4. Mängud

Definitsioon 4.1 *Kombinatoorse mängu* määravad ära järgmised komponendid.

- On antud mingi hulk *mängijaid* (matemaatikavõistluste ülesannetes enamasti kaks, aga vahel ka üks või rohkem kui kaks).
- On antud mingi (enamasti lõplik) hulk *seise*.
- On kirjeldatud *käigud*, mis viivad mängu ühest seisust teise, esimese käigu tegija ja järjekord, milles mängijad edaspidi käike teevad.
- Seisude hulgast on eraldatud üks *algseis* ja mingi hulk *lõppseise*.
- Iga lõppseisu jaoks on määratud, milline on selle lõppseisu jaoks mängu *tulemus* (näiteks viik või kellegi võit).

Mängude korral eeldame, et võimalikud tulemused on rangelt järjestatud (võit on parem kui viik, viik aga parem kui kaotus) ning et mängijad on huvitatud enda jaoks parima võimaliku tulemuse saavutamisest. Eesmärgile jõudmiseks saavad mängijad kujundada strateegia.

Definitsioon 4.2 Mängija *strateegiaks* nimetame eeskirja, mis määrab iga seisu jaoks, kus mängija käigule võib jõuda, ühe käigu, mille ta selles seisus tegema peab.

Mänguülesannete sisuks ongi enamasti ühele mängijale võitva strateegia leidmine.

Ülesanne 4.1 (Piirkonnavoor 1996, 11. klass) Tünnis on 1996 õuna. Mari ja Jüri võtavad vaheldumisi tünnist õunu, kusjuures korraga võib võtta ühe kuni kolm õuna ning esimesena võtab õunu Mari. Tõesta, et Jüri saab alati tagada endale võimaluse võtta tünnist viimane õun.

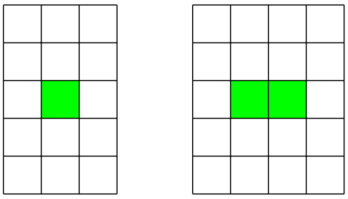
Lahendus. Paneme tähele, et $1996 \vdots 4$. Millise lubatud käigu Mari ka ei teeks, saab Jüri vastata nii, et tema käigu järel jagub allesjäänud õunte arv jälle 4-ga. Tõepoolest, kui Mari võttis $1, 2$ või 3 õuna, võib Jüri võtta vastavalt $3, 2$ või 1 õuna. Hoolitsedes, et iga tema käigu järel on tünnis 4-ga jaguv arv õunu, kindlustab Jüri endale võidu, sest ka $0 \vdots 4$.

Sageli aitavad võitvat strateegiat leida sümmeetriakaalutlused.

Ülesanne 4.2 (Piirkonnavoor 2013, 12. klass) On antud ruudustik positiivsete täisarvuliste mõõtmetega $m \times n$. Kaks mängijat värvivad kordamööda ruute. Ühel käigul tohib värvida ühe värvimata ruudu või kaks ühise küljega värvimata ruutu. Võidab mängija, kelle käiguga saab ruudustik üleni värvitud. Kummal mängijal on võitev strateegia?

Lahendus. Vastus: alustajal, kui vähemalt üks arvudest m ja n on paaritu, ning alustaja vastasel, kui m ja n on mõlemad paaris.

Kui m ja n on mõlemad paaritud, võib alustaja värvida ära ruudustiku keskmise ruudu. Kui üks neist arvudest on paaris ja teine paaritu, võib alustaja värvida kaks kõrvutiasetsevat ruutu, mille ühise külje keskpunkt langeb kokku antud $m \times n$ ristküliku keskpunktiga.



Edaspidi saab alustaja teha vastase iga käiguga tsentraalsümmeetrilise käigu ja kindlustada nii, et mänguseis on pärast alustaja iga käiku ruudustiku keskpunkti suhtes sümmeetriline. See tähendab, et kui tema vastase käigu jaoks leidub mängulaual vabu ruute, peavad käiguks vabad olema ka nendega sümmeetrilised ruudud. Kuna mängulaud peab ühel hetkel täis saama, on alustaja vastane see, kes käigupuudusesse satub.

Kui aga m ja n on mõlemad paaris, saab sama strateegiat kasutada alustaja vastane, kindlustades endale nii alati käigu ja selle tulemusena ka võidu.

Miks või millistel tingimustel üldse mõnel mängijal võitev (või vähemalt mittekaotav) strateegia leidub? Anname sellele küsimusele vastuse kahe mängija mängude jaoks. Vaatleme mängu võimalike tulemuste hulgaga $T = \{t_1, t_2, t_3, \ldots, t_{k-1}, t_k\}$, kus esimene mängija eelistab tulemust t_1 tulemusele t_2, tulemust t_2 tulemusele t_3 jne; teine mängija aga eelistab tulemust t_k tulemusele t_{k-1} jne. Tüüpilised tulemuste hulgad on näiteks

$$T = \{\text{esimese mängija võit}, \text{teise mängija võit}\}$$

ja

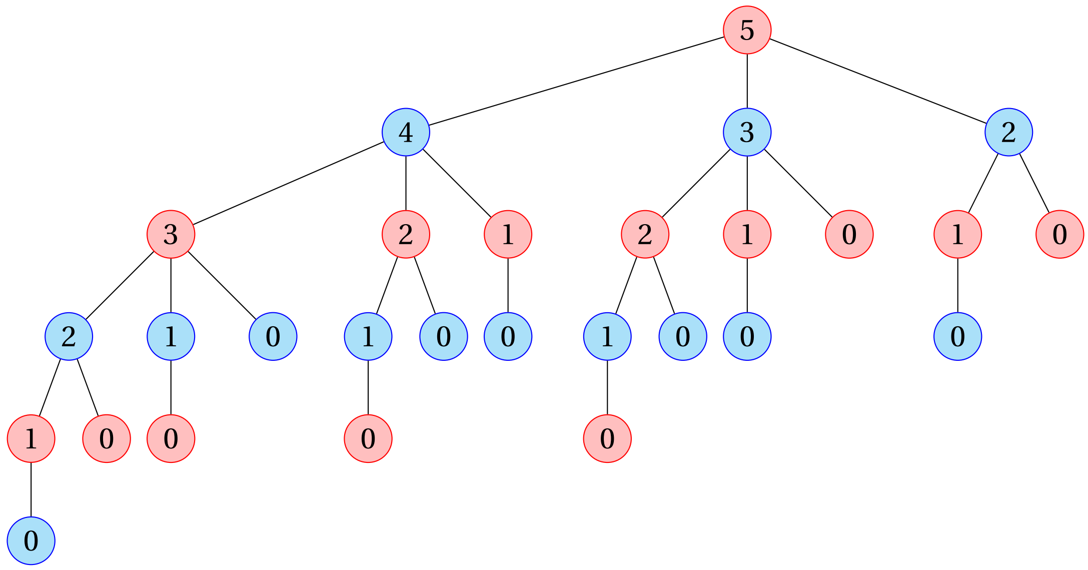
$$T = \{\text{esimese mängija võit}, \text{viik}, \text{teise mängija võit}\}\,.$$

Üks tingimus, mille kontrollimisest strateegia leidumiseks piisab, on mängu *lõplikkus*. Sõnastame ja tõestame järgmise teoreemi.

Teoreem 4.1 Lõpliku kahe mängija mängu korral leidub selline tulemus $t_i \in T$, mille jaoks kumbki mängija suudab sobiva strateegia valikuga garanteerida, et mäng lõppeb tulemusega t_i või (tema jaoks) paremini.

Tõestus. Joonistame kõigepealt vaadeldava mängu *puu*. Alustame algseisust (millest saab puu *juur*) ning märgime tema alla kõikvõimalikud seisud, millesse mäng esimese käigu järel jõuda võib. Iga tekkiva seisu alla joonistame omakorda seisud, millesse on võimalik jõuda teise mängija käigu järel jne. Ühendades vahetult üksteisele järgnevad seisud joonega, saamegi puukujulise struktuuri, mis sellest, et tagurpidise.

Näiteks hakates ülesande 4.1 mänguga peale seisust, kus kuhjas on 5 õuna, ning tähistades Mari ja Jüri käigulolekut vastavalt punase ja sinise ringiga, saame niisuguse puu[1]:



Paneme tähele, et mängupuu iga tipp on omakorda juureks mingile alammängule. Mängu lõplikkus tähendab, et mängupuu tippude arv on lõplik. Muuhulgas on lõplik ka selle puu *kõrgus*, st suurim käikude arv, mida algseisust alates teha saab. Näiteks ülaltoodud mängupuu kõrgus on 5.

Tõestame teoreemi induktsiooniga mängupuu kõrguse järgi. Baasjuht on puu kõrgusega 0, mis vastab seisule, kust ühtegi käiku teha ei saa, ehk lõppseisule. Definitsiooni 4.1 järgi on lõppseisu tulemus üheselt määratud, mistõttu teoreemi väide kehtib sel juhul triviaalselt.

Olgu nüüd väide tõestatud kõigi puude jaoks kõrgusega kuni k ja vaatame suvalist mänguseisu S, millele vastab puu kõrgusega $k+1$. Olgu $S_1, S_2, \ldots, S_m$ need seisud, millesse käigul olev mängija mängu oma käiguga viia saab. Kõigile neile seisudele vastavad mängupuud kõrgusega kuni k, seega saab nendele rakendada induktsiooni eeldust. Niisiis leidub iga seisu S_j jaoks tulemus $t^j \in T$, mille mõlemad mängijad vastavas alammängus endale garanteerida suudavad.

Veendume, et seisu S jaoks sobib otsitavaks tulemuseks niisugune väärtus t^j hulgast $\{t^1, t^2, \ldots, t^m\}$, mis on käigul oleva mängija seisukohast parim. Tõepoolest, käigul olev mängija saab tulemuse t^j endale garanteerida, kui ta viib mängu vastavasse seisu S_j. Kuna ülejäänud tulemused, mis vastavad teistele tekkida võivatele seisudele, pole käigul olija jaoks paremad, on nad tema vastase seisukohast *vähemalt sama hea tulemusega* kui t^j. Seega saab ka käigul olija vastane seisus S endale garanteerida vähemalt tulemuse t^j. $\square$

Teoreemi 4.1 võimsus seisneb selles, et tema abil saab mängu tulemust tõestada ilma konkreetseid strateegiaid kirja panemata. Sageli esinevad näiteks järgmist tüüpi arutlused.

[1] Kui sul tekib siinkohal tunne, et millestki väga sarnasest käib jutt graafe käsitlevas jaotises 3, siis sa pole eksinud. Puu on tõepoolest graafi erijuht (täpsemalt sidus ja tsükliteta graaf).

- Kui kahe mängija mäng on lõplik ja ainsaks võimalikuks tulemuseks on ühe või teise poole võit, piisab ühe mängija võidustrateegia olemasolu tõestamiseks näidata, et ta ei saa kaotada.
- Kui kahe mängija mäng on lõplik ning võimalikeks tulemusteks on viik või ühe poole võit, piisab viigilise üldtulemuse tõestamiseks, kui näitame, et mõlemad mängijad suudavad kaotusest hoiduda.

Mängu lõplikkuse tõestamiseks on tihti kasulik languse printsiip, vt jaotis 2 ja ülesanne 2.5.

Ülesanded

Ülesanne 4.3 (Lõppvoor 2018, 9. klass) Olgu n ja m positiivsed täisarvud, $n \geqslant m$. On antud n ühikruudust koosnev mängulaud mõõtmetega $1 \times n$ ning piiramatus koguses kleepribasid mõõtmetega $1 \times m$. Ühel käigul katab mängija kleepribaga mängulaua m kõrvutiasuvat ruutu, millest vähemalt üht veel ükski kleepriba ei kata. Kaks mängijat teevad käike kordamööda ja see, kes ei saa enam käiku teha, on kaotanud.

a) Tõesta, et kui n ja m on ühe ja sama paarsusega, siis alustaja saab võita vastase mistahes vastumängu korral.

b) Kas vastab tõele, et alati, kui n ja m on erineva paarsusega, saab alustaja vastane võita alustaja mistahes vastumängu korral?

Ülesanne 4.4 (Piirkonnavoor 2004, 9. klass) Mari ja Jüri mängivad n kõrvutiasetsevast ruudust ($n \geqslant 2$) koosneval mängulaual järgmist mängu. Kummalgi mängijal on üks nupp, mängu algul seisavad need mängulaua äärmistel ruutudel ning igal käigul liigutab mängija oma nuppu ühe või kahe ruudu võrra ükskõik kummas suunas. Käike tehakse vaheldumisi ning alustab Mari. Mängija, kes asetab oma nupu vastase nupuga samale ruudule, on võitnud. Milliste n väärtuste korral leidub võitev strateegia Maril ja milliste n väärtuste korral Jüril?

Ülesanne 4.5 (Piirkonnavoor 2008, 10. klass) Joosep ja Juula mängivad järgmist mängu. Algul on kuhjas 2008 kivi. Käigul olles võtab kumbki mängija kuhjast ära mingi arvu kive, mis on kuhjas järel olevate kivide arvu tegur, kusjuures kuhja peab vähemalt üks kivi alles jääma. Esimese käigu teeb Joosep, edasi käiakse kordamööda ning võidab see, kelle vastane ei saa enam käiku teha. Tõesta, et Joosepil on võimalik võita Juula mis tahes vastumängu korral.

Ülesanne 4.6 (Piirkonnavoor 2010, 10. klass) Juku ja Miku mängivad $n \times n$ ruudust koosneval mängulaual järgmiste reeglitega mängu. Algul on mängulaua kõik ruudud tühjad. Käigulolev mängija lisab mängulauale 1, 2 või 4 nuppu, kusjuures igal ruudul saab olla vaid üks nupp. Käike tehakse kordamööda, alustab Juku. Võidab mängija, kes asetab nupu mänguvälja viimasele tühjale ruudule. Kumb mängija saab võita vastase suvalise vastumängu korral, kui

a) $n = 6$;

b) $n = 8$?

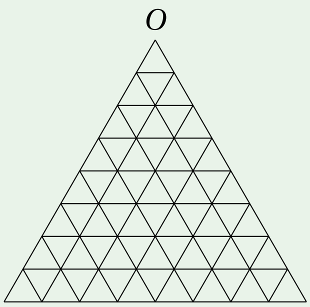
Ülesanne 4.7 (Lõppvoor 1995, 12. klass) Lõpmatul ruudulisel väljal mängivad Jaak ja Jüri järgmist mängu:

- Jaagul on n punast nuppu ning Jüril üks sinine nupp, mis asuvad mängu algul mänguvälja erinevates ruutudes;
- Jaagu käik seisneb ühe punase nupu nihutamises kolme ruudu võrra (mitte tingimata otsejoones), kusjuures mingilt ruudult tohib liikuda vaid mistahes sellega ühist külge omavale ruudule;
- Jüri käik seisneb sinise nupu nihutamises samal viisil ühe ruudu võrra;
- mäng algab Jaagu käiguga ning lõpeb, kui Jaagu käigu lõppedes asub mõni punane nupp sinise nupuga samal ruudul.

Leia arvu n vähim väärtus, mille korral Jaagul on mistahes algseisu korral võimalus mäng lõpetada.

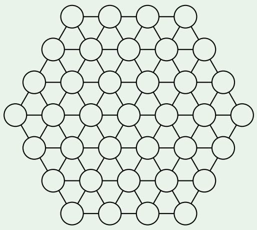
Ülesanne 4.8 (Sügisene lahtine võistlus 2007, vanem rühm) Hunt ja rebane mängivad lõpliku arvu väljadega laual järgmist mängu. Alguses on kõik väljad valged. Hunt võtab kuhjast ühe nupu ja asetab selle kas valgele väljale, pärast mida ta värvib selle välja halliks ja eemaldab kõik ülejäänud (nii oma kui ka vastase) nupud laualt, või vabale hallile väljale. Seejärel teeb samade reeglite järgi käigu rebane, kuid tema värviks on halli asemel punane. Edasi käiakse kordamööda ning võidab see, kes teeb viimase käigu (eeldame, et kuhjas nupud otsa ei saa). Kumb võidab mõlema mängija parima strateegia korral?

Ülesanne 4.9 (Piirkonnavoor 2020, 10. klass) Võrdkülgne kolmnurk küljepikkusega 8 (edaspidi *suur kolmnurk*) jaotatakse võrdkülgseteks kolmnurkadeks küljepikkusega 1 (edaspidi *väiksed kolmnurgad*). Triin ja Otto mängivad järgmist ühe nupu mängu. Mängu algul paikneb nupp suure kolmnurga ühes tipus O. Ühel käigul tohib liigutada nupu 1 ühiku võrra mööda mingit väikse kolmnurga külge, mida mööda pole nuppu mängu jooksul veel liigutatud. Käiakse kordamööda, alustab Triin. Võidab mängija, kes käib nupu tagasi tippu O. Kas kummalgi mängijaist on võimalik võita vastase mistahes vastumängu korral ja kui jah, siis kummal?



Ülesanne 4.10 (Sügisene lahtine võistlus 1996, noorem rühm) Kaks mängijat teevad mängunupuga kordamööda käike kuusnurksel mängulaual küljepikkusega n (joonisel on kujutatud laud juhul $n = 3$). Mängu algul seisab nupp laua ühes nurgas, käigu tegemine tähendab nupu liigutamist lõiku mööda suvalisele sellisele naaberväljale, millel nupp mängu jooksul veel olnud pole. Kaotab mängija, kes käiku teha ei saa.

Kumb võidab õige strateegia korral, kas mängu alustaja või tema vastane?



Ülesanne 4.11 (Kevadine lahtine võistlus 1998, vanem rühm) Kaks õpilast mängivad $n \times n$ ruudulisel laual mängu, mille alguses on kõik ruudud valged. Mängu jooksul teevad õpilased käike vaheldumisi, kusjuures igal käigul võib õpilane kas

1. värvida ühe valge ruudu mustaks, või
2. kui leidub ridu või veerge, kus on valgeid ruute rohkem kui musti, siis muuta ühes sellises reas või veerus iga ruudu värv vastupidiseks.

Mängu võidab õpilane, kelle käigu järel on kõik ruudud mustad. Kummal mängijal on võitev strateegia?

Ülesanne 4.12 (Kevadine lahtine võistlus 2005, vanem rühm) Ema küpsetas plaadikoogi ja lõikas selle $m \times n$ võrdseks ruudukujuliseks tükiks. Juku ja Kalle mängivad järgmist mängu. Kumbki mängija sööb oma käigul ära kaks kõrvutiasuvat (st ühise küljega) tükki. Käike tehakse vaheldumisi, alustab Juku. Kaotab see, kes enam käia ei saa. Kes võidab mängu, kui koogi mõõtmed on

a) 3×3;

b) 2004×2004;

c) 2004×2005?

Lahendused

4.3 Vastus: b) ei.

Ülesande a)-osas aitab sümmeetriline strateegia. Kui m ja n on sama paarsusega, saab alustaja oma esimesel käigul katta mängulaua keskmised ruudud nii, et mõlemasse otsa jääb $\frac{n-m}{2}$ vaba ruutu (erijuhul $n = m$ on ta esimese käigu järel juba võitnud). Edaspidi saavad mõlemad mängijad katta uusi ruute ainult kas ühel või teisel pool esimest riba. Alustaja vastane peab seega vabade ruutude sümmeetriat oma käigul rikkuma ning alustaja omakorda saab sümmeetria jälle taastada. Kuna ühel hetkel peavad vabad ruudud otsa saama ja täielikult kaetud mängulaud on sümmeetriline, kindlustab see strateegia alustaja võidu.

Esimese hooga tundub, et juhul kui m ja n on eri paarsusega, saab sarnast strateegiat kasutada alustaja vastane, sest alustaja peab juba oma esimesel käigul sümmeetriat rikkuma ja tema vastane saab selle taastada. Erinevus ülesande a)-osast seisneb aga selles, et järele jääv sümmeetriline kujund võib olla kaetav ühe $1 \times m$ ribaga.

Näiteks kui $n = 5$ ja $m = 2$, võib alustaja esimesel käigul hõivata mängulaua ühest otsast kaks ruutu. Kuidas iganes teisena käija ka ei vastaks, saab alustaja oma teisel käigul viimase(d) vaba(d) ruudu(d) katta.

4.4 Vastus: Maril on võidustrateegia, kui $n \equiv 0 \bmod 3$ või $n \equiv 2 \bmod 3$, Jüril aga siis, kui $n \equiv 1 \bmod 3$.

Kui tagasikäigud poleks lubatud, oleks see ülesanne väga sarnane ülesandega 4.1. Mõlemas ülesandes on olemas ühine ressurss (ühes õunad, teises mängulaua ruudud), mida kumbki mängija tohib vähendada mõne ühiku võrra (ühes mängus $1,2$ või 3, teises 1 või 2). Mängu lõputingimus on veidi erinev, aga see erinevus pole nii suur, et lahenduse põhimõtet muuta. Kui ülesandes 4.1 pidi võitja hoolitsema, et õunte arv jaguks 4-ga, siis siin on oluline mängijate vahele jäävate ruutude arvu jääk jagamisel 3-ga.

Kui algseisus oleks mängijate vahel 0 ruutu või 1 ruut (st $n = 2$ või $n = 3$), saaks Mari võita ühe käiguga. Kui mängijate vahel oleks alguses aga 2 ruutu (st $n = 4$), peaks Mari tegema käigu, mille järel võidab ühe käiguga hoopis Jüri.

Kui mängijate vahel on alguses rohkem ruute ja kui tagasikäigud pole lubatud, saab võitja alati kindlustada, et mängijate vahel olevate ruutude arvu jääk jagamisel 3-ga jääb samaks kui alguses. Niisiis sellises mängus oleks võidustrateegia Maril, kui $n \equiv 0 \bmod 3$ või $n \equiv 2 \bmod 3$, ja Jüril, kui $n \equiv 1 \bmod 3$.

Mida muudab mängus võimalus tagasi käia? Formaalselt teeb niisugune võimalus mängu lõpmatuks, kuid see mägija, kellel on võidustrateegia ilma tagasikäikudeta versioonis, suudab endiselt võidu forsseerida. Kui tema vastane otsustab 1 või 2 ruudu võrra tagasi käia, käib võitja talle sama arvu ruutude võrra lihtsalt järele. Mängijate vahel olevate ruutude arvu jääk jagamisel 3-ga jääb seeläbi endiselt samaks. Samuti on selge, et niimoodi toimides kindlustab võitja mängu lõppemise.[2]

4.5 Nagu aastanumbriülesannetes ikka, pole arv 2008 arvatavasti väga oluline ning lahendust aitab leida väiksemate väärtuste uurimine. Vaatame läbi kuhjade suurused $n = 1,2,3,\ldots$ ja hindame, kas mänguseis kuhjasuurusega n on käigul olijale võidetav või mitte.

- $n = 1$ on käigulolijale kaotatud, sest ta ei saa teha ühtegi käiku.
- $n = 2$ on käigulolijale võidetav, sest $2 \vdots 1$ ja $2 - 1 = 1$, mis toob teisena käijale kaotuse.
- $n = 3$ on käigulolijale kaotatud, sest ainus lubatud käik on võtta 1 kivi ja järele jääb hunnik 2 kiviga, milles teisena käija võidab.
- $n = 4$ on käigulolijale võidetav, sest $4 \vdots 1$ ja $4 - 1 = 3$, mis toob teisena käijale kaotuse.

Tekib hüpotees, et paarisarvulise suurusega kuhja korral võidab alustaja, paarituarvulise suurusega kuhja korral aga tema vastane. Selle hüpoteesi tõestamiseks põhjendame järgmised väited.

- *Kui n on paarisarv, saab käigulolija käigu teha nii, et kuhja jääb alles paaritu arv kive.* Kuna $n \vdots 1$ ja $n - 1$ on paaritu, on see väide tõene.
- *Kui n on paaritu, siis kas $n = 1$ või jääb ühe käigu järel kuhja kindlasti paarisarv kive.* Kui $n > 1$ on paaritu, on ka kõik tema tegurid m paaritud, mistõttu $n - m$ on alati paaris.

[2] Formaalselt on languse printsiibi rakendamiseks vaja rangelt vähenevat mittenegatiivset täisarvulist suurust. Selleks sobib mängijate vahelise kauguse summa kaotaja kaugusega mängulaua otsast.

Kuna iga käiguga kivide arv kuhjas väheneb, peab mäng kindlasti lõppema. Niisiis viib kirjeldatud strateegia alustaja Joosepi võidule, sest 2008 on paarisarv.

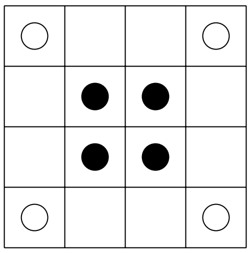
4.6 Vastus: a) Miku, b) Juku.

Jälle on tegemist ülesandega, mille võtmeks on vaadelda vabade ruutude arvu jaguvust teatud mooduli suhtes. Sobivaks mooduliks osutub 3.

Ülesande a)-osas jagub mängulaua tühjade ruutude arv 36 alguses 3-ga. Oma käigul peab Juku jätma alles 3-ga mittejaguva arvu vabasid ruute, sest 1, 2 ega 4 ei jagu 3-ga. Miku omakorda saab tühjade väljade arvu 3-ga jaguvuse taastada, valides vastavalt vajadusele kas 1 või 2 nupu käimise. Mäng peab kindlasti lõppema, sest tähjade väljade arv kahaneb igal käigul. Kuna $0 \vdots 3$, jääb kirjeldatud strateegia korral viimane käik Mikule.

Ülesande b)-osas saab Juku panna esimesel käigul lauale 1 kivi. Kuna allesjäävate tühjade ruutude arv $8 \cdot 8 - 1 = 63$ jagub 3-ga, saab ta edaspidi kasutada sama strateegiat, kui Miku a)-osas.

Paneme muide tähele, et sümmeetriline strateegia ei vii selles ülesandes lihtsal moel sihile. Näiteks 4×4 laual võiks Juku küll esimesel käigul hõivata 4 keskmist ruutu, aga Miku saab omakorda nurgaruutudele käies sümmeetria säilitada.



Me muidugi teame ülaltoodud lahendusest, et see seis on endiselt Jukule võidetav, aga sümmeetriakaalutlused meid selle põhjendamisel ei aita.

4.7 Vastus: 2.

Värvime ruudustiku lõpmatus malekorras mustaks ja valgeks. Kui Jaagul on ainult üks nupp, mis algseisus asub sama värvi ruudul kui Jüri oma, satub Jaak oma käigu järel nupuga alati Jüri ruuduga vastandvärvi ruudule. Niisiis ei saa Jaak mängu kunagi lõpetada.

Kui Jaagul on (vähemalt) kaks nuppu, saab ta alati saavutada olukorra, kus üks tema nuppudest on tema käigu alguses Jüri nupuga vastandvärvi väljal. Kui see mängu alguses juba nii ei ole, teeb Jaak ühe nupuga suvalise ootekäigu ning pärast Jüri käiku on Jüri nupp ja Jaagu teine nupp vastandvärvi väljadel. Edasi käib Jaak ainult selle teise nupuga. Iga Jaagu käigu järel on see nupp ja Jüri nupp sama värvi väljal. Jääb näidata, et Jaak saab oma käike nii korraldada, et ta jõuab lõpuks Jüriga samale väljale.

Viime ruudustikul sisse ristkoordinaadid. Iga ruutu saame siis identifitseerida täisarvuliste koordinaatide paariga. Kui Jaagu nupp asub ruudul koordinaatidega (a, b) ning Jüri nupp ruudul koordinaatidega (c, d), nimetame nende nuppude vaheliseks *kauguseks* suurust[3]

$$|a-c|+|b-d|.$$

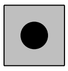
Pärast Jüri käiku on nuppudevaheline kaugus alati paaritu ja pärast Jaagu käiku paaris. Jaagu eesmärk on see kaugus 0-ks muuta.

Paneme tähele, et kui pärast Jüri käiku on vaadeldav kaugus 1 või 3, saab Jaak oma järgmisel käigul mängu lõpetada (vajadusel korra tühjalt edasi-tagasi käies). Kui nuppudevaheline kaugus pärast Jüri käiku on 5 või rohkem, saab Jaak kaugust 3 võrra vähendada. Jüri omakorda saab oma käigul nuppudevahelist kaugust kas 1 võrra suurendada või 1 võrra vähendada. Kokkuvõttes saab Jaak tagada, et kui mõlemad mängijad teevad ühe käigu, väheneb nuppudevaheline kaugus vähemalt 2 võrra. Languse printsiibi (vt jaotis 2) põhjal ei saa mäng seega lõpmatult kesta.

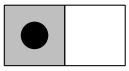
4.8 Vastus: võitev strateegia on alati hundil.

Selleks, et saada aru, mis ülesandes toimub, hakkame väikeseid mängulaudu läbi vaatama.

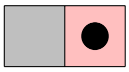
Kui laud koosneb ühest väljast, võidab hunt esimesel käigul:



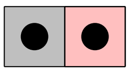
Kui laual on kaks välja, näeb seis pärast hundi esimest käiku välja selline (väljade kuju ega omavaheline paigutus pole ülesandes tegelikult olulised):



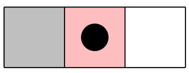
Seepeale saab rebane käia vabale väljale, eemaldades muuhulgas hundi käidud mängunupu:



Hundile jääb üks käik, pärast mida on mängulaud nuppe täis ja keegi enam käia ei saa. Niisiis võidab ka sel juhul hunt.

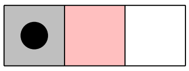


Kui laud koosneb kolmest väljast, on esimesed kaks käiku põhimõtteliselt samad kui eelmisel juhul, pärast mida näeb mängulaud välja selline:

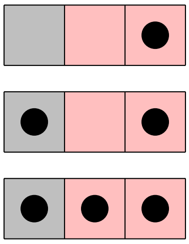


Nüüd on hundil valik. Ta võib käia hallile ruudule

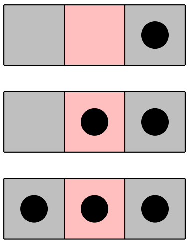
[3] Seda suurust nimetatakse matemaaatikas ka *Manhattani kauguseks*. Nimi pärineb New York'i linnaosalt, kus tänavad jooksevad üksteisega risti nii, et moodustuvad ristkülikukujulised kvartalid. Manhattani kaugus vastab siis nende tänavaõikude arvule, mis tuleb läbida, et lühimat teed pidi ühelt tänavanurgalt mingile teisele jõuda.



pärast mida saab rebane käia valgele väljale ning hunt kaotab forsseeritult kahe käigu pärast:



Oma teisel käigul saab hunt aga käia ka vabale ruudule, pärast mida võidab ta hoopis ise kahe käigu pärast:



Nüüd hakkab välja kooruma hundi võitva strateegia idee: alati kui võimalik, peab ta hõivama valge välja. Kui valgeid välju enam ei jää, peab hunt muidugi käima vabadele hallidele väljadele seni, kuni neid on. Näitame, et see strateegia viib hundi alati võidule.

Eristame mängus kahte faasi – esimest, kus mängulaual leidub veel valgeid välju, ja teist, kus kõik väljad on ära värvitud. On selge, et kumbki faas ei saa kesta lõpmatult. Esimeses faasis väheneb valgete väljade arv hundi igal käigul vähemalt ühe võrra, teises faasis aga mängunuppe laualt enam ei eemaldata, nii et lõpuks peab kellelgi saabuma käigupuudus.

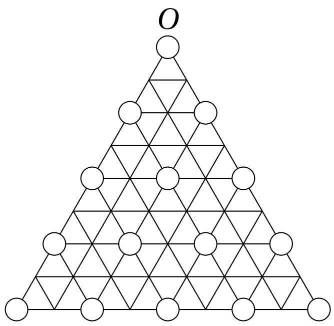
Kuna hunt käib esimesena ja hõivab võimalusel alati valge välja, on esimeses faasis mängulaual kogu aeg halle välju vähemalt sama palju kui punaseid. See tähelepanek kehtib muuhulgas siis, kui rebane hõivab viimase valge välja. Pärast niisugust käiku on kõik väljad värvitud, viimasel punasel väljal on rebase mängunupp ja ülejäänud väljad on tühjad. See tähendab, et vabasid halle välju on rohkem kui punaseid, mistõttu käigupuudusesse satub rebane.

Kui esimese faasi viimase käigu teeb hunt, on halle välju punastest vähemalt ühe võrra rohkem (sest vahetult enne hundi viimast käiku pidi halle välju olema vähemalt sama palju kui punaseid). Järelikult satub käigupuudusesse jälle rebane vaatamata sellele, et esimese faasi lõpus on üks hall väli mängunupu poolt juba hõivatud.

4.9 Vastus: Ottol on võitev strateegia.

Ülesandes kirjeldatud mäng on küll lõplik (sest väikeste kolmnurkade külgi on lõplik arv), aga võib lõppeda viigiga, kui tekib mõlemapoolne käigupuudus ilma tippu O jõudmata. Niisiis ei piisa teoreemi 4.1 abil strateegia võitvuse tõestamiseks pelgalt sellest, kui näitame, et mängija ei saa kaotada. Lisaks peab strateegia võimaldama tõestust, et mäng ei lõppe viigiga.

Selleks, et saada aimu, mis ülesandes toimub, proovime läbi väiksemaid mängulaudu. Kui suure kolmnurga küljepikkus on 1, võidab Triin forsseeritult. Kui suure kolmnurga küljepikkus on aga 2, suudab Otto endale võidu kindlustada, kui ta käib igal võimalusel mängulaua nurka. Siit tekib mõte märkida Otto jaoks ka ülesandes antud mängulaual ära positsioonid “üle ühe”, vt joonist.



Kujundame Ottole strateegia, mille järgi ta liigub alati sama vektori võrra kui Triin eelnenud käigul. Nii toimides käib Otto alati märgitud positsioonile, sundides Triinu käima märkimata positsioonidele. Kuna tuldud teed tagasi käia ei tohi, on Ottol oma käigu tegemiseks alati ülimalt üks valik. Teisest küljest toimuvad Triinu ja Otto käigud alati paarikaupa ning kui üks lõik paarist oli Triinu käiguks saadaval, peab ka teine lõik olema Otto käigu jaoks veel kasutamata. Niisiis ei jää Otto oma strateegiaga käigupuudusesse. Lisaks käib ainult Otto märgitud positsioonidele, nii et kui keegi kunagi tippu O tagasi jõuab, peab see olema tema.

Jääb veel tõestada, et ka Triin ei saa käigupuudusesse jääda. Selleks paneme tähele, et iga märgitud positsiooniga on seotud paarisarv lõike $(2, 4$ või $6)$. Kui Otto käib mõnele märgitud positsioonile peale O, on selleks hetkeks ära kasutatud paaritu arv selle positsiooniga seotud lõikudest. Niisiis saab ka Triin alati järgmise käigu teha.

4.10 Vastus: võitev strateegia on alustaja vastasel.

Kui lahendamisega kusagilt peale ei oska hakata, tasub alati proovida mõnda väikest n-i väärtust. $n = 1$ puhul on üldse ainult paar erinevat varianti ning neid uurides selgub, et teisena käija saab endale alati võidu kindlustada (mõtle need variandid iseseisvalt läbi!).

$n = 2$ korral läheb aga mängulaud täielikuks läbivaatuseks juba liiga suureks. Äkki õnnestub siiski näidata, et teisena käija võidab suvalise suurusega laual? Selleks piisab, kui esitame strateegia, mis kindlustab, et ta ei jää käigipuudusesse.

Lahenduse võtmeks on tähelepanek, et mängulaual on iga n-i korral paaritu arv välju (keskmine väli ja tema ümber n “kihti”, milles igaühes on 6-ga jaguv arv välju). Kõik mängulaua väljad peale algse nurga saab jagada paaridesse nii, et paarilised on omavahel lõiguga ühendatud. Selleks on palju võimalusi. Võib valida mõne nurgaruudust algava ja mööda lõike kulgeva tee, mis läbib kõik väljad; näiteks spiraalis kuni keskmise väljani. Seejärel paneme valitud teel paari 2. ja 3. välja, 4. ja 5. välja jne.

Kui esimene mängija käib mõnele vabale väljale, vastab teine käiguga selle välja paarilisele. Nii kindlustab teine mängija endale alati käigu ja koos sellega ka võidu.

4.11 Vastus: kui n on paaritu, võidab alustaja, kui n on paaris, siis alustaja vastane.

Paneme kõigepealt tähele, et lubatud käikude sooritamisel mustaks värvitud ruutude arv alati kasvab. Seega mäng kindlasti lõppeb, mistõttu ühel mängijal peab teoreemi 4.1 põhjal olema võitev strateegia. Sobivat strateegiat aitavad leida sümmeetriakaalutlused.

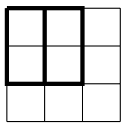
Kui n on paaritu, võib alustaja oma esimesel käigul värvida mustaks keskmise ruudu. Edaspidi saab alustaja vastase käikudele alati vastata nii, et tema käigu järel on mänguseis tsentraalsümmeetriline ning keskmine ruut on must. Tõepoolest, kui vastase käik ei mõjuta keskmist ruutu, jääb see mustaks ning alustajal on kindlasti olemas sümmeetriline vastus. Kui aga vastane teeb käigu, mis muudab keskmise ruudu valgeks, peab see käik olema tehtud kas mööda keskmist rida või veergu. Mõlemal juhul on saadav seis tsentraalsümmeetriline ning keskmine ruut on valge. Nüüd saab alustaja keskmise ruudu mustaks värvida ja tema poolt soovitav tingimus on jälle täidetud.

Kui n on paaris, on strateegia veel lihtsam – alustaja vastane saab alati teha alustaja käiguga tsentraalsümmeetrilise käigu ja kindlustada nii, et ta ei kaota. Kuna mäng peab ühel hetkel lõppema kellegi võiduga, saab sel juhul võitjaks olla ainult alustaja vastane.

4.12 Vastus: a) Kalle, b) Kalle, c) Juku.

Kuna mängu käigus koogitükkide arv rangelt väheneb, on mäng lõplik. Teoreemi 4.1 alusel piisab võitmiseks sellest, kui mängija suudab kaotust vältida.

a) On lihtne näha, et iga Juku avakäigu peale saab Kalle teha niisuguse käigu, et selle tulemusena on ühest nurgast söödud 2×2 tükk.



Kuidas iganes Juku nüüd ka ei vastaks, jääb Kallele veel täpselt üks käik. Seejärel on söödud 8 ruudukest, mistõttu Juku ei saa enam käia ja kaotab.

b) Kalle saab kasutada tsentraalsümmeetrilist strateegiat. Kuivõrd 2004×2004 koogi keskpunkt ei asu ühegi 1×2 tüki sees, peab Juku käiguga tsentraalsümmeetriline tükk alati Kalle jaoks vaba olema. Kokkuvõttes saab Kalle sellise strateegiaga kindlustada, et tema käik ei jää viimaseks.

c) 2004×2005 koogi keskpunkt aga on ühe 1×2 tüki keskpunktiks. Juku võib esimesel käigul süüa selle tüki ning kasutada edaspidi hoopis ise tsentraalsümmeetrilist strateegiat, tagades sellega, et tema ükski käik ei jää viimaseks.

Seda mängu tuntakse kombinatoorses mänguteoorias nime *cram* all ja tema lahendus juhu jaoks, kus mängulaua mõlemad küljepikkused on paaritud, on üllatavalt keeruline. 2009. aastal lahendas Martin Schneider mängu 3×9 ja 5×7 laudade korral. 2010. aastal said Julien Lemoine ja Simon Viennot lahenduse 5×9 ja 7×7 laudade ning 2020. aastal Jos Uiterwijk 5×11 ja 3×21 laudade jaoks. Üldine lahendus aga ootab siiani avastajat!