40. Mitmesuguseid ülesandeid

Siinsesse peatükki on autor koondanud ülesandeid, mis konkreetsete teemade alla ei mahtunud, aga olid autori hinnangul nii huvitavad, et väärisid kohta selles raamatus.

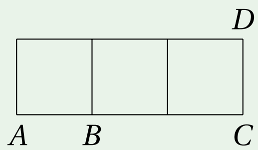
Ülesanded

Ülesanne 40.1 (Lõppvoor 2020, 9. klass) Koolis tegutseb n õpilasklubi. On teada järgmised faktid.

1) Iga kahe klubi A ja B korral leidub mõni klubi, mille tegevuses osalevad parajasti need õpilased, kes osalevad nii klubi A kui ka klubi B tegevuses.
2) Iga klubi tegevuses osaleb vähemalt üks õpilane.

Tõesta, et leidub õpilane, kes osaleb kõigi klubide tegevuses.

Ülesanne 40.2 (Lõppvoor 2001, 10. klass) Joonisel on kujutatud kolm ruutu. Leia nurkade ADC ja BDC suuruste summa.



Ülesanne 40.3 (Piirkonnavoor 2001, 11. klass) Tõesta, et mistahes 10 järjestikuse positiivse täisarvu hulgas leidub arv, mis on ülejäänutega ühistegurita.

Ülesanne 40.4 (Lõppvoor 1995, 12. klass) Arvuta summa

$$1\cdot\frac{1}{2}+2\cdot\frac{1}{4}+3\cdot\frac{1}{8}+\ldots+n\cdot\frac{1}{2^n}+\ldots.$$

Ülesanne 40.5 (Lõppvoor 2014, 12. klass) Tahvlile kirjutatakse mingi positiivne täisarv n ühe korra, seejärel kirjutatakse arvu $n-1$ kaks korda jne, igal järgneval sammul kirjutatakse viimati tahvlile kirjutatud arvudest ühe võrra väiksemat arvu kaks korda rohkem kordi. Nullideni jõudmisel lõpetatakse. Tõesta, et lõpuks tahvlil olevate arvude summa on väiksem kui 2^{n+1}.

Ülesanne 40.6 (Lõppvoor 2011, 12. klass) Kas leidub selline positiivne reaalarv C, et kõigi positiivsete reaalarvude x_1, x_2, x_3, x_4 korral kehtib võrratus

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 \leqslant C(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_1)\,?$$

Ülesanne 40.7 (Lõppvoor 2012, 12. klass) Rivis seisab üksteise taga 2^n sõdurit, kus n on positiivne täisarv. Igal ümberrivistumisel võetakse uue rivi etteotsa enne paaritutel kohtadel seisnud sõdurid (nende omavahelist järjekorda muutmata) ja nende järele enne paariskohtadel seisnud sõdurid (samuti omavahelist järjekorda muutmata). Tõesta, et n ümberrivistumise järel on sõdurid samas järjekorras nagu alguses.

Ülesanne 40.8 (Lõppvoor 2020, 12. klass) Kas leidub selline positiivne täisarv n, et arvu 2^n esimene number on 3 ja teine number on 9?

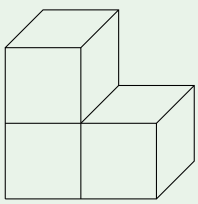
Ülesanne 40.9 (Talvine lahtine võistlus 2006, vanem rühm) Kas leidub naturaalarv $n > 2$, mille korral mingi n järjestikuse täisarvu ruutude summa on omakorda täisarvu ruut?

Ülesanne 40.10 (Kevadine lahtine võistlus 2004, vanem rühm) Ruudustikus suurusega $n \times n$ värvitakse algul mingid k ruutu roheliseks. Edaspidi võib igal sammul värvida roheliseks ühe sellise ruudu, mille naaberruutudest (s.t. temaga ühist külge omavatest ruutudest) vähemalt kaks on juba rohelised. Millise vähima k korral on alguses värvitavad k ruutu võimalik valida nii, et järgnevate sammudega saab kogu ruudustiku roheliseks värvida?

Ülesanne 40.11 (Kevadine lahtine võistlus 1995, vanem rühm)

a) Kas üheksast joonisel kujutatud "nurgikust", millest igaüks koosneb kolmest ühikkuubist, on võimalik kokku panna kuup suurusega $3 \times 3 \times 3$ ühikut?

b) Kas 26 ühikkuubist on võimalik kokku panna kaks ühesugust keha, millest omakorda saaks moodustada $3 \times 3 \times 3$ kuubi ilma keskmise ühikkuubita?



Ülesanne 40.12 (Kevadine lahtine võistlus 1995, vanem rühm) Ringikujulise autotee ääres on n bensiinijaama. Igas bensiinijaamas on mingi kogus kütust, kusjuures kõigis jaamades kokku on kütust täpselt niipalju, kui seda läheb vaja kogu ringi ühekordseks läbimiseks. Tõesta, et sõltumata kütuse jaotusest bensiinijaamade vahel leidub selline jaam, millest tühja paagiga alustades ning kõikides teele jäävates bensiinijaamades tankides on võimalik kogu ring läbi sõita.

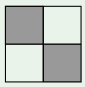
Ülesanne 40.13 (Sügisene lahtine võistlus 1999, noorem rühm) Leia võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} x^3 + 3y^2x = 14 \\ y^3 + 3x^2y = 13 \end{cases}$$

kõik reaalarvulised lahendid.

Ülesanne 40.14 (Sügisene lahtine võistlus 2006, vanem rühm) Kolmnurkarvudeks nimetatakse arve kujul $a_n = 1 + 2 + \ldots + n$, kus $n \geqslant 1$. Tõesta, et kui $2a_m = a_n$, siis a_{2m-n} on täisarvu ruut.

Ülesanne 40.15 (Sügisene lahtine võistlus 2011, vanem rühm) Milline on vähim arv tumedaid ühikruute, mis saab jääda nähtavaks, kui ruudustikule mõõtmetega $n \times n$ laduda teatav hulk joonisel näidatud, nelja ühikruutu katvaid kujundeid (vajadusel neid pöörates) nii, et ruudustiku iga ruut saaks kaetud vähemalt ühekordselt?



Ülesanne 40.16 (Sügisene lahtine võistlus 2013, noorem rühm) Tahvlile on kirjutatud arvud $1, 2, 3, 4, 5$ ja 6. Igal sammul kustutab Juku omal valikul mingid kaks tahvlil olevat arvu a ja b ning kirjutab asemele ühe arvu $ab + a + b$. Nii toimib ta seni, kuni tahvlile jääb ainult üks arv. Leia kõik võimalused, milline arv võib lõpuks tahvlile jääda.

Ülesanne 40.17 (Talvine lahtine võistlus 2019, vanem rühm) Leia kõik reaalarvude kolmikud (x, y, z), mis rahuldavad võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} xy + x + y = z \\ yz + y + z = x \\ zx + z + x = y \end{cases}.$$

Ülesanne 40.18 (Talvine lahtine võistlus 2020, noorem rühm) Ruutvõrrandi tunnis annab õpetaja õpilastele lahendada ruutvõrrandeid kujul $x^2 + px + q = 0$, kus p ja q on mingid täisarvud. Iga järgmise võrrandi saab õpetaja, muutes viimati lahendatud võrrandis kas p või q väärtust 1 võrra suuremaks või väiksemaks. Esimesena lahendatud võrrandis on $p = 2020$ ja $q = 2010$, viimasena lahendatud võrrandis aga $p = 2010$ ja $q = 2020$. Kas võib kindlalt väita, et vähemalt ühe tunnis lahendatud võrrandi mõlemad lahendid on täisarvud?

Ülesanne 40.19 (Talvine lahtine võistlus 2021, vanem rühm) Kas leidub

a) 3 järjestikust naturaalarvu;

b) 4 järjestikust naturaalarvu,

mis kõik esituvad mingi kahe (mitte tingimata erineva) positiivse täisarvu ruutude summana?

Ülesanne 40.20 (Sügisene lahtine võistlus 2023, vanem rühm) Tõesta, et

$$2023^{10} > 10 \cdot (1^9 + 2^9 + 3^9 + \ldots + 2022^9)\,.$$

Lahendused

40.1 Vaatleme klubisid kooli õpilaste hulga alamhulkadena $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Ülesande esimene tingimus tähendab siis, et iga kahe klubi ühisosa moodustab samuti mingi klubi. Näitame, et ka kõigi klubide ühine ühisosa vastab ühele nendest klubidest.

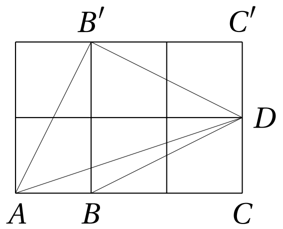
Arutleme sammhaaval. Ülesande tingimuste põhjal teame, et $A_1 \cap A_2$ on üks kooli klubidest; olgu see A_{i_1}. Siis peab ka $(A_1 \cap A_2) \cap A_3 = A_{i_1} \cap A_3$ vastma mingile klubile; olgu see A_{i_2}. Nõnda jätkates saame lõpuks, et

$$((((A_1 \cap A_2) \cap A_3) \cap A_4) \cap \ldots \cap A_{n-1}) \cap A_n = A$$

on samuti kooli üks klubi. Ülesande teise tingimuse põhjal osaleb klubi A tegevuses vähemalt üks õpilane a. Klubi A konstruktsiooni põhjal $A \subset A_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Järelikult kuulub õpilane a kooli igasse klubisse.

40.2 Vastus: 135°.

Peegeldame antud ruute nende ühise ülemise servaga määratud sirge suhtes; olgu punktide B ja C peegeldused vastavalt B' ja C'.



Paneme tähele, et punkti A saame punktist D pöördega 90° võrra päripäeva ümber punkti B'. Seega on ADB' võrdhaarne täisnurkne kolmnurk tipunurgaga $\angle ADB' = 45^\circ$. Nüüd saame lihtsasti leida, et

$$\angle ADC + \angle BDC = \angle ADC + \angle B'DC' = 180^\circ - \angle ADB' = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ\,.$$

40.3 Olgu meil antud kümme järjestikust positiivset täisarvu. Uurime nende jaguvust väikeste algarvudega.

Kümnest järjestikusest täisarvust viis jaguvad kindlasti 2-ga.

3-ga võib nendest arvudest jaguda kas kolm või neli, aga kindlasti leidub nende seas ülimalt kaks niisugust, mis ei jagu 2-ga (st mis pole veel arvesse võetud).

5-ga jagub kümnest järjestikusest täisarvust kindlasti kaks, kusjuures neist üks jagub kindlasti lisaks 2-ga, üks aga mitte.

7-ga jagub kümnest järjestikusest täisarvust kas üks või kaks, aga niisuguseid 7-ga jaguvaid arve, mis ei jagu 2-ga, on kindlasti ülimalt üks.

11 ja suuremate algarvudega saab kümnest järjestikusest täisarvust jaguda ülimalt üks.

Niisiis on vaadeldava kümne seas neid arve, millel leidub sama hulga mõne teise arvuga ühine tegur, kokku ülimalt $5 + 2 + 1 + 1 = 9$. Järelikult peab leiduma vähemalt üks, mis on ülejäänutega ühistegurita.

40.4 Teisendame ülesande avaldist ja kasutame geomeetrilise jada summa valemit:

$$
\begin{aligned}
&1\cdot\frac{1}{2}+2\cdot\frac{1}{4}+3\cdot\frac{1}{8}+\ldots+n\cdot\frac{1}{2^n}+\ldots=\\
&=\underbrace{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots\right)}_{1}+\underbrace{\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots\right)}_{\frac{1}{2}}+\underbrace{\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\ldots\right)}_{\frac{1}{4}}+\ldots=\\
&=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots=2\,.
\end{aligned}
$$

40.5 Igal sammul kirjutatakse tahvlile 2 korda rohkem arve kui eelmisel. Kõigi tahvlile kirjutatud arvude summa on seega

$$1\cdot n+2\cdot(n-1)+4\cdot(n-2)+\ldots+2^{n-3}\cdot 3+2^{n-2}\cdot 2+2^{n-1}\cdot 1\,.$$

Paneme tähele, et kui jagada seda summat arvuga 2^n, on tulemuseks

$$\frac{n}{2^n}+\frac{n-1}{2^{n-1}}+\frac{n-2}{2^{n-2}}+\ldots+\frac{3}{2^3}+\frac{2}{2^2}+\frac{1}{2^1}\,.$$

Viimases avaldises tunneme ära ülesande 40.4 lõpmatu summa lõpliku osasumma. Seega kui kõigi tahvlile kirjutatud arvude summa on S, kehtib võrratus

$$\frac{S}{2^n}<2\,,$$

millest omakorda järeldub käesoleva ülesande väide $S<2^{n+1}$.

40.6 Vastus: ei.

Ülesande võrratus on samaväärne võrratustega

$$
\begin{aligned}
x_1x_3+x_2x_4 &\leqslant (C-1)(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_4+x_4x_1)\,,\\
\frac{x_1x_3+x_2x_4}{x_1x_2+x_2x_3+x_3x_4+x_4x_1} &\leqslant C-1\,.
\end{aligned}
$$

Näitame, et viimase võrratuse vasaku poole avaldis võib võtta kuitahes suuri väärtusi. Selleks võime x_1 ja x_3 valida suured ning x_2 ja x_4 väikesed. Näiteks kui $x_1=x_3=X>0$ ja $x_2=x_4=X^{-1}$, siis $x_1x_3=X^2$, $x_2x_4=X^{-2}$ ja $x_1x_2=x_2x_3=x_3x_4=x_4x_1=1$. Sel juhul

$$\frac{x_1x_3+x_2x_4}{x_1x_2+x_2x_3+x_3x_4+x_4x_1}=\frac{X^2+X^{-2}}{1+1+1+1}>\frac{X^2}{4}\,.$$

Viimane avaldis võib X kasvades võtta kuitahes suuri väärtusi ega saa seega olla ülalt tõkestatud ühegi konstandiga.

40.7 Nummerdame sõdurid algjärjestuses numbritega $0,1,\ldots,2^n-1$. Lihtne on näha, et sõdurid number 0 ja 2^n-1 jäävad alati oma algsetele kohtadele. Mis toimub teiste sõduritega? Kirjutame välja esimese ümberjärjestuse tulemuse $n=4$ (ehk 16 sõduri) jaoks:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0	2	4	6	8	10	12	14	1	3	5	7	9	11	13	15

Näeme, et positsioonidele number $0, 1, 2, \ldots, 2^{n-1} - 1$ asuvad sõdurid vastavalt numbritega $2\cdot 0 = 0, 2\cdot 1 = 2, 2\cdot 2 = 4, \ldots, 2\cdot(2^{n-1}-1) = 2^n - 2$. Ka teise poolde asuvate sõdurite järjekorranumbrid $1, 3, 5\ldots$ kasvavad 2 võrra. Kas me saame ka neid väljendada 2-ga korrutamise abil nii, et tekiks vastavused $8 \to 1, 9 \to 3, 10 \to 5$ jne? Jah, saame, kui leiame korrutise jäägi mooduli 15 järgi, kuivõrd $2 \cdot 8 \equiv 1 \bmod 15$, $2 \cdot 9 \equiv 3 \bmod 15$ jne.

Üldjuhul näeme, et positsioonidele number $2^{n-1}, 2^{n-1} + 1, \ldots, 2^n - 2$ asuvad sõdurid vastavalt numbritega

$$\begin{aligned}
2 \cdot 2^{n-1} = 2^n &\equiv 1 \bmod (2^n - 1)\,,\\
2 \cdot (2^{n-1} + 1) = 2^n + 2 &\equiv 3 \bmod (2^n - 1)\,,\\
&\ldots,\\
2 \cdot (2^n - 2) = 2^{n+1} - 4 &\equiv 2^n - 3 \bmod (2^n - 1)\,.
\end{aligned}$$

Jääb veel tähele panna, et mooduli $2^n - 1$ järgi taandamine ei muuda midagi ka esimese poole sõdurite järjekorranumbrite arvutuses. Seega kokkuvõttes satub esimese ümberjärjestamise tulemusena positsioonile number i sõdur number $2 \cdot i \bmod (2^n - 1)$ (kus $i = 0, 1, 2\ldots, 2^n - 2$; sõdur number $2^n - 1$ jääb paigale).

Sama aruteluga jätkates näeme, et teise ümberjärjestamise tulemusena satub positsioonile number i sõdur number $2 \cdot 2 \cdot i \bmod (2^n - 1)$, kolmanda ümberjärjestamise tulemusena sõdur number $2^3 \cdot i \bmod (2^n - 1)$ jne. Ülaltehtud näidet jätkates saame:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0	2	4	6	8	10	12	14	1	3	5	7	9	11	13	15
0	4	8	12	1	5	9	13	2	6	10	14	3	7	11	15
0	8	1	9	2	10	3	11	4	12	5	13	5	14	7	15
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

n. ümberjärjestamise tulemusena satub positsioonile number i ($i = 0, 1, \ldots, 2^n - 2$) sõdur number

$$2^n \cdot i \equiv i \bmod (2^n - 1)\,,$$

sest $2^n \equiv 1 \bmod (2^n - 1)$. Kuna sõdur number $2^n - 1$ on kogu aeg paigal, olemegi ülesande väite tõestanud kõigi sõdurite jaoks.

40.8 Vastus: jah.

Peame näitama, et leiduvad positiivsed täisarvud k ja n nii, et

$$3{,}9 \cdot 10^k \leqslant 2^n < 4 \cdot 10^k\,.$$

Võrratused jäävad samaväärseks, kui võtame kõigist avaldistest kümnendlogaritmid:

$$\begin{aligned}
\log(3{,}9 \cdot 10^k) &\leqslant \log(2^n) < \log(4 \cdot 10^k)\,,\\
\log 3{,}9 + k &\leqslant n \cdot \log 2 < \log 4 + k\,,\\
\log 3{,}9 &\leqslant n \cdot \log 2 - k < \log 4\,.
\end{aligned}$$

Kuna $\log 3{,}9$ ja $\log 4$ kuuluvad vahemikku $(0; 1)$, on viimane võrratuste ahel samaväärne väitega, et leidub positiivne täisarv n nii, et

$$\log 3{,}9 \leqslant \{n \cdot \log 2\} < \log 4\,,$$

kus $\{x\}$ tähistab reaalarvu x murdosa.

Uurime, kuidas käitub suuruse $n \cdot \log 2$ murdosa. Kõigepealt paneme tähele, et $\log 2$ on irratsionaalarv. Tõepoolest, kui leiduks kaks täisarvu a ja b nii, et $\log 2 = \dfrac{a}{b}$, siis peaks kehtima võrdused

$$\begin{aligned} 10^{\log 2} &= 10^{\frac{a}{b}}, \\ 2 &= 10^{\frac{a}{b}}, \\ 2^b &= 10^a, \end{aligned}$$

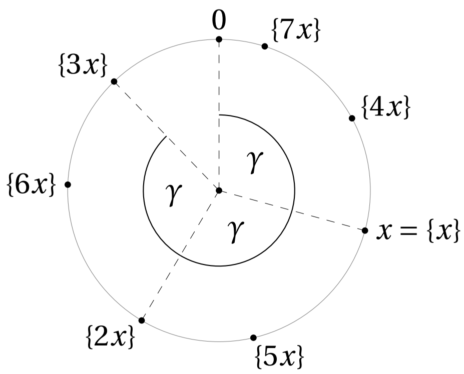
mis aga pole võimalik.

Lahenduse idee on näidata, et x on irratsionaalarv, saab $\{n \cdot x\}$ viia kuitahes väikeseks. Formaalselt tõestame, et iga $\varepsilon > 0$ jaoks leidub positiivne täisarv n nii, et $\{n \cdot x\} < \varepsilon$.

Kohe on selge, et üldisust kitsendamata piisab, kui vaatleme juhtu $x \in (0;1)$, sest meid huvitavad ainult avaldiste $n \cdot x$ murdosad.

Lisaks paneme tähele, et kuivõrd x on irratsionaalarv, ei saa $n \cdot x$ (positiivse täisarvu n korral) olla täisarv. Muuhulgas tähendab see, et iga positiivse täisarvu n korral kehtib võrratus $\{n \cdot x\} > 0$. Samuti näeme, et kui m ja n on erinevad positiivsed täisarvud, siis $\{m \cdot x\} \neq \{n \cdot x\}$, sest muidu oleks arvu $(m - n) \cdot x$ murdosa 0 ehk see arv ise oleks täisarv; vastuolu arvu x irratsionaalsusega.

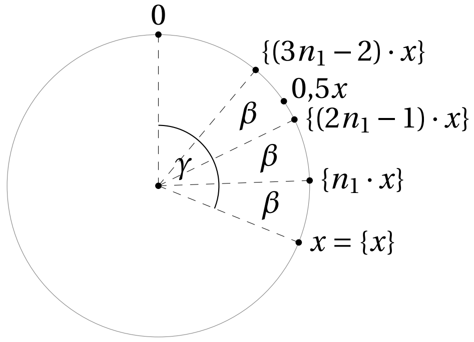
Murdosi $\{x\}, \{2x\}, \{3x\}, \ldots$ on graafiliselt mugav kujutada ringjoonel pikkusega 1.



Üleminek arvult $\{n \cdot x\}$ arvule $\{(n+1) \cdot x\}$ vastab pöördele mingi nurga γ võrra. Kui arvu x kordne ületab mõne järjekordse täisarvu, saame sellest täisosa maha võtta, mis vastab täpselt täispöörde mahavõtmisele vastavast nurgast.

Tõestame kõigepealt, et iga irratsionaalarvu $x \in (0;1)$ jaoks leidub positiivne täisarv n nii, et $\{n \cdot x\} \leqslant \dfrac{\{x\}}{2} = \dfrac{x}{2}$. Olgu n_1 vähim selline positiivne täisarv, et $n_1 \cdot x > 1$. Siis muidugi $(n_1 - 1) \cdot x < 1$ (võrdus ei saa kehtida, sest x on irratsionaalarv!). Järelikult $\{n_1 \cdot x\} \in (0; x)$. Kui $\{n_1 \cdot x\} \in \left(0; \dfrac{x}{2}\right]$, oleme otsitava täisarvu leidnud.

Teisel võimalikul juhul $\{n_1 \cdot x\} \in \left(\dfrac{x}{2}; x\right)$ vaatleme nurka β, mis jääb ringjoonel arvudele $\{n_1 \cdot x\}$ ja x vastavate punktide vahele; niisiis on β nurk, mis vastab arvus $\{n \cdot x\}$ kordaja n suurendamisele $n_1 - 1$ võrra.



Tänu konstruktsioonile peavad kehtima võrratused $0<\beta<\frac{\gamma}{2}$. Seega leidub nurgal β niisugune täisarvuline kordne $m\cdot\beta$, et $\frac{\gamma}{2}<m\cdot\beta<\gamma$ (joonisel näiteks $m=3$). See aga tähendab, et kui $n=m\cdot(n_1-1)+1=m\cdot n_1+m-1$, siis $\{n\cdot x\}\in\left(0;\frac{x}{2}\right)$, nagu oligi tarvis.

Korrates seda konstruktsiooni lähtudes leitud arvust $\{n\cdot x\}$, saame leida täisarvu n' nõnda, et $\{n'\cdot x\}\leqslant\frac{\{n\cdot x\}}{2}\leqslant\frac{x}{4}$, siis omakorda täisarvu n'' nõnda, et $\{n''\cdot x\}\leqslant\frac{x}{8}$ jne. Kokkuvõttes saame arvu $\{n\cdot x\}$ teha väiksemaks igast arvust $\frac{x}{2^\ell}$; see avaldis aga muutub piisavalt suure ℓ väärtuse korral väiksemaks suvalisest etteantud positiivsest konstandist ε.

Valime nüüd $\varepsilon=\log 4-\log 3{,}9$ ja olgu t niisugune positiivne täisarv, et kehtib võrratus $\{t\cdot\log 2\}<\varepsilon$. Kuna vahemiku $(\log 3{,}9;\log 4)$ pikkus on ε, peab leiduma selline positiivne täisarv s, et $s\cdot\{t\cdot\log 2\}\in(\log 3{,}9;\log 4)$. Kuna ilmselt kehtib võrdus $s\cdot\{t\cdot\log 2\}=\{s\cdot t\cdot\log 2\}$, sobivad ülesandes otsitavateks arvudeks $n=s\cdot t$ ja $k=[n\cdot\log 2]$ (arvu $n\cdot\log 2$ täisosa).

Selles lahenduses polnud tegelikult oluline, milliseid numbreid me astme alguses täpselt näha soovime, ega isegi see, millist täisarvu me astendame (seni kuni see täisarv ise pole arvu 10 aste). Niisiis saame analoogiliselt tõestada palju üldisema tulemuse, mille kohaselt suvaliste kümnendnumbrite $a_1\neq 0, a_2,\ldots,a_i$ ja suvalise positiivse täisarvu (mis pole 10 aste) r jaoks leidub selline positiivne täisarv n, et r^n esimesed numbrid on $a_1a_2\ldots a_i$.

Arvutiülesanne 40.1 Kirjuta programm, mis saab sisendiks suvalise positiivse täisarvu (mis pole 10 aste) ning kümnendnumbrite järjendi $a_1\neq 0, a_2,\ldots,a_i$ ja väljastab vähima positiivse täisarvu n, mille jaoks arvu et r^n esimesed numbrid on $a_1a_2\ldots a_i$.

Python toetab vaikimisi suvalise pikkusega täisarve, nii on üks võimalik lahendusstrateegia arvude $r^1, r^2, r^3\ldots$ järjest läbi proovimine. Siiski pead arvestama, et arvud r^n kasvavad väga kiiresti ja see hetk, mil nad enam arvuti mällu ära ei mahu, võib tulla kiiremini, kui sa arvata oskad!

Milline on vähim n, mille korral arv 2^n algab numbritega 3 ja 9? Aga numbritega 1, 0, 0? Milline on vähim n, mille korral arv 3^n algab numbritega 3, 1, 4?

40.9 Vastus: jah.

Ülesande 1.2 põhjal teame, et iga naturaalarvu $n\geqslant 1$ korral kehtib võrdus

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Üks võimalus antud ülesandele lahendust leida on panna tähele, et $n = 24$ korral on $\frac{n}{6} = 4$, $n+1 = 25$ ja $2n+1 = 49$ täisruudud, seega peab täisruut olema ka summa $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + 24^2$.

Süstemaatilisema lähenemisena võime alul proovida välja selgitada, millised arvud üldse n väärduseks sobivad.

Mooduli 3 järgi teame, et kui $k \equiv 0 \bmod 3$, siis ka $k^2 \equiv 0 \bmod 3$, aga kui $k \equiv 1 \bmod 3$ või $k \equiv 2 \bmod 3$, siis $k^2 \equiv 1 \bmod 3$. See tähendab, et kolme järjestikuse täisruudu summa annab 3-ga jagades alati jäägi 2 ega saa seega ise täisruut olla. Niisiis $n = 3$ lahendeid ei anna.

$n = 4$ puhul võime sama moodi uurida jääke modulo 4. Me teame, et paarisarvu ruut jagub 4-ga, paaritu aru ruut aga annab 4-ga jagades jäägi 1. Nelja järjestikuse täisruudu summa annab seega 4-ga jagades jäägi 2 ega saa järelikult täisruutu anda. Sama moodi annab 5 järjestikuse täisruudu summa 4-ga jagades jäägi 2 või 3, 6 järjestikuse täisruudu summa aga alati jäägi 3. Niisiis ei sobi n väärtusteks ka $4, 5$ ja 6.

Mooduli 16 järgi on järjestikuste täisruutude jäägid $0, 1, 4, 9, 0, 9, 4, 1, 0$ jne. See tähendab, et 7 järjestikuse täisruudu summa saab modulo 16 olla $3, 8, 11$ või 12; 8 järjestikuse täisruudu summa saab modulo 16 olla aga ainult 12. Niisiis ei sobi n väärtuseks ka 7 ja 8.

Mooduli 9 järgi järjestikuste täisruutude jäägid $0, 1, 4, 0, 7, 7, 0, 4, 1$ jne. Üheksa järjesikuse täisruudu summa jääk jagamisel 9-ga on seega alati 6, mistõttu ei sobi n väärtuseks ka 9.

Niisis peab n väärtus selle ülesande lahenduses (kui lahendus üldse eksisteerib) olema vähemalt 10. Nüüd tuleb hakata proovima järjestikuste täisarvude ruutude summasid $10, 11, 12$ jne kaupa. Selleks, et uuritavaid täisruute võimalikult väikestena hoida, on kaval valida umbes pooled arvudest negatiivsed. Mõningase katsetamise järel jõuame nii lahendini

$$(-4)^2 + (-3)^2 + (-2)^2 + (-1)^2 + 0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 = 121 = 11^2 .$$

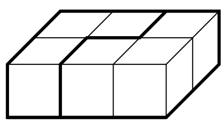
40.10 Vastus: n.

Kui värvida antud ruudustiku ühel diagonaalil hakatuseks n ruutu, on lihtne mõista, et lubatud värvimistega saab muuta roheliseks kogu ruudustiku. Näitame, et vähem kui n ruudu värvimisest alguses ei piisa.

Vaatleme igal sammul värvitud ruutudest moodustatud kujundit (mis võib koosneda mitmest tükist). On selge, et selle kujundi ümbermõõt saab igal sammul kas kahaneda või samaks jääda, aga mitte kasvada, sest kasvamiseks tuleks värvida ruut, millel on kas 0 või 1 värvitud naabrit. Samas alguses saab see ümbermõõt olla ülimalt $4(n-1)$, kogu värvitud ruudustiku ümbermõõt aga on $4n$.

40.11 Vastus: a) jah, b) ei.

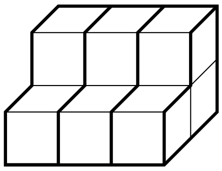
a) Selle ülesande puhul kipuvad paar esimest lihtsat katset ebaõnnestuma. Näiteks on kohe selge, et kahest nurgikust saab kokku panna $1 \times 2 \times 3$ klotsi:



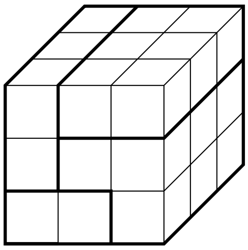
Kui laome neid kolm tükki üksteise otsa, saame $3 \times 3 \times 2$ klotsi ning ülesande lahendamiseks oleks tarvis lisada $3 \times 3 \times 1$ klots, mida nurgikutest kokku panna ei saa.

Selle ebaõnnestumise peale hakkavad paljud lahendajad otsima tõestust, et nõutud konstruktsioon pole võimalik. Pähe tulevad erinevad värvimised, aga ükski neist ei vii sihile, sest lahendus on tegelikult olemas.

Üks võimalus on panna kolmest nurgikust kõigepealt kokku järgmine kujund:



Sellele kujundile saame nüüd lisada kolm $1 \times 2 \times 3$ klotsi:



b) Kui leiduks kaks 13-st ühikkuubist koosnevat ühesugust keha, millest saab kokku panna $3 \times 3 \times 3$ kuubi ilma keskmise ühikkuubita, peaks leiduma kuubi pööre, mis viib ühe neist kehadest teiseks. Lahenduse ideeks on näidata, et kõik suure kuubi pöörded jätavad mõne ühikkuubi samale kohale, niisiis ei saa ükski neist pööretest ühte keha teiseks viia.

On lihtne näha, et kuubil on kokku 24 võimalikku pööret. Tõepoolest, ühe tahu saab viia 6-ks erinevaks tahuks ning seejärel saab kuupi pöörata ümber selle tahu keskpunkti veel 4 erineval moel (sh üldse mitte pöörata). On selge, et nii saame kõik võimalikud pöörded kätte.[1]

Jaotame need pöörded nelja paarikaupa ühisosata klassi.

Esimesesse klassi kuulub ainult üks triviaalne pööre, mis jätab suure kuubi paigale. Muuhulgas jätab ta samasse kohta kõik ühikkuubid.

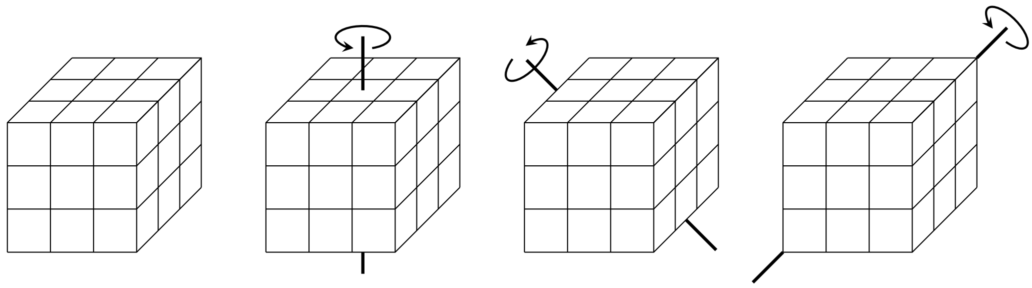
Teise klassi kuuluvad pöörded ümber vastastahkude keskpunkte ühendavate sirgete. Vastastahkude paare on kokku 3 ja igaühe puhul neist saame valida 3 pööret (triviaalset, kuupi paigale jätvat pööret me enam ei loe). Niisiis on seda tüüpi pöördeid kokku $3 \cdot 3 = 9$ ja nad jätavad samasse kohta need tahkude keskel asuvad ühikkuubid, mida läbib pöördetelg.

Kolmandasse klassi kuuluvad pöörded, mille telg läbib vastasservade keskpunkte. Vastasservade paare on kokku 6 ja iga paar määrab ühe mittetriviaalse pöörde. Niisiis on selles klassis kokku 6 pööret, millest igaüks jätab samasse kohta need servakuubid, mida läbib pöördetelg.

Neljandasse klassi kuuluvad pöörded, mille telg on määratud kuubi pikimate diagonaalide poolt. Neid diagonaale on kokku 4 ning igaühele neist vastab 2 mittetriviaalset pööret. Sellesse klassi kuulub $4 \cdot 2 = 8$ pööret, millest igaüks jätab samasse kohta kaks nurgakuupi.

[1] Teine võimalus on panna tähele, et ühe tipu saab pöördega viia 8-ks erinevaks tipuks ja seejärel saab kuupi ümber tipu pöörata veel 3 moel; kokku jälle $8 \cdot 3 = 24$ varianti.

Kokku saime $1+9+6+8=24$ pööret, niisiis oleme kõik pöörded läbi vaadatud ning näidanud, et nende kõigi jaoks leidub mõni paika jääv ühikkuup. Järelikult pole ülesandes nõutud jaotus võimalik.



40.12 Alustame sõitu paagiga, kus on piisavalt kütust, et kogu ring läbida, ning tangime igas bensiinijaamas lisaks kogu seal leiduva kütuse. Algpunkti tagasi jõudes on autos täpselt sama palju kütust kui alguses. Leiame nüüd bensiinijaama, kuhu jõudes oli autos kogu protsessi käigus kõige vähem kütust (kui selliseid on mitu, valime neist suvalise). See ongi see jaam, millest tühja paagiga alustades saame kogu ringi läbi sõita, sest jaama valiku põhjal ei saa autos kordagi kütusepuudust tekkida.

40.13 Vastus: $x=2$, $y=1$ on ainus lahend.

Süsteemi võrrandite liitmisel saame

$$\begin{aligned} x^3+3x^2y+3y^2x+y^3 &= 27\,, \\ (x+y)^3 &= 27\,, \\ x+y &= 3 \end{aligned}$$

ja lahutamisel

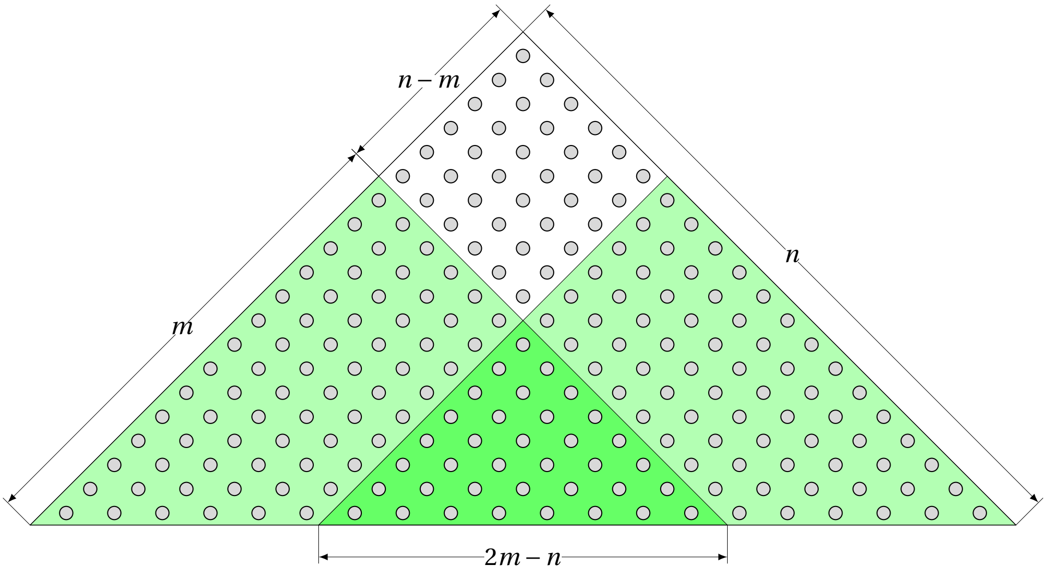
$$\begin{aligned} x^3-3x^2y+3y^2x-y^3 &= 1\,, \\ (x-y)^3 &= 1\,, \\ x-y &= 1\,. \end{aligned}$$

Süsteemi

$$\begin{cases} x+y=3 \\ x-y=1 \end{cases}$$

võrrandite liitmisel saame $2x=4$ ja lahutamisel $2y=2$, millest omakorda $x=2$ ja $y=1$. Lihtne kontroll näitab, et need väärtused tõepoolest sobivad.

40.14 Selle ülesandele saab anda ilusa visuaalse tõestuse.



Kolmnurkarv a_n loendab täppide arvu kolmnurgas, kus esimeses reas on 1 täpp, teises reas 2 täppi jne, n. reas n täppi. Kui $2a_m = a_n$, siis peab joonisel roheliste kolmnurkade poolt topelt kaetud täppe olema täpselt sama palju kui katmata täppe. Topelt kaetud täppe on parajasti a_{2m-n}, katmata täppe aga $(n-m)^2$.

Arvutiülesanne 40.2 Ülesande 40.14 lahenduse joonisel on toodud näide, kus $n = 20$ ja $m = 14$. Kirjuta arvutiprogramm, mis leiab selle ülesande kõik lahendused, kus $n < 100000$. Mitu lahendust saad?

40.15 Vastus: n.

Näitame, et ruudustiku suvalise katmise korral peab igas reas leiduma tume katmata ühikruut. Võtame mingi rea ning vaatleme tema ruute vasakult paremale. Kui kõige vasakpoolne ühikruut on tume, oleme väite tõestanud. Kui see ühikruut on hele, vaatleme 2×2 ruutu, mis seda ühikruutu katab. Heleda ühikruudu naaberruut 2×2 ruudus peab olema tume. Kui see ruut on katmata, oleme väite tõestanud. Kui see ruut on kaetud, peab seda katma mingi teine 2×2 ruut. Nüüd saame sama arutelu korrata, kuni jõuame 2×2 ruuduni, mille kaks ühikruutu on vaadeldavas reas näha. See olukord peab tekkima hiljemalt siis, kui oleme jõudnud suure ruudustiku teise serva.

Kuna igas reas peab leiduma vähemalt üks tume katmata ühikruut, peab neid kogu ruudustiku peale olema vähemalt n. Teisest küljest on lihtne anda konstruktsioon täpselt n tumeda ühikruudu jaoks. Hakkame ruudustikku katma korraga alt vasakust ja ülevalt paremast nurgast 2×2 ruutudega, mis on orienteeritud nii, nagu ülesande joonisel. Kattes igal sammul nähaoleva tumedate ruutude diagonaalrea uute 2×2 ruutudega, jõuame lõpuks mõlemalt poolt välja ruudustiku diagonaalini, mis kulgeb ülevalt vasakpoolsest nurgast alumisse parempoolsesse nurka. Kattes selle diagonaali viimaks 2×2 ruutudega (mida on $n-1$ tükki), jäävad näha täpselt sellel diagonaalil paiknevad tumedad ühikruudud.

40.16 Vastus: 5039 on ainus võimalus.

Paneme tähele, et $(a+1)(b+1) = ab + a + b + 1$. See tähendab, et kui me asendaksime tahvlil kõik arvud 1 võrra suurematega, muutuks Juku tehtav operatsioon lihtsalt kahe arvu asendamiseks nende korrutisega. Millises järjekorras Juku neid tehteid ka ei sooritaks, jääks sel juhul lõpuks tahvlile arv $2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 5040$.

Algses versioonis jääb seega igal juhul lõpuks tahvlile 1 võrra väiksem arv 5039.

40.17 Vastus: $(-1;-1;-1)$, $(0;0;0)$, $(-2;-2;0)$, $(-2;0;-2)$, $(0;-2;-2)$.

Saame kasutada ülesandega 40.16 sarnast võtet. Liidame süsteemi iga võrrandi mõlemale poolele 1 ja tegurdame vasakud pooled:

$$\begin{cases} (x+1)(y+1) = z+1 \\ (y+1)(z+1) = x+1 \\ (z+1)(x+1) = y+1 \end{cases}.$$

Muutujavahetusega $X = x+1, Y = y+1, Z = z+1$ lihtsustub süsteem kujule

$$\begin{cases} XY = Z \\ YZ = X \\ ZX = Y \end{cases}.$$

Viimase süsteemi võrrrandite korrutamisel saame $(XYZ)^2 = XYZ$, mis annab kaks võimalust: kas $XYZ = 0$ või $XYZ = 1$.

Kui $XYZ = 0$, peab üks muutujatest (üldisust kitsendamata näiteks X) olema 0. Siis aga ka $Y = ZX = 0$ ja $Z = XY = 0$. Niisiis annab see võimalus ainult lahendi $X = Y = Z = 0$ ehk $x = y = z = -1$.

Kui $XYZ = 1$, saame süsteemi võrranditest $\frac{1}{Z} = Z$, $\frac{1}{X} = X$ ja $\frac{1}{Y} = Y$, kust järeldub $X, Y, Z \in \{-1, 1\}$. Kuna $XYZ = 1$, saab muutujatest X, Y, Z võrduda (-1)-ga kas null või kaks tükki.

Võimalus $X = Y = Z = 1$ annab lahendi $x = y = z = 0$. Võimalus $X = Y = -1, Z = 1$ annab lahendi $x = y = -2, z = 0$ ning analoogiliselt saame lahenditeks ka $z = x = -2, y = 0$ ja $y = z = -2, x = 0$.

40.18 Vastus: jah.

Kuna alguses $p = q+10$ ja lõpuks $p = q-10$ ning kordajaid muudetakse 1 võrra, peab protsessis saabuma hetk, kus ruutvõrrand on kujul $x^2 + (r+1)x + r = 0$ mingi täisarvu r jaoks. Kuna $x^2 + (r+1)x + r = (x+r)(x+1)$, on selle ruutvõrrandi lahenditeks -1 ja $-r$, mis mõlemad on täisarvud.

40.19 Vastus: a) jah, b) ei.

a) Nõutud arvude otsimiseks võime koostada tabeli, mille read ja veerud vastavad järjestikuste positiivsete täisarvude ruutudele ning kuhu on kantud vastavate rea- ja veeruväärtuste summad:

	1	4	9	16	25	36	49	64	81
1	2	5	10	17	26	37	50	65	82
4	5	8	13	20	29	40	53	68	85
9	10	13	18	25	34	45	58	**73**	90
16	17	20	25	32	41	52	65	80	97
25	26	29	34	41	50	61	**74**	89	106
36	37	40	45	52	61	**72**	85	100	117
49	50	53	58	65	74	85	98	113	130
64	65	68	73	80	89	100	113	128	145
81	82	85	90	97	106	117	130	145	162

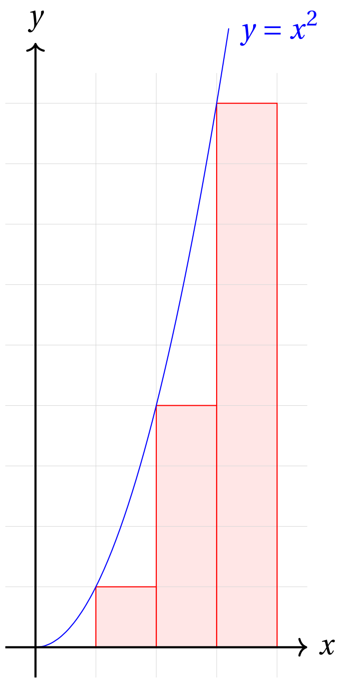
Näeme, et sobivad $72 = 6^2 + 6^2$, $73 = 8^2 + 3^2$ ja $74 = 7^2 + 5^2$ (ja see ongi tegelikult vähim võimalik näide).

b) Täisruudud annavad 4-ga jagades jäägi 0 või 1. Kahe täisruudu summa saab seega 4-ga jagamisel anda jäägiks $0, 1$ või 2. Neli järjestikust täisarvu peaksid aga andma jäägid $0, 1, 2$ ja 3.

40.20 Tõestame üldisema väite ja näitame, et kõigi positiivsete täisarvude a ja n korral kehtib võrratus

$$(a+1)^{n+1} > (n+1)\cdot(1^n + 2^n + 3^n + \ldots + a^n)\,. \tag{40.1}$$

Interpreteerime summat $1^n + 2^n + \ldots + a^n$ kui a ristkülikust moodustatud kujundi pindala, kus iga ristküliku laius on 1 ning kõrgused vastavalt $1^n, 2^n, \ldots, a^n$. Paneme tähele, et kogu kujund jääb allapoole funktsiooni $f(x) = x^n$ graafikut. Joonisel on toodud näide, kus $n = 2$ ja $a = 3$.



Integreerides funktsiooni $f(x) = x^n$ piirkonnas $[1; a+1]$, saame niisuguse kõvertrapetsi pindala, mis sisaldab kogu ristkülikutest moodustatud kujundit. Seega

$$\int_1^{a+1} x^n\,dx > 1^n + 2^n + \ldots + a^n\,.$$

Funktsiooni x^n algfunktsiooniks on $\frac{1}{n+1}x^{n+1}$, seega saame Newton-Leibnizi valemist

$$\int_1^{a+1} x^n\,dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1}\Big|_1^{a+1} = \frac{1}{n+1}(a+1)^{n+1} - \frac{1}{n+1}1^{n+1} < \frac{1}{n+1}(a+1)^{n+1}\,.$$

Järelikult

$$\frac{1}{n+1}(a+1)^{n+1} > 1^n + 2^n + 3^n + \ldots + a^n\,,$$

millest järeldubki võrratus (40.1). Ülesande võrratuse saame võttes $a = 2022$ ja $n = 9$.