38. Apolloniose ringjoon

Nurgapoolitaja omaduses (vt jaotis 32.1) mängis olulist rolli suhe $\frac{|AB|}{|AC|}$. Siinses jaotises uurime, milliste punktide A korral on see suhe etteantud konstantse suurusega. Tegemist on ilusa ja üllatava tulemusega, mida tundis juba Vana-Kreeka õpetlane Apollonios[1]. Sõnastame ka selle tulemuse omaette teoreemina.

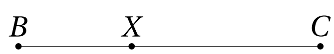
Teoreem 38.1 Olgu antud positiivne reaalarv $k \neq 1$ ja tasandil lõik BC. Nende tasandi punktide A hulk, mille korral

$$\frac{|AB|}{|AC|} = k,$$

moodustab ringjoone, mille keskpunkt asub sirgel BC. Seda ringjoont nimetatakse *Apolloniose ringjooneks.*

Tõestus. Uurime alustuseks, mitu teoreemi võrdust rahuldavat punkti asub sirgel BC. Osutub, et selliseid punkte on täpselt kaks – üks lõigu BC sisepiirkonnas ja teine lõigust BC väljaspool.

Vaatleme kõigepealt lõigu BC sisepiirkonda ja seal punkti X, mis liigub punktist B punkti C. Paneme tähele, et selles protsessis $|XB|$ kasvab ja $|XC|$ kahaneb, mis tähendab, et suhe $\frac{|XB|}{|XC|}$ samuti kasvab. Kui $X = B$, siis $\frac{|XB|}{|XC|} = 0$, aga kui punkt X läheneb C-le, kasvab $\frac{|XB|}{|XC|}$ tõkestamatult. Niisiis saavutatakse iga positiivne reaalarv k suhte $\frac{|XB|}{|XC|}$ väärtusena lõigu BC sisepiirkonna punktide X jaoks, kusjuures igaüks täpselt ühel korral.



Lõigust BC väljapoole jäävad sirge BC punktid jagame kahte hulka – need, mis asuvad lõigu pikendusel üle punkti B, ja need, mis asuvad lõigu pikendusel üle punkti C.

[1] Apollonios Pergest (u. 240 – 190 e.Kr.) oli Vana-Kreeka geomeeter ja astronoom, kelle olulisimaks teoseks sai 7-osaline käsikiri koonuselõigetest.

Näitame, et reaalarvud $k > 1$ on sama moodi saavutatavad suhtena $\frac{|YB|}{|YC|}$ protsessis, kus punkt Y liigub lõigu BC pikendusel üle punkti C punktist C eemale. Kui $Y = C$, on suhe $\frac{|YB|}{|YC|}$ küll määramata, aga punktile C väga lähedaste puntkide Y puhul saab vaadeldav suhe kuitahes suureks. Teisendades

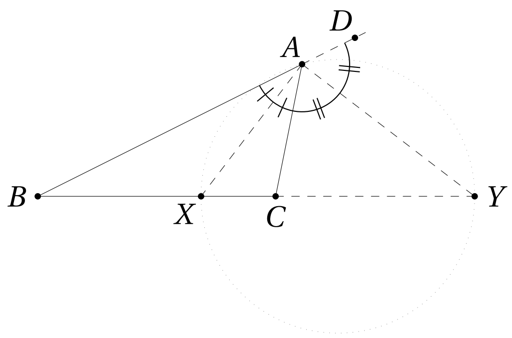
$$\frac{|YB|}{|YC|} = \frac{|YC| + |BC|}{|YC|} = 1 + \frac{|BC|}{|YC|}$$

näeme, et kui punkt Y kaugeneb punktist C, kahaneb suurus $\frac{|BC|}{|YC|}$ monotoonselt. Lõpmata kaugel saab ta kuitahes väikeseks ja seega jõuab suhe $\frac{|YB|}{|YC|}$ kuitahes lähedale arvule 1, kattes nii ära kõik reaalarvud $k > 1$.

Tõestus, et reaalarvud $0 < k < 1$ vastavad sirge BC punktidele, mis asuvad lõigu BC pikendusel üle punkti B, on analoogiline.

Olgu nüüd X ja Y punktid, mis vastavad antud reaalarvule k vastavalt lõigu BC sisepiirkonnas ja sellest väljas.

Vaatleme suvalist punkti A, mis ei asu sirgel BC, aga mille jaoks $\frac{|AB|}{|AC|} = k$. Kuna $\frac{|AB|}{|AC|} = k = \frac{|XB|}{|XC|}$, on AX nurga BAC poolitaja. Et teisest küljest ka $\frac{|AB|}{|AC|} = k = \frac{|YB|}{|YC|}$, on AY kolmnurga tipu A juures asuva välisnurga poolitaja.



Kuna AX ja AY on vastavalt tipu A juures asuva sise- ja välisnurga poolitajad, saame

$$\angle XAY = \angle XAC + \angle CAY = \frac{1}{2}\angle BAC + \frac{1}{2}\angle CAD = \frac{1}{2} \cdot 180^\circ = 90^\circ.$$

Thalese teoreemi pöördteoreemi järgi asub punkt A seega ringjoonel diameetriga XY. Muuhulgas asub selle ringjoone keskpunkt sirgel BC.

Jääb veel tõestada, et kõigi vaadeldava ringjoone punktide puhul kehtib teoreemi võrdus. Oletame, et leidub ringjoone punkt A', mille puhul see nii ei ole, st

$$\frac{|A'B|}{|A'C|} = k',$$

kus $k' \neq k$. Oletame konkreetsuse mõttes, et $k' > k > 1$ (ülejäänud juhtumite korral on tõestus analoogiline). Tõmbame kolmnurga $A'BC$ tipu A' juurest nii sise- kui välisnurga poolitajad; lõigaku nad sirget BC vastavalt punktides X' ja Y'. Siis nurgapoolitaja omaduse põhjal saame

$$\frac{|X'B|}{|X'C|} = \frac{|A'B|}{|A'C|} = k' > k = \frac{|XB|}{|XC|}.$$

Tõestuse esimeses osas nägime, et suhe $\frac{|XB|}{|XC|}$ kasvab siis, kui punkt X liigub punkti C suunas. Järelikult asub punkt X' punktide X ja C vahel.

Täpselt sama moodi saame, et

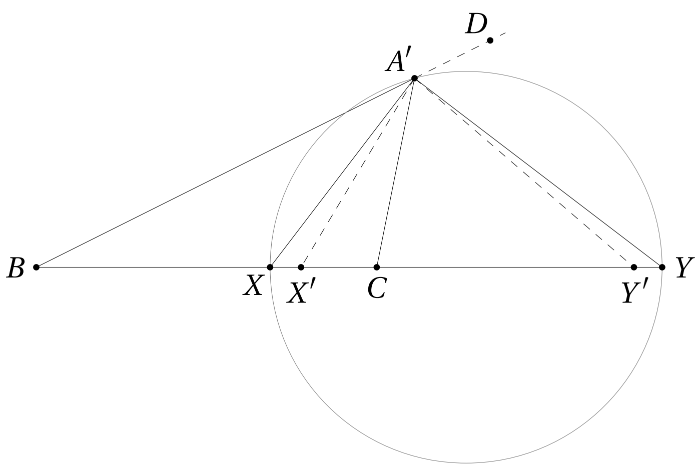
$$\frac{|Y'B|}{|Y'C|} = \frac{|A'B|}{|A'C|} = k' > k = \frac{|YB|}{|YC|}.$$

Kuna suhe $\frac{|YB|}{|YC|}$ samuti kasvab, kui punkt Y liigub punkti C suunas, peab punkt Y' asuma punktide Y ja C vahel.

Et $A'X'$ ja $A'Y'$ on nurgapoolitajad, saame

$$\angle X'A'Y' = \angle X'A'C + \angle CA'Y' = \frac{1}{2}\angle BA'C + \frac{1}{2}\angle CA'D = \frac{1}{2}\cdot 180^\circ = 90^\circ.$$

See aga pole võimalik, sest eeltõestatu põhjal $\angle X'A'Y' < \angle XAY$. Saadud vastuolu näitab, et teoreemi võrdus kehtib kõigi vaadeldava ringjoone punktide puhul.



$\square$

Ülesanded

Ülesanne 38.1 (Piirkonnavoor 2020, 12. klass) Koordinaattasandil on antud punktid $A(0;0)$ ja $B(-9;0)$. Leia võrrand joonele, mis koosneb parajasti neist punktidest, mis asuvad punktist B kaks korda kaugemal kui punktist A, ja skitseeri see joon.

Ülesanne 38.2 (Sügisene lahtine võistlus 1998, vanem rühm) Kolmnurga ABC küljel BC on võetud selline tippudest B ja C erinev punkt D, et nurkade ACB ja ADB poolitajad lõikuvad küljel AB. Olgu punkt D' sümmeetriline punktiga D sirge AB suhtes. Tõesta, et punktid C, A ja D' asuvad ühel sirgel.

Lahendused

38.1 Teoreemi 38.1 põhjal teame, et tegemist on ringjoonega, mille keskpunkt asub sirgel AB ehk koordinaattasandi x-teljel. Selle ringjoone ja sirge AB lõikepunktide X_1, X_2 koordinaadid esituvad kujul $(x;0)$, kus

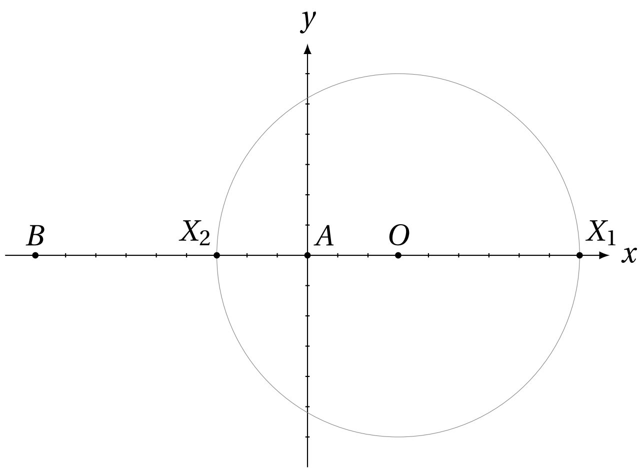
$$2 = \frac{|BX_i|}{|AX_i|} = \frac{|x-(-9)|}{|x-0|} = \frac{|x+9|}{|x|} \quad (i = 1,2)\,.$$

Juhul $x > 0$ saame võrrandi $2x = x+9$, mis annab lahendi $x = 9$.

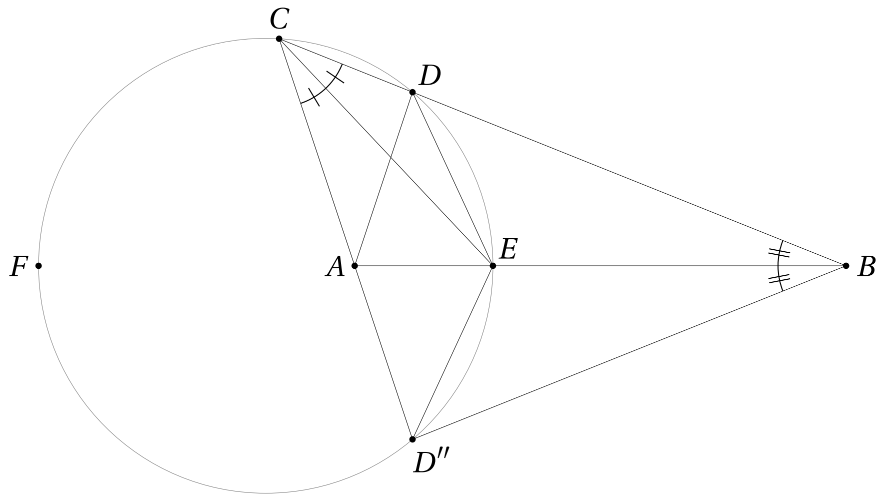
Juhul $-9 \leqslant x < 0$ saame võrrandi $-2x = x+9$, mis annab lahendi $x = -3$.

Juhul $x < -9$ saame võrrandi $-2x = -x-9$, mis annab lahendi $x = 9$, aga see ei kuulu vaadeldavasse piirkonda.

Niisiis on otsitavad lõikepunktid $X_1(9;0)$ ja $X_2(-3;0)$ ning ringjoone keskpunktiks on diameetri X_1X_2 keskpunkt $O(3;0)$.



38.2 Olgu nurkade ACB ja ADB poolitajate lõikepunkt E. Peegeldame külje BC sirget sirge AB suhtes; olgu D'' selle peegeldatud sirge lõikepunkt sirgega AC.

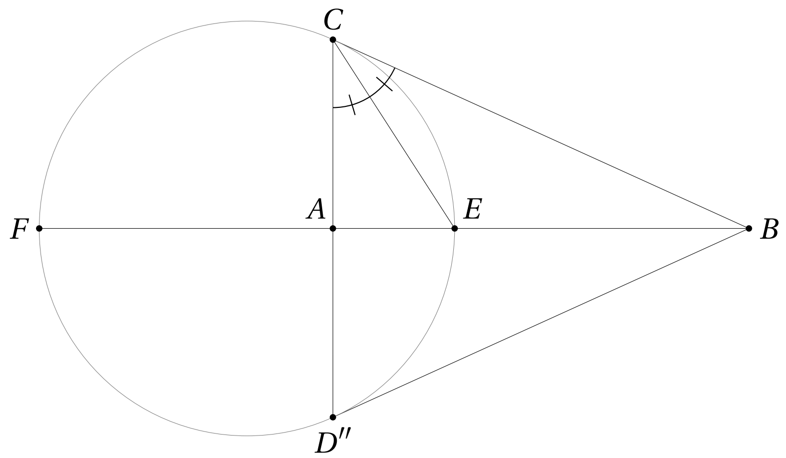


Siis ülesande tingimuste põhjal $\angle D''CE = \angle ECB$ ning konstruktsiooni järgi $\angle CBE = \angle EBD''$. Järelikult on E kolmnurga BCD'' nurgapoolitajate lõikepunkt ja muuhulgas $\angle BD''E = \angle ED''C$.

Lahenduse lõpuleviimiseks tõestame, et punktid D ja D'' on sümmeetrilised sirge AB suhtes (ja järelikult $D' = D''$). Paneme tähele, et teoreemi 38.1 põhjal saab sirgel BC olla ainult kaks punkti, millest tõmmatud nurgapoolitajad lõikuvad punktis E. Tõepoolest, kõik sellised tasandi punktid peavad asuma ühel ringjoonel, aga ringjoonel ja sirgel saab olla kuni kaks ühist punkti. Sama tähelepanek kehtib ka sirge BD'' suhtes, kusjuures kuna Apolloniose ringjoone keskpunkt asub sirgel AB, peavad vastavad punktid sirge AB suhtes sümmeetrilised olema.

Kuna nurga $BD''A$ poolitaja läbib punkti E ja D'' asub sirgel, mis on sümmeetriline sirgega BC, peab D'' olema sümmeetriline kas punktiga C või punktiga D. Näitame, et kui D'' oleks sümmeetriline punktiga C, siis oleks BC Apolloniose ringjoone puutuja ning punktid C ja D langeksid kokku, mis oleks vastuolu ülesande tingimustega.

Kui punktid C ja D'' on sümmeetrilised sirge AB suhtes, peab kehtima $\angle CAB = 90^\circ$.



Potentsiteoreemist 30.1 saame

$$|CA|^2 = |CA| \cdot |AD''| = |FA| \cdot |AE|$$

ehk $\frac{|CA|}{|FA|} = \frac{|AE|}{|CA|}$. Kuna AE on nurga ACE poolitaja, teame nurgapoolitaja omadusest, et $\frac{|CA|}{|CB|} = \frac{|AE|}{|EB|}$, kust omakorda $\frac{|AE|}{|CA|} = \frac{|EB|}{|CB|}$. Järelikult kehtib ka võrdus $\frac{|CA|}{|FA|} = \frac{|EB|}{|CB|}$.

Kuna F on samuti punkt Apolloniose ringjoonel, teame, et $\frac{|CA|}{|CB|} = \frac{|FA|}{|FB|}$, kust saame $\frac{|CA|}{|FA|} = \frac{|CB|}{|FB|}$. Järelikult kehtib võrdus $\frac{|EB|}{|CB|} = \frac{|CB|}{|FB|}$ ehk $|CB|^2 = |EB| \cdot |FB|$. Potentsiteoreemi 30.3 järgi on see võrdus samaväärne tingimusega, et BC on Apolloniose ringjoone puutuja.

V