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

n. ümberjärjestamise tulemusena satub positsioonile number i (kus $i = 0, 1, 2 \ldots, 2^n - 2$) sõdur number

$$2^n \cdot i \equiv i \bmod (2^n - 1),$$

sest $2^n \equiv 1 \bmod (2^n - 1)$. Kuna sõdur number $2^n - 1$ on kogu aeg paigal, olemegi ülesande väite tõestanud kõigi sõdurite jaoks.

40.6 Vastus: jah.

Peame näitama, et leiduvad positiivsed täisarvud k ja n nii, et

$$3{,}9 \cdot 10^k \leqslant 2^n < 4 \cdot 10^k.$$

Võrratused jäävad samaväärseks, kui võtame kõigist avaldistest kümnendlogaritmid:

$$\log(3{,}9 \cdot 10^k) \leqslant \log(2^n) < \log(4 \cdot 10^k),$$
$$\log 3{,}9 + k \leqslant n \cdot \log 2 < \log 4 + k,$$
$$\log 3{,}9 \leqslant n \cdot \log 2 - k < \log 4.$$

Kuna $\log 3{,}9$ ja $\log 4$ kuuluvad vahemikku $(0; 1)$, on viimane võrratuste ahel samaväärne väitega, et leidub positiivne täisarv n nii, et

$$\log 3{,}9 \leqslant \{n \cdot \log 2\} < \log 4,$$

kus $\{x\}$ tähistab reaalarvu x murdosa.

Uurime, kuidas käitub suuruse $n \cdot \log 2$ murdosa. Kõigepealt paneme tähele, et $\log 2$ on irratsionaalarv. Tõepoolest, kui leiduks kaks täisarvu a ja b nii, et $\log 2 = \dfrac{a}{b}$, siis peaks kehtima võrdused

$$10^{\log 2} = 10^{\frac{a}{b}},$$
$$2 = 10^{\frac{a}{b}},$$
$$2^b = 10^a,$$

mis aga pole võimalik.

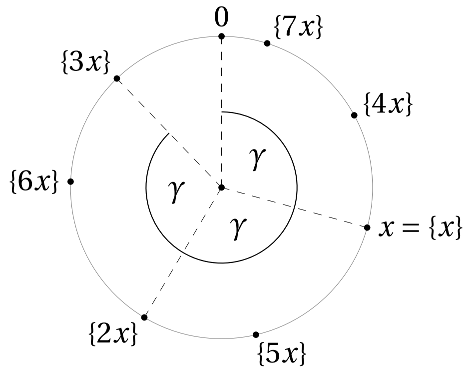
Lahenduse idee on näidata, et x on irratsionaalarv, saab $\{n \cdot x\}$ viia kuitahes väikeseks. Formaalselt tõestame, et iga $\varepsilon > 0$ jaoks leidub positiivne täisarv n nii, et $\{n \cdot x\} < \varepsilon$.

Kohe on selge, et üldisust kitsendamata piisab, kui vaatleme juhtu $x \in (0; 1)$, sest meid huvitavad ainult avaldiste $n \cdot x$ murdosad.

Lisaks paneme tähele, et kuivõrd x on irratsionaalarv, ei saa $n \cdot x$ (positiivse täisarvu n korral) olla täisarv. Muuhulgas tähendab see, et iga positiivse täisarvu

n korral kehtib võrratus $\{n \cdot x\} > 0$. Samuti näeme, et kui m ja n on erinevad positiivsed täisarvud, siis $\{m \cdot x\} \neq \{n \cdot x\}$, sest muidu oleks arvu $(m - n) \cdot x$ murdosa 0 ehk see arv ise oleks täisarv; vastuolu arvu x irratsionaalsusega.

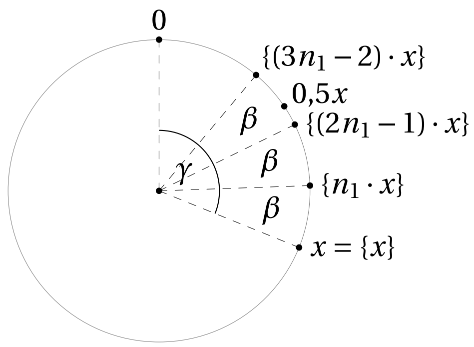
Murdosi $\{x\}, \{2x\}, \{3x\}, \ldots$ on graafiliselt mugav kujutada ringjoonel pikkusega 1.



Üleminek arvult $\{n \cdot x\}$ arvule $\{(n+1) \cdot x\}$ vastab pöördele mingi nurga γ võrra. Kui arvu x kordne ületab mõne järjekordse täisarvu, saame sellest täisosa maha võtta, mis vastab täpselt täispöörde mahavõtmisele vastavast nurgast.

Tõestame kõigepealt, et iga irratsionaalarvu $x \in (0; 1)$ jaoks leidub positiivne täisarv n nii, et $\{n \cdot x\} \leqslant \frac{\{x\}}{2} = \frac{x}{2}$. Olgu n_1 vähim selline positiivne täisarv, et $n_1 \cdot x > 1$. Siis muidugi $(n_1 - 1) \cdot x < 1$ (võrdus ei saa kehtida, sest x on irratsionaalarv!). Järelikult $\{n_1 \cdot x\} \in (0; x)$. Kui $\{n_1 \cdot x\} \in \left(0; \frac{x}{2}\right]$, oleme otsitava täisarvu leidnud.

Teisel võimalikul juhul $\{n_1 \cdot x\} \in \left(\frac{x}{2}; x\right)$ vaatleme nurka β, mis jääb ringjoonel arvudele $\{n_1 \cdot x\}$ ja x vastavate punktide vahele; niisiis on β nurk, mis vastab arvus $\{n \cdot x\}$ kordaja n suurendamisele $n_1 - 1$ võrra.



Tänu konstruktsioonile peavad kehtima võrratused $0 < \beta < \frac{\gamma}{2}$. Seega leidub nurgal β niisugune täisarvuline kordne $m \cdot \beta$, et $\frac{\gamma}{2} < m \cdot \beta < \gamma$ (joonisel näiteks $m = 3$). See aga tähendab, et kui $n = m \cdot (n_1 - 1) + 1 = m \cdot n_1 + m - 1$, siis $\{n \cdot x\} \in \left(0; \frac{x}{2}\right)$, nagu oligi tarvis.

Korrates seda konstruktsiooni lähtudes leitud arvust $\{n \cdot x\}$, saame leida täisarvu n' nõnda, et $\{n' \cdot x\} \leqslant \frac{\{n \cdot x\}}{2} \leqslant \frac{x}{4}$, siis omakorda täisarvu n'' nõnda, et $\{n'' \cdot x\} \leqslant \frac{x}{8}$ jne. Kokkuvõttes saame arvu $\{n \cdot x\}$ teha väiksemaks igast arvust $\frac{x}{2^\ell}$; see avaldis aga muutub piisavalt suure ℓ väärtuse korral väiksemaks suvalisest etteantud positiivsest konstandist ε.

Valime nüüd $\varepsilon = \log 4 - \log 3{,}9$ ja olgu t niisugune positiivne täisarv, et kehtib võrratus $\{t \cdot \log 2\} < \varepsilon$. Kuna vahemiku $(\log 3{,}9; \log 4)$ pikkus on ε, peab leiduma selline positiivne täisarv s, et $s \cdot \{t \cdot \log 2\} \in (\log 3{,}9; \log 4)$. Kuna ilmselt kehtib võrdus $s \cdot \{t \cdot \log 2\} = \{s \cdot t \cdot \log 2\}$, sobivad ülesandes otsitavateks arvudeks $n = s \cdot t$ ja $k = [n \cdot \log 2]$ (arvu $n \cdot \log 2$ täisosa).

Selles lahenduses polnud tegelikult oluline, milliseid numbreid me astme alguses täpselt näha soovime, ega isegi see, millist täisarvu me astendame (seni kuni see täisarv ise pole arvu 10 aste). Niisiis saame analoogiliselt tõestada palju üldisema tulemuse, mille kohaselt suvaliste kümnendnumbrite $a_1 \neq 0, a_2, \ldots, a_i$ ja suvalise positiivse täisarvu (mis pole 10 aste) r jaoks leidub selline positiivne täisarv n, et r^n esimesed numbrid on $a_1 a_2 \ldots a_i$.

Arvutiülesanne 40.1 Kirjuta programm, mis saab sisendiks suvalise positiivse täisarvu (mis pole 10 aste) ning kümnendnumbrite järjendi $a_1 \neq 0, a_2, \ldots, a_i$ ja väljastab vähima positiivse täisarvu n, mille jaoks arvu et r^n esimesed numbrid on $a_1 a_2 \ldots a_i$.

Python toetab vaikimisi suvalise pikkusega täisarve, nii on üks võimalik lahendusstrateegia arvude $r^1, r^2, r^3 \ldots$ järjest läbi proovimine. Siiski pead arvestama, et arvud r^n kasvavad väga kiiresti ja see hetk, mil nad enam arvuti mällu ära ei mahu, võib tulla kiiremini, kui sa arvata oskad!

Milline on vähim n, mille korral arv 2^n algab numbritega 3 ja 9? Aga numbritega $1, 0, 0$? Milline on vähim n, mille korral arv 3^n algab numbritega $3, 1, 4$?

40.7 Vastus: jah.

Ülesande 1.2 põhjal teame, et iga naturaalarvu $n \geqslant 1$ korral kehtib võrdus

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Üks võimalus antud ülesandele lahendust leida on panna tähele, et $n = 24$ korral on $\frac{n}{6} = 4$, $n+1 = 25$ ja $2n+1 = 49$ täisruudud, seega peab täisruut olema ka summa $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + 24^2$.

Süstemaatilisema lähenemisena võime alul proovida välja selgitada, millised arvud üldse n väärduseks sobivad.

Mooduli 3 järgi teame, et kui $k \equiv 0 \bmod 3$, siis ka $k^2 \equiv 0 \bmod 3$, aga kui $k \equiv 1 \bmod 3$ või $k \equiv 2 \bmod 3$, siis $k^2 \equiv 1 \bmod 3$. See tähendab, et kolme järjestikuse täisruudu summa annab 3-ga jagades alati jäägi 2 ega saa seega ise täisruut olla. Niisiis $n = 3$ lahendeid ei anna.

$n = 4$ puhul võime sama moodi uurida jääke modulo 4. Me teame, et paarisarvu ruut jagub 4-ga, paaritu aru ruut aga annab 4-ga jagades jäägi 1. Nelja järjestikuse täisruudu summa annab seega 4-ga jagades jäägi 2 ega saa järelikult täisruutu anda. Sama moodi annab 5 järjestikuse täisruudu summa 4-ga jagades jäägi 2 või 3, 6 järjestikuse täisruudu summa aga alati jäägi 3. Niisiis ei sobi n väärtusteks ka $4, 5$ ja 6.

Mooduli 16 järgi on järjestikuste täisruutude jäägid $0, 1, 4, 9, 0, 9, 4, 1, 0$ jne. See tähendab, et 7 järjestikuse täisruudu summa saab modulo 16 olla $3, 8, 11$ või 12; 8 järjestikuse täisruudu summa saab modulo 16 olla aga ainult 12. Niisiis ei sobi n

väärtuseks ka 7 ja 8.

Mooduli 9 järgi järjestikuste täisruutude jäägid $0, 1, 4, 0, 7, 7, 0, 4, 1$ jne. Üheksa järjesikuse täisruudu summa jääk jagamisel 9-ga on seega alati 6, mistõttu ei sobi n väärtuseks ka 9.

Niisis peab n väärtus selle ülesande lahenduses (kui lahendus üldse eksisteerib) olema vähemalt 10. Nüüd tuleb hakata proovima järjestikuste täisarvude ruutude summasid $10, 11, 12$ jne kaupa. Selleks, et uuritavaid täisruute võimalikult väikestena hoida, on kaval valida umbes pooled arvudest negatiivsed. Mõningase katsetamise järel jõuame nii lahendini

$$(-4)^2 + (-3)^2 + (-2)^2 + (-1)^2 + 0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 = 121 = 11^2 .$$