38. Meetrilised seosed kolmnurgas

Kolmnurk on üks lihtsamaid geomeetrilisi objekte (ainult kolm tippu ja kolm külge, kui keeruline ta ikka olla saab!). Näilisele lihtsusele vaatamata peidab kolmnurk endas ammendamatus koguses seoseid ja omadusi, mis võistlusülesannete loojatele palju inspiratsiooni pakuvad.

Selles peatükis keskendume ülesannetele, mis seovad omavahel mõõdetavaid väärtusi, (lõikude pikkused, nurgad, pindalad jmt). Sissejuhatuseks vaatame üle mõned olulisemad tulemused, mida matemaatikavõistlustel ikka ja jälle tarvis läheb. Nende tulemuste sõnastustes ja tõestustes tähistavad A, B ja C kolmnurga tippe, a, b ja c nende tippude vastaskülgede pikkusi, α, β ja γ vastavate nurkade suurusi, S kolmnurga pindala, p poolümbermõõtu ning r ja R vastavalt sise- ja ümberringjoone raadiust.

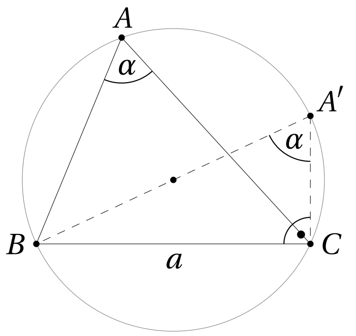
Teoreem 38.1 (Siinusteoreem) Igas kolmnurgas kehtivad võrdused

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R.$$

Tõestus. Tõestame võrduse $a = 2R\sin\alpha$. Teiste külje-nurga paaride jaoks on vastava võrduse tõestus analoogiline ning neist võrdustest järeldub teoreemi väide.

Kõigepealt paneme tähele, et kui $\alpha = 90^\circ$, siis väide kehtib tänu Thalese teoreemi pöördteoreemile (vt teoreem 27.3). Tõepoolest, ühest küljest siis $\sin\alpha = 1$, teisest küljest aga on nurga α poolt piiratud ümberringjoone kõõl a ühtlasi selle ringjoone diameetriks, mistõttu $a = 2R = 2R\sin\alpha$.

Vaatleme nüüd juhtu, kus α on teravnurk. Tähistagu A' tipust B ümberringjoonele tõmmatud diameetri teist otspunkti (erijuhul võib olla $A = A'$).

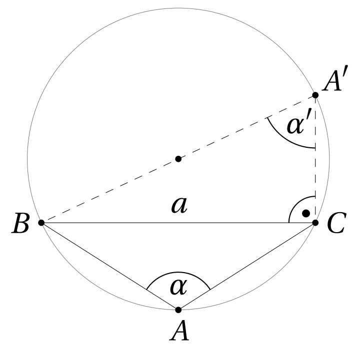


Kuna punktid A, B, C ja A' asuvad ühel ringjoonel, saame $\angle CA'B = \angle CAB = \alpha$ (vt teoreem 28.2). Kuivõrd $A'B$ on diameeter, teame Thalese teoreemist, et kolmnurk $A'BC$ on täisnurkne, seega

$$\sin\alpha = \sin\angle CA'B = \frac{|BC|}{|A'B|} = \frac{a}{2R},$$

mida oligi tarvis tõestada.

Kui α on nürinurk, vaatleme samuti tipust B ümberringjoonele tõmmatud diameetri teist otspunkti A' ja tähistame $\alpha' = \angle CA'B$.



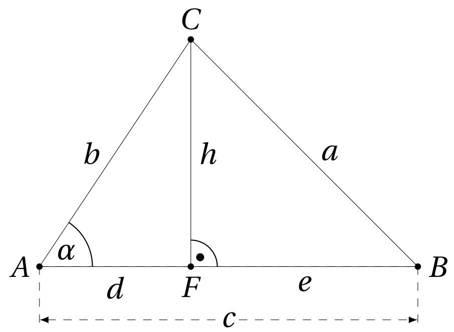
Nüüd saame teoreemist 28.2, et $\alpha + \alpha' = 180°$. Järelikult $\sin\alpha = \sin\alpha'$ ning tõestuse saab lõpetada analoogiliselt teravnurkse juhuga. □

Teoreem 38.2 (Koosinusteoreem) Igas kolmnurgas kehtivad võrdused

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha,$$
$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos\beta,$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma.$$

Tõestus. Tõestame esimese võrduse; teiste võrduste tõestus on analoogiline.

Tõmbame tipust C küljele AB kõrguse pikkusega h. Vaatleme kõigepealt juhtu, kus kõrguse aluspunkt F satub küljele AB ning jaotab selle külje lõikudeks pikkustega d ja e.



Täisnurksetes kolmnurkades BCF ja AFC saame kasutada Pythagorase teoreemi:

$$a^2 = h^2 + e^2,$$
$$b^2 = h^2 + d^2.$$

Lahutame esimesest võrdusest teise:

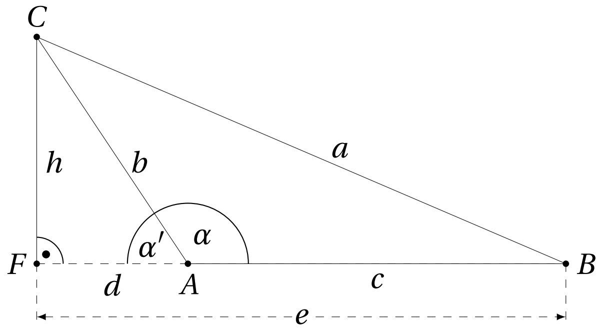
$$a^2 - b^2 = e^2 - d^2\,,$$
$$a^2 = b^2 + (e-d)(e+d)\,.$$

Kuna $d + e = c$, saame $e - d = c - 2d$ ja kokkuvõttes ka nõutud võrduse

$$a^2 = b^2 + (e-d)(e+d) = b^2 + (c-2d)c = b^2 + c^2 - 2cd = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha\,,$$

sest $d = b\cos\alpha$. Paneme tähele, et see tõestus töötab ka erijuhul, kus $\alpha = 90°$, st $A = F$ ja $d = 0$. Sisuliselt taandub koosinusteoreem täisnurkse kolmnurga jaoks lihtsalt Pyrhagorase teoreemile.

Vaatleme järgmiseks juhtu, kus kõrguse aluspunkt F satub lõigu AB pikendusele üle punkti A. Tähistame lõigud nii nagu joonisel näidatud. Lisaks tähistame $\alpha' = \angle FAC = 180° - \alpha$.



Analoogiliselt ülaltehtuga saame täisnurksetest kolmnurkadest BCF ja AFC

$$a^2 = h^2 + e^2\,,$$
$$b^2 = h^2 + d^2\,.$$

Lahutame esimesest võrdusest teise:

$$a^2 - b^2 = e^2 - d^2\,,$$
$$a^2 = b^2 + (e-d)(e+d)\,.$$

Kuna praegusel juhul $d + c = e$, saame $e - d = c$, $e + d = c + 2d$ ja kokkuvõttes ka nõutud võrduse

$$a^2 = b^2 + (e-d)(e+d) = b^2 + c(c+2d) = b^2 + c^2 + 2cd = b^2 + c^2 + 2bc\cos\alpha' =$$
$$= b^2 + c^2 + 2bc\cos(180° - \alpha) = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha\,,$$

sest $d = b\cos\alpha'$.

Kui tipust C tõmmatud kõrguse aluspunkt satub punktile B või lõigu AB pikendusele üle punkti B, peab tipu B juures asuma kolmnurga ABC suurim nurk. See omakorda tähendab, et tipust B küljele AC tõmmatud kõrguse aluspunkt peab asuma külje AC sisepiirkonnas. Nüüd saame tippude B ja C ning külgede b ja c rolle vahetades kasutada tõestuse esimeses osas toodud arutelu ning näidata, et

$$a^2 = c^2 + b^2 - 2cb\cos\alpha = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha\,.$$

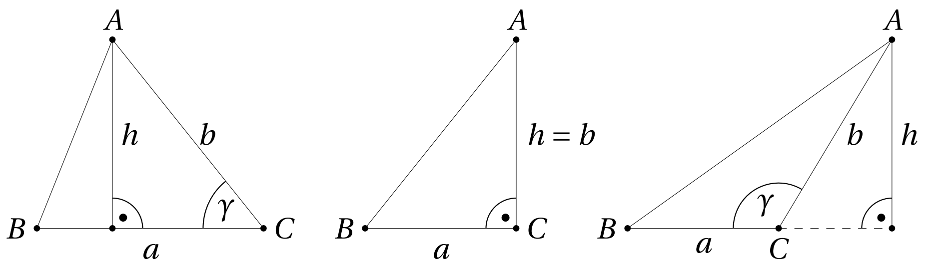
□

Võistlusülesannetes tuleb sageli leida või kasutada kolmnurkade pindalasid. Peale põhivalemi $S = \dfrac{ah}{2}$ on kasulik teada veel teisigi valemeid.

Teoreem 38.3 Kolmnurga pindala jaoks kehtivad järgmised seosed:

1. $S = \dfrac{1}{2}ab\sin\gamma$, $S = \dfrac{1}{2}bc\sin\alpha$, $S = \dfrac{1}{2}ca\sin\beta$,
2. $S = pr$,
3. $S = \dfrac{abc}{4R}$,
4. $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ (Heroni valem).

Tõestus. 1. Tõestame võrduse $S = \dfrac{1}{2}ab\sin\gamma$; teiste võrduste tõestus on analoogiline. Tõmbame tipust A küljele BC kõrguse pikkusega h. Paneme tähele, et $h = b\sin\gamma$ sõltumata sellest, kas γ on terav-, täis- või nürinurk.

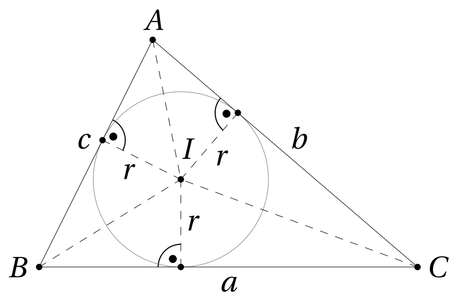


Niisiis

$$S = \frac{ah}{2} = \frac{ab\sin\gamma}{2},$$

mida oligi tarvis tõestada.

2. Olgu I kolmnurga ABC siseringjoone keskpunkt.



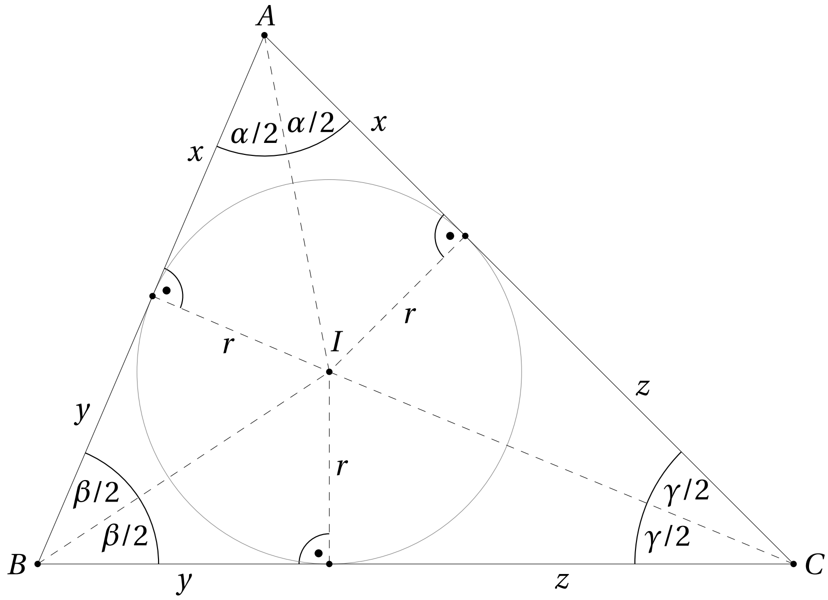
Avaldame kolmnurga ABC pindala kolmnurkade BCI, CAI ja ABI pindalade summana:

$$S = S_{BCI} + S_{CAI} + S_{ABI} = \frac{ar}{2} + \frac{br}{2} + \frac{cr}{2} = \frac{a+b+c}{2} \cdot r = pr.$$

3. Kasutame praeguse teoreemi 1. osa ja siinusteoreemi, mille põhjal $\sin\gamma = \dfrac{c}{2R}$:

$$S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma = \frac{1}{2}ab \cdot \frac{c}{2R} = \frac{abc}{4R}.$$

4. Olgu I jälle kolmnurga ABC siseringjoone keskpunkt ning olgu x, y ja z vastavalt tippudest A, B ja C siseringjoonele tõmmatud puutujalõikude pikkused. Samuti teame, et AI, BI ja CI on vastavate nurkade poolitajad.



Näeme, et kehtivad võrdused

$$\begin{aligned} y+z&=a, \\ z+x&=b, \\ x+y&=c. \end{aligned}$$

Nende võrduste liitmisel saame

$$2x+2y+2z=a+b+c \quad \text{ehk} \quad x+y+z=\frac{a+b+c}{2}=p.$$

Järelikult

$$\begin{aligned} x&=(x+y+z)-(y+z)=p-a, \\ y&=(x+y+z)-(z+x)=p-b, \\ z&=(x+y+z)-(x+y)=p-c. \end{aligned}$$

Kuna $\alpha+\beta+\gamma=180^\circ$, siis $\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}+\frac{\gamma}{2}=90^\circ$, millest omakorda saame $\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}=90^\circ-\frac{\gamma}{2}$. Kasutame nurkade summa tangensi valemit:

$$\tan\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}\right)=\frac{\tan\frac{\alpha}{2}+\tan\frac{\beta}{2}}{1-\tan\frac{\alpha}{2}\cdot\tan\frac{\beta}{2}}.$$

Teisest küljest

$$\tan\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}\right)=\tan\left(90^\circ-\frac{\gamma}{2}\right)=\frac{\sin\left(90^\circ-\frac{\gamma}{2}\right)}{\cos\left(90^\circ-\frac{\gamma}{2}\right)}=\frac{\cos\frac{\gamma}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}}=\frac{1}{\tan\frac{\gamma}{2}}.$$

Järelikult

$$\frac{\tan\frac{\alpha}{2}+\tan\frac{\beta}{2}}{1-\tan\frac{\alpha}{2}\cdot\tan\frac{\beta}{2}}=\frac{1}{\tan\frac{\gamma}{2}},$$

$$\tan\frac{\gamma}{2}\cdot\left(\tan\frac{\alpha}{2}+\tan\frac{\beta}{2}\right)=1-\tan\frac{\alpha}{2}\cdot\tan\frac{\beta}{2},$$

$$\tan\frac{\alpha}{2}\cdot\tan\frac{\beta}{2}+\tan\frac{\beta}{2}\cdot\tan\frac{\gamma}{2}+\tan\frac{\gamma}{2}\cdot\tan\frac{\alpha}{2}=1.$$

Ülaltehtud jooniselt näeme, et

$$\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{r}{x},\quad \tan\frac{\beta}{2}=\frac{r}{y}\quad \text{ja}\quad \tan\frac{\gamma}{2}=\frac{r}{z}.$$

Asendades need väärtused tuletatud võrdusesse, saame

$$\frac{r}{x}\cdot\frac{r}{y}+\frac{r}{y}\cdot\frac{r}{z}+\frac{r}{z}\cdot\frac{r}{x}=1,$$

$$r^2z+r^2x+r^2y=xyz,$$

$$(x+y+z)r^2=xyz,$$

$$pr^2=xyz,$$

$$p^2r^2=pxyz.$$

Teoreemi 2. osast teame, et $S=pr$, järelikult

$$S=\sqrt{pxyz}=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

mida oligi tarvis tõestada.

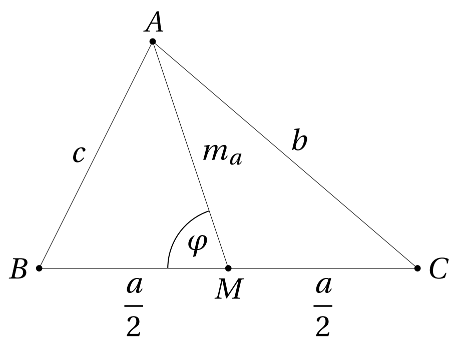
□

Vahel on kasulik teada, kuidas avaldub mediaani pikkus kolmnurga külgede pikkuste kaudu. Alljärgnev teoreem on näide tulemusest, mida autor ei soovita lugejal mehaaniliselt pähe õppida. Pigem tasub meelde jätta tõestus, et siis vajalikud valemid ühe minutiga käigu pealt uuesti tuletada.

Teoreem 38.4 Olgu m_a, m_b ja m_c vastavalt külgedele pikkustega a, b ja c tõmmatud mediaanide pikkused. Siis kehtivad seosed

$$m_a^2=\frac{b^2+c^2}{2}-\frac{a^2}{4},\quad m_b^2=\frac{c^2+a^2}{2}-\frac{b^2}{4}\quad \text{ja}\quad m_c^2=\frac{a^2+b^2}{2}-\frac{c^2}{4}.$$

Tõestus. Tõestame esimese võrduse; ülejäänud võrduste tõestus on analoogiline. Olgu M külje BC keskpunkt M ning $\angle BMA=\varphi$. Siis $\angle CMA=180^\circ-\varphi$



Koosinusteoreem kolmnurkades ABM ja ACM annab vastavalt

$$\begin{aligned} c^2 &= \left(\frac{a}{2}\right)^2 + m_a^2 - 2 \cdot \frac{a}{2} \cos\varphi, \\ b^2 &= \left(\frac{a}{2}\right)^2 + m_a^2 - 2 \cdot \frac{a}{2} \cos(180^\circ - \varphi) = \\ &= \left(\frac{a}{2}\right)^2 + m_a^2 + 2 \cdot \frac{a}{2} \cos\varphi. \end{aligned}$$

Neid võrdusi liites saame

$$b^2 + c^2 = \frac{a^2}{2} + 2m_a^2,$$

millest omakorda

$$m_a^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4},$$

nagu oligi tarvis tõestada. □

Ülesanded

Ülesanne 38.1 (Piirkonnavoor 1997, 9. klass) Avalda võrdhaarse täisnurkse kolmnurga pindala S selle kolmnurga siseringjoone raadiuse r kaudu.

Ülesanne 38.2 (Lõppvoor 2022, 10. klass) Teravnurkse kolmnurga ABC ümberringjoone raadius on R ning kõrguste lõikepunkt on H. Tõesta, et $|AH|^2 + |BC|^2 = 4R^2$.

Ülesanne 38.3 (Lõppvoor 2997, 11. klass) Kolmnurga külgede pikkused a, b ja c rahuldavad võrdust

$$\frac{a^3 + b^3 + c^3}{a + b + c} = c^2.$$

Leia külje c vastas asuva nurga suurus.

Ülesanne 38.4 (Piirkonnavoor 2004, 11. klass) Täisnurkse kolmnurga kaatetitele tõmmatud mediaanide pikkused on $\sqrt{2}$ ja $\sqrt{3}$. Leia selle kolmnurga hüpotenuusi pikkus.

Ülesanne 38.5 (Piirkonnavoor 2000, 11. klass) Täisnurkse kolmnurga ABC siseringjoon puutub hüpotenuusi AB punktis D. Tõesta, et kolmnurga ABC pindala on võrdne lõikude AD ja BD pikkuste korrutisega.

Ülesanne 38.6 (Piirkonnavoor 1996, 12. klass) Kolmnurga sise- ja ümberringjoone raadiused on vastavalt r ja R ning selle külgede pikkused $a < b < c$ on mingi aritmeetilise jada järjestikusteks liikmeteks. Tõesta, et $rR = \frac{ac}{6}$.

Ülesanne 38.7 (Lõppvoor 1993, 10. klass) Täisnurkse kolmnurga siseringjoone raadius on r ja hüpotenuusile tõmmatud kõrgus on h. See kõrgus jaotab antud kolmnurga kaheks kolmnurgaks, mille siseringjoonte raadiused on vastavalt r_1 ja r_2. Tõesta, et:

a) $r_1 + r_2 + r = h$;

b) $r_1^2 + r_2^2 = r^2$.

Ülesanne 38.8 (Lõppvoor 1994, 11. klass) Tõesta, et mistahes kolmnurga korral kehtib samasus
$$\frac{R}{r}=\frac{\cot\frac{\alpha}{2}+\cot\frac{\beta}{2}}{2\sin\gamma},$$
kus α,β,γ on selle kolmnurga nurgad ning R ja r vastavalt tema ümber- ja siseringjoone raadiused.

Ülesanne 38.9 (Lõppvoor 2017, 12. klass) Tõesta, et igas kolmnurgas leidub mediaan, mille pikkuse ruut on vähemalt $\sqrt{3}$ korda suurem selle kolmnurga pindalast.

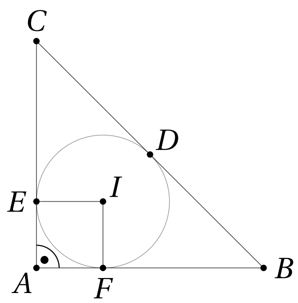
Ülesanne 38.10 (Lõppvoor 2011, 11. klass) Kolmnurga ABC tipust C tõmmatud mediaani aluspunkt on M. Tõesta, et kolmnurga ACM ümberringjoone raadiuse ja tipust M tõmmatud kõrguse korrutis võrdub kolmnurga BCM ümberringjoone raadiuse ja tipust M tõmmatud kõrguse korrutisega.

Vaata ka ülesandeid 23.12 ja 37.23.

Lahendused

38.1 Vastus: $(3+2\sqrt{2})r^2$.

Olgu vaadeldav kolmnurk ABC, tema siseringjoone keskpunkt I ning siseringjoone puutepunktid külgedega D,E ja F. Teeme joonise.



Kuna $\angle EAF=\angle AFI=\angle IEA=90^\circ$ ja $|IE|=|IF|=r$, on $AFIE$ ruut küljepikkusega r. Puutujalõikude võrdusest teame, et $|BD|=|BF|$ ning $|CD|=|CE|$. Kuna lisaks $|AB|=|AC|$, saame ka $|CE|=|CA|-r=|BA|-r=|BF|$. Kokkuvõtteks on lõikude BD, BF, CD ja CE pikkused võrdsed; tähistame seda pikkus x. Järelikult $|BC|=2x$ ning $|AC|=|BC|=r+x$. Pythagorase teoreemist saame nüüd

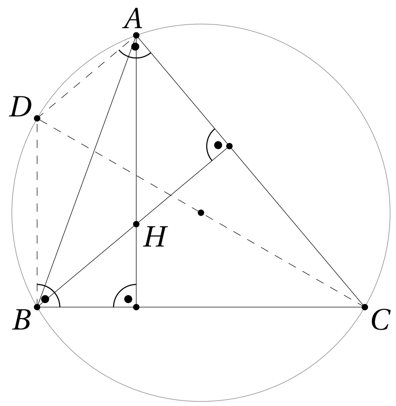
$$\begin{aligned}|BC|^2&=|AB|^2+|AC|^2,\\(2x)^2&=2(r+x)^2,\\4x^2&=2r^2+4rx+2x^2,\\2x^2-4rx-2r^2&=0,\\x^2-2rx-r^2&=0.\end{aligned}$$

Ruutvõrrandi lahendamine annab $x=r\pm\sqrt{r^2+r^2}=(1\pm\sqrt{2})r$. Lahend $(1-\sqrt{2})r$ on negatiivne, seega jääb järele ainult võimalus $x=(1+\sqrt{2})r$.

Nüüd saame leida kolmnurga pindala:

$$S = \frac{|AB|\cdot|AC|}{2} = \frac{(r+(1+\sqrt{2})r)^2}{2} = \frac{((2+\sqrt{2})r)^2}{2} = \frac{(4+4\sqrt{2}+2)r^2}{2} = (3+2\sqrt{2})r^2.$$

38.2 Paneme tähele, et $4R^2 = (2R)^2$, mis on diameetri pikkuse ruut. See viib mõttele täiendada joonist diameetriga ja otsida võimalust kasutada Pythagorase teoreemi. Olgu näiteks tipust C kolmnurga ümberringjoonele tõmmatud diameetri teine otspunkt D.



Nurgad CBD ja DAC on tänu Thalese teoreemile diameetrile toetuvate piirdenurkadena täisnurgad. Kuna AH ja BH on kõrgused ning vastavalt risti külgedega BC ja AC, saame $AH \parallel DB$ ja $BH \parallel DA$. Järelikult on $ADBH$ rööpkülik, millest tuleneb, et $|AH| = |DB|$. Kasutades täisnurkses kolmnurgas BCD Pythagorase teoreemi saame

$$|AH|^2 + |BC|^2 = |DB|^2 + |BC|^2 = |CD|^2 = (2R)^2 = 4R^2,$$

mida oligi tarvis tõestada.

38.3 Vastus: 60°.

Teisendame ülesande võrdust:

$$\begin{aligned}
\frac{a^3+b^3+c^3}{a+b+c} &= c^2,\\
a^3+b^3+c^3 &= (a+b+c)c^2,\\
a^3+b^3+c^3 &= ac^2+bc^2+c^3,\\
a^3+b^3-ac^2-bc^2 &= 0,\\
(a+b)(a^2-ab+b^2)-(a+b)c^2 &= 0,\\
(a+b)(a^2-ab+b^2-c^2) &= 0.
\end{aligned}$$

Kuna $a+b>0$, peab kehtima $a^2-ab+b^2-c^2=0$ ehk $c^2=a^2-ab+b^2$.

Koosinusteoreemist teame, et $c^2 = a^2+b^2-2ab\cos\gamma$. Järelikult peab kehtima võrdus $\cos\gamma = \frac{1}{2}$, mistõttu γ kui kolmnurga nurga suuruse ainus võimalik väärtus on 60°.

38.4 Vastus: hüpotenuusi pikkus on 2.

Teoreemist 38.4 teame, et

$$m_a^2 = \frac{b^2+c^2}{2} - \frac{a^2}{4} \quad \text{ja} \quad m_b^2 = \frac{c^2+a^2}{2} - \frac{b^2}{4}.$$

Tähistame antud kolmnurga kaatetid nii, et $a = \sqrt{2}$ ja $b = \sqrt{3}$, siis saame

$$2 = \frac{b^2+c^2}{2} - \frac{a^2}{4},$$
$$8 = 2b^2 + 2c^2 - a^2$$

ja

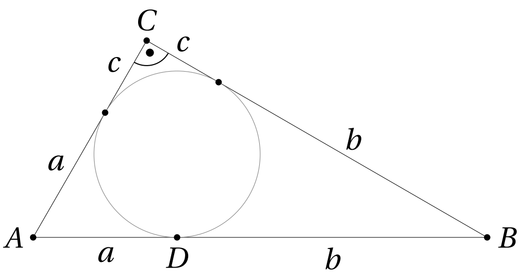
$$3 = \frac{c^2+a^2}{2} - \frac{b^2}{4},$$
$$12 = 2c^2 + 2a^2 - b^2.$$

Tuletatud võrduste liitmine ja Pythagorase teoreemi kasutamine annab

$$20 = a^2 + b^2 + 4c^2 = 5c^2,$$

järelikult $c^2 = 4$, kust omakorda $c = 2$.

38.5 Olgu tippudest A, B ja C siseringjoonele tõmmatud puutujalõikude pikkused vastavalt a, b ja c.



Pythagorase teoreemist saame

$$(a+b)^2 = (a+c)^2 + (b+c)^2,$$
$$a^2 + 2ab + b^2 = a^2 + 2ac + c^2 + b^2 + 2bc + c^2,$$
$$2ab = 2ac + 2bc + 2c^2,$$
$$ab = ac + bc + c^2,$$
$$2ab = ab + ac + bc + c^2 = (a+c)(b+c),$$
$$ab = \frac{(a+c)(b+c)}{2}.$$

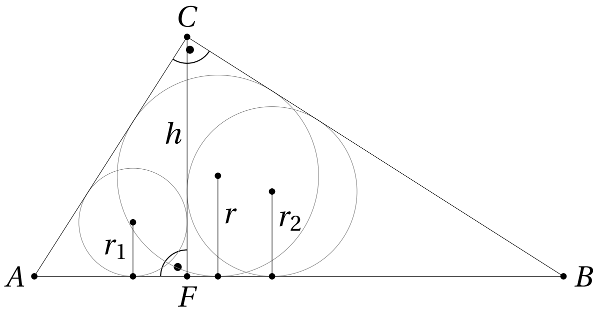
Viimane võrdus aga kujutabki endast ülesande väidet.

38.6 Olgu $p = \frac{a+b+c}{2}$. Kolmnurga pindala valemitest teame siis $pr = S = \frac{abc}{4R}$, millest järeldub $rR = \frac{abc}{4p}$. Ülesande tingimuste põhjal $a + c = 2b$, järelikult $p = \frac{3b}{2}$ ja

$$rR = \frac{abc}{4p} = \frac{abc}{6b} = \frac{ac}{6},$$

mida oligi tarvis tõestada.

38.7 Olgu vaadeldav täisnurkne kolmnurk ABC täisnurgaga tipu C juures ning olgu F tipust C tõmmatud kõrguse aluspunkt. Lihtne on näha, et ABC, ACF ja CBF on täisnurksed kolmnurgad paarikaupa võrdsete teravnurkadega, mistõttu need kolmnurgad on omavahel sarnased.



Kolmnurkade ACF ja ABC sarnasusest saame $\dfrac{r_1}{r} = \dfrac{|AC|}{|AB|}$ ehk $r_1 = r \cdot \dfrac{|AC|}{|AB|}$. Sama moodi järeldub kolmnurkade CBF ja ABC sarnasusest, et $\dfrac{r_2}{r} = \dfrac{|BC|}{|AB|}$ ehk $r_2 = r \cdot \dfrac{|BC|}{|AB|}$.

Ülesande a)-osa avaldist saame seega teisendada järgnevalt:

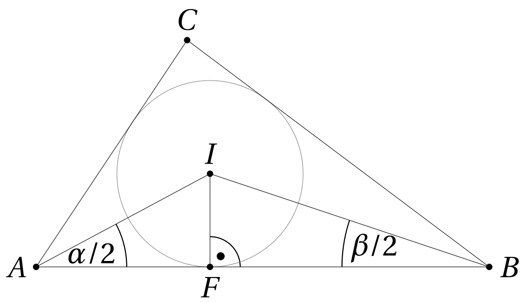
$$r_1 + r_2 + r = r \cdot \frac{|AC|}{|AB|} + r \cdot \frac{|BC|}{|AB|} + r = r \cdot \frac{|AC| + |BC| + |AB|}{|AB|} = \frac{2pr}{|AB|} = \frac{2S_{ABC}}{|AB|} = h,$$

sest $|AC|+|BC|+|AB|$ on kolmnurga ümbermõõt ning teoreemi 38.3 põhjal $S_{ABC} = pr$.

Ülesande b)-osa avaldist saame aga Pythagorase teoreemi abil teisendada niimoodi:

$$r_1^2 + r_2^2 = r^2 \cdot \frac{|AC|^2}{|AB|^2} + r^2 \cdot \frac{|BC|^2}{|AB|^2} = r^2 \cdot \frac{|AC|^2 + |BC|^2}{|AB|^2} = r^2 \cdot \frac{|AB|^2}{|AB|^2} = r^2.$$

38.8 Tähistame kolmnurga tippe A, B ja C, olgu I tema siseringjoone keskpunkt ning F siseringjoone puutepunkt küljega AB. Teeme joonise.



Kuna AI ja BI on vastavalt nurkade CAB ja ABC poolitajad, kehtivad võrdused $\angle IAF = \dfrac{\alpha}{2}$ ja $\angle FBI = \dfrac{\beta}{2}$. Täisnurksetest kolmnurkadest AFI ja BFI saame

$$\cot\frac{\alpha}{2} = \frac{|AF|}{|IF|} = \frac{|AF|}{r} \quad \text{ja} \quad \cot\frac{\beta}{2} = \frac{|FB|}{|IF|} = \frac{|FB|}{r}.$$

Järelikult

$$r\cdot\left(\cot\frac{\alpha}{2}+\cot\frac{\beta}{2}\right)=|AF|+|FB|=|AB|.$$

Teisest küljest teame siinusteoreemist, et $\dfrac{|AB|}{\sin\gamma}=2R$ ehk $|AB|=2R\cdot\sin\gamma$. Kokkuvõtteks saame seose

$$r\cdot\left(\cot\frac{\alpha}{2}+\cot\frac{\beta}{2}\right)=2R\cdot\sin\gamma,$$

millest järeldubki ülesandes nõutud võrdus.

38.9 Olgu külgedele pikkustega a, b ja c tõmmatud mediaanide pikkused vastavalt m_a, m_b ja m_c. Tõestame võrratuse

$$\frac{m_a^2+m_b^2+m_c^2}{3}\geqslant\sqrt{3}S. \tag{38.1}$$

Paneme tähele, et ülesande väide järeldub sellest võrratusest. Tõepoolest, kui kolme arvu aritmeetiline keskmine on mingist väärtusest suurem või võrdne, peab vähemalt üks neist arvudest ka sellest väärtusest suurem või võrdne olema.

Vastavalt teoreemile 38.4 kehtivad võrdused

$$m_a^2=\frac{b^2+c^2}{2}-\frac{a^2}{4},\quad m_b^2=\frac{c^2+a^2}{2}-\frac{b^2}{4}\quad\text{ja}\quad m_c^2=\frac{a^2+b^2}{2}-\frac{c^2}{4}.$$

Nende kolme võrduse liitmine annab

$$m_a^2+m_b^2+m_c^2=\frac{3}{4}(a^2+b^2+c^2).$$

Tõestatav võrratus (38.1) on seega samaväärne võrratusega

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{4}\geqslant\sqrt{3}S,$$

mis Heroni valemi põhjal (vaata teoreemi 38.3) on omakorda samaväärne võrratusega

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{4}\geqslant\sqrt{3}\cdot\sqrt{\frac{a+b+c}{2}\cdot\frac{-a+b+c}{2}\cdot\frac{a-b+c}{2}\cdot\frac{a+b-c}{2}}.$$

Viimase võrratuse mõlemad pooled on positiivsed, niisiis saame mõlemaid pooli ruutu tõstes samaväärse võrratuse

$$\frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{16}\geqslant 3\cdot\frac{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}{16},$$
$$(a^2+b^2+c^2)^2\geqslant 3(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c).$$

Parema poole avaldist lahti korrutades ja sarnaseid liikmeid koondades saame

$$(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)=$$
$$=-a^4-b^4-c^4+2a^2b^2+2b^2c^2+2a^2c^2.$$

(Kontrolli seda võrdust iseseisvalt või spikerda ülesande 37.6 b)-osa lahendusest.)

Niisiis tuleb tõestada võrratus

$$a^4+b^4+c^4+2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2 \geqslant -3a^4-3b^4-3c^4+$$
$$+6a^2b^2+6b^2c^2+6a^2c^2,$$
$$4a^4+4b^4+4c^4 \geqslant 4a^2b^2+4b^2c^2+4a^2c^2.$$

Viimase võrratuse kehtivus aga järeldub otse harjutusest 14.1.

38.10 Olgu kolmnurkade ACM ja BCM pindalad vastavalt S_{ACM} ja S_{BCM}, ümberringjoonte raadiused vastavalt R_1 ja R_2 ning tipust M tõmmatud kõrgused vastavalt h_1 ja h_2. Kuna mediaan jagab kolmnurga kaheks pindvõrdseks kolmnurgaks, teame, et $S_{ACM} = S_{BCM}$. Nende kolmnurkade pindalade valemitest saame seega

$$\frac{|AC| \cdot h_1}{2} = \frac{|BC| \cdot h_2}{2}, \quad \text{millest omakorda} \quad \frac{|AC|}{|BC|} = \frac{h_2}{h_1}.$$

Kolmnurkade ACM ja BCM pindalad saab avaldada ka nende ümberringjoonte raadiuste kaudu teoreemi 38.3 abil, mis annab võrduse

$$\frac{|AC| \cdot |CM| \cdot |MA|}{4R_1} = \frac{|BC| \cdot |CM| \cdot |MB|}{4R_2}.$$

Kuna M on lõigu AB keskpunkt, kehtib $|MA| = |MB|$. Niisiis saame viimase võrduse teisendada kujule

$$\frac{|AC|}{R_1} = \frac{|BC|}{R_2}, \quad \text{millest omakorda} \quad \frac{|AC|}{|BC|} = \frac{R_1}{R_2}.$$

Kokkuvõttes $\frac{h_2}{h_1} = \frac{R_1}{R_2}$, millest järeldubki ülesande väide.