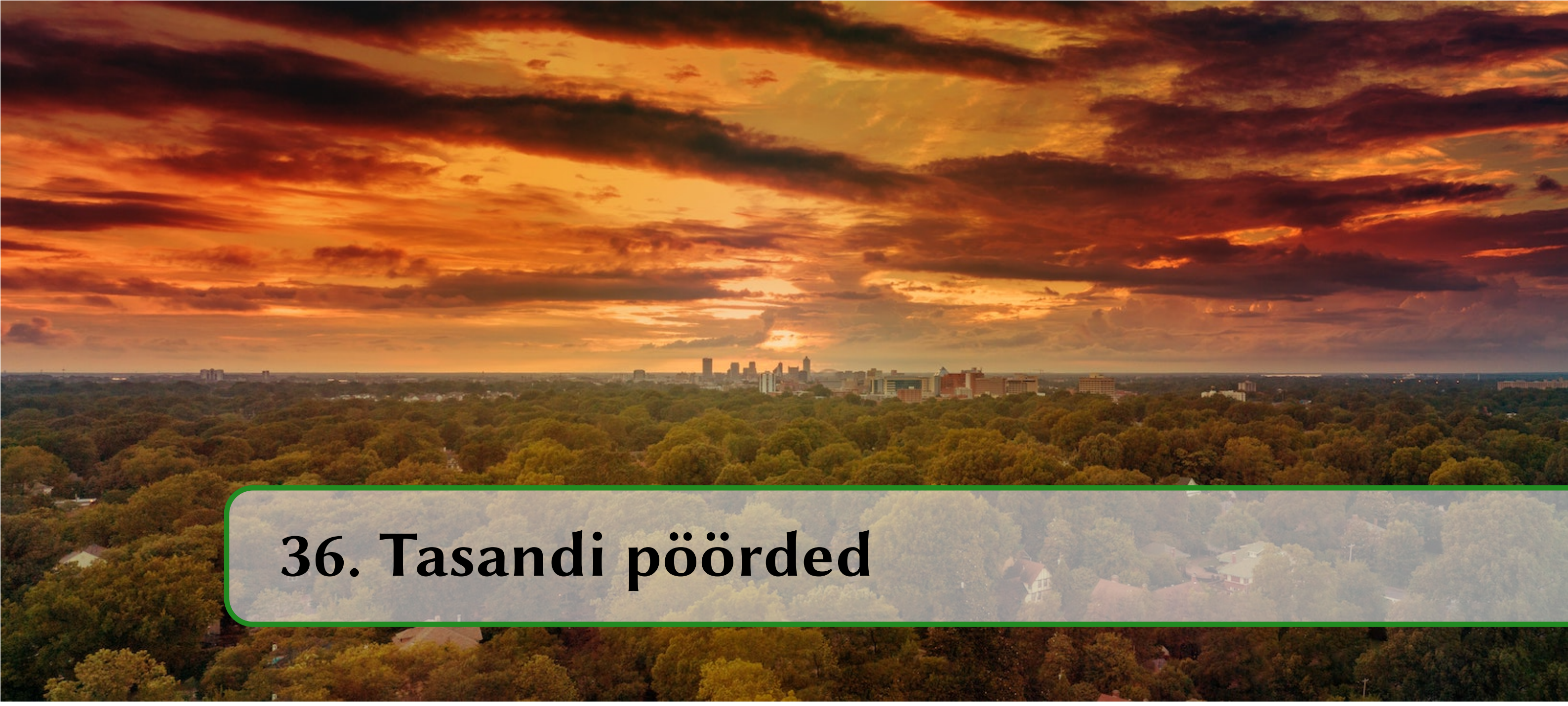


36. Tasandi pöörded

Peale homoteetia on teiseks matemaatikavõistlustel sageli kasutatavaks tasandi teisenduseks pööre ümber mingi punkti. Seejuures on pööre mõistlik valida nii, et ta viiks võimalikult palju ülesandes kasutatavaid geomeetrilisi objekte (punktid, lõigud, ringjooned jne) teisteks, mis ülesandes samuti rolli mängivad. Nõnda on võimalik avastada uusi seoseid meid huvitavate objektide vahel (näiteks tuletada sirgete või lõikude vahelisi nurki) ja nende seoste abil lahendus lõpuni viia. Võige sagedamini esinevad võistlusülesannetes pöörded 90° ja 60° võrra.

Ülesanded

Ülesanne 36.1 (Lõppvoor 2010, 9. klass) Ruudu $ABCD$ külgedele BC ja CD kui alustele konstrueeritakse väljapoole ruutu võrdsed võrdhaarsed kolmnurgad BJC ja CKD. Olgu M lõigu CJ keskpunkt ja O ruudu $ABCD$ keskpunkt. Tõesta, et lõigud MO ja BK on risti.

Ülesanne 36.2 (Lõppvoor 1999, 9. klass) Olgu E ja F vastavalt ruudu $ABCD$ külgede AB ja DA keskpunktid ning G lõikude DE ja CF lõikepunkt. Leia kolmnurga EGC küljepikkuste suhted $|EG| : |GC| : |CE|$.

Ülesanne 36.3 (Kevadine lahtine võistlus 2002, vanem rühm) Olgu $ABCD$ romb, kus $\angle DAB = 60^\circ$. Rombi külgedel AD ja DC võetakse vastavalt punktid K ja L ning diagonaalil AC punkt M nii, et nelinurk $KDLM$ on rööpkülik. Tõesta, et kolmnurk BKL on võrdkülgne.

Ülesanne 36.4 (Lõppvoor 2014, 11. klass) Malle joonistas rombi $ABCD$ ning valis küljel AB punkti E ja küljel BC punkti F nii, et kolmnurk DEF tuli võrdkülgne. Suur oli Malle imestus, kui ta avastas veel teisegi võimaluse valida sama rombi küljel AB punkt E ja küljel BC punkt F nii, et DEF on võrdkülgne. Millised saavad olla selle rombi nurkade suurused?

Ülesanne 36.5 (Kevadine lahtine võistlus 2004, vanem rühm) Kolmnurga ABC ümberringjoonel võetakse punkt P nii, et punktist P sirgele AC tõmmatud ristsirge lõikab ringjoont teistkordselt mingis punktis Q, punktist Q sirgele AB tõmmatud ristsirge lõikab ringjoont teistkordselt mingis punktis R ning punktist R sirgele BC tõmmatud ristsirge lõikab ringjoont teistkordselt algses punktis P. Olgu O selle ringjoone keskpunkt. Tõesta, et $\angle POC = 90^\circ$.

Ülesanne 36.6 (Lõppvoor 2004, 12. klass) Olgu K, L ja M vastavalt kolmnurga ABC tippudest A, B ja C tõmmatud kõrguste aluspunktid. Tõesta, et $\overrightarrow{AK} + \overrightarrow{BL} + \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{0}$ siis ja ainult siis, kui kolmnurk ABC on võrdkülgne.

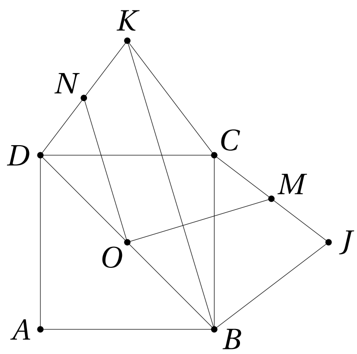
Ülesanne 36.7 (Talvine lahtine võistlus 2018, vanem rühm) Tasandil on antud ringjoon ω ja punkt A sellest väljaspool. Mistahes punkti B jaoks ringjoonel ω määratakse punkt C nii, et ABC on võrdkülgne kolmnurk, millel tipud A, B ja C loetletud päripäeva. Tõesta, et kui punkt B liigub mööda ringjoont ω, siis liigub ka punkt C mööda mingit ringjoont.

Ülesanne 36.8 (Lõppvoor 2002, 11. klass) Leia võrdkülgse kolmnurga pindala, kui selle sisepiirkonnas leidub punkt, mille kaugused kolmnurga tippudest on $3, 4$ ja 5.

Vaata ka ülesannet 40.2.

Lahendused

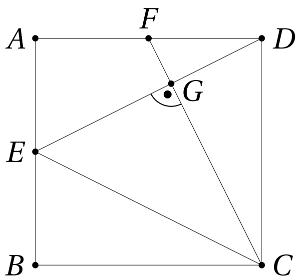
36.1 Teeme joonise.



Vaatleme pööret 90° võrra ümber punkti O, mis viib punktid B, C, J ja M vastavalt punktideks C, D, K ja N. Siis N on lõigu DK keskpunkt. Teisest küljest paneme tähele, et O on lõigu BD keskpunkt, mistõttu ON on kolmnurga BKD kesklõik. Järelikult $ON \parallel BK$ ning kuna konstruktsiooni järgi $NO \perp OM$, saamegi $OM \perp BK$ nagu tarvis.

36.2 Vastus: $3:4:5$.

Pöörame ruutu $ABCD$ 90° võrra tema keskpunkti ümber nii, et punkt A läheb punktiks B, punkt B punktiks C jne. Siis läheb ka punkt F punktiks E ning lõik CF lõiguks DE. Järelikult on lõigud CF ja DE risti, st $\angle CGE = 90^\circ$.



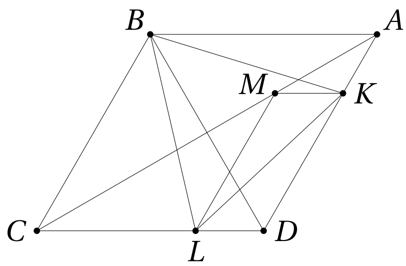
Muuhulgas näeme, et kolmnurgad CDF, CGD ja DGF on täisnurksed, lisaks langevad nende teravnurgad paarikaupa kokku. Järelikult on need kolmnurgad sarnased ning kuna $\frac{|CD|}{|DF|} = 2$, siis ka $\frac{|CG|}{|DG|} = 2$ ja $\frac{|DG|}{|GF|} = 2$.

Viimaste võrduste korrutamine annab $\frac{|CG|}{|GF|} = 4$ ehk $|CG| = 4|GF|$. Valides ühikuks lõigu GF pikkuse, on lõigud CG ja CF vastavalt 4 ja 5 ühiku pikkused. Kuna $|CF| = |DE|$ ja $|DG| = 2|GF|$, on lõigud DG ja GE vastavalt 2 ja 3 ühiku pikkused, st $|GE| = 3|GF|$. Nüüd saame kolmnurgas EGC kasutada Pythagorase teoreemi ja avaldada ka lõigu CE pikkuse valitud ühiku kaudu:

$$|CE| = \sqrt{|CG|^2 + |GE|^2} = \sqrt{(4|GF|)^2 + (3|GF|)^2} = \sqrt{16|GF|^2 + 9|GF|^2} =$$
$$= \sqrt{25|GF|^2} = 5|GF|\,.$$

Niisiis suhtuvad kolmnurga EGC küljepikkused nagu $3:4:5$.

36.3 Teeme joonise.



Kuna rombi $ABCD$ nurk tipu A juures on 60°, jagab diagonaal BD selle kaheks võrdseks võrdkülgseks kolmnurgaks. See tähelepanek annab idee uurida pööret 60° võrra päripäeva ümber nurga B.

See pööre viib lõigu BA lõiguks BD ning lõigu AD lõiguks DC, säilitades muuhulgas 60° nurga nende vahel. Kas meil õnnestub näidata, et sama pööre viib punkti K punktiks L?

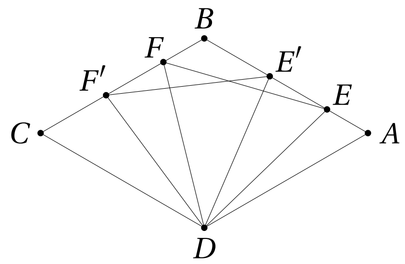
Ülesande tingimuste põhjal on nelinurk $KDLM$ rööpkülik, seega $MK \parallel CD$. Teoreemi 27.1 põhjal järeldub siit, et $\triangle AMK \sim \triangle ACD$. Kuna kolmnurk ACD on võrdhaarne, peab võrdhaarne olema ka kolmnurk AMK, st $|AK| = |KM|$. Rööpkülikust $KDLM$ teame veel, et $|KM| = |DL|$, järelikult $|AK| = |DL|$.

Niisiis viib pööre 60° võrra päripäeva ümber nurga B tõepoolest punkti K punktiks L, mistõttu kolmnurk BKL on võrdkülgne.

36.4 Vastus: 60° ja 120°.

Tegemist on ülesande 36.3 pöördülesandega.

Tähistame punktide E ja F teisi võimalikke asukohti vastavalt E' ja F'. Pööre 60° võrra (joonisel vastupäeva) ümber punkti D viib punkti E punktiks F ning punkti E' punktiks F'. Niisiis läheb sirge EE' (ehk sirge AB) selle pöördega sirgeks FF' (ehk sirgeks BC). Järelikult on nende sirgete vaheline nurk 60°, mis tähendab, et rombi $ABCD$ nurgad saavad olla ainult 60° ja 120°.



36.5 Vastavalt ülesande tingimustele kehtivad seosed $PQ \perp CA$, $QR \perp AB$ ja $RP \perp BC$. Pöörame kolmnurka PQR ringjoone keskpunkti O ümber 90° võrra ükskõik kummas suunas ning tähistame saadavat kolmnurka $P'Q'R'$. Siis $P'Q' \parallel CA$, $Q'R' \parallel AB$ ja $R'P' \parallel BC$. See tähendab, et $P'Q'R'$ ja CAB on vastavalt paralleelsete külgedega kolmnurgad. Teoreemist 35.1 järeldub, et nad peavad olema üksteiseks viidavad kas lükke või homoteetse teisenduse abil.

Kuna nende kolmnurkade ümberringjoon on sama, peavad nad kas kokku langema või olema homoteetsed keskpunktiga O ja kordajaga -1. Esimesel juhul $P' = C$, teisel juhul aga on P' ja C ühe diameetri otspunktid. Mõlemad võimalused annavad, et $\angle POC = 90^\circ$, mida oligi tarvis tõestada.

36.6 Selle ülesande lahenduse idee sarnaneb veidi ülesande 36.5 ideega.

Eeldame kõigepealt, et $\overrightarrow{AK}+\overrightarrow{BL}+\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{0}$. Järelikult saab vektoritest $\overrightarrow{AK}$, $\overrightarrow{BL}$ ja $\overrightarrow{CM}$ saab kokku panna kolmnurga. Vaatlemegi siis kolmnurka PQR, kus $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AK}$, $\overrightarrow{QR} = \overrightarrow{BL}$ ja $\overrightarrow{RP} = \overrightarrow{CM}$. Pöörame kolmnurka PQR 90° võrra ükskõik kummas suunas, nii et tekib kolmnurk $P'Q'R'$. Kuivõrd algsed vektorid olid risti kolmnurga ABC vastavate külgedega, saame nüüd $P'Q' \parallel BC$, $Q'R' \parallel CA$, $R'P' \parallel AB$.

Teoreemist 35.1 järeldub, et kolmnurgad $P'Q'R'$ ja BCA (jälgi tippude järjekorda!) peavad olema üksteiseks viidavad kas lükke või homoteetse teisenduse abil. Igal juhul on nad sarnased, st $\triangle P'Q'R' \sim \triangle BCA$. Teisest küljest muidugi $\triangle PQR \sim \triangle P'Q'R'$; niisiis ka $\triangle PQR \sim \triangle BCA$.

Olgu kolmnurkade PQR ja BCA sarnasustegur k. Siis saame

$$k = \frac{|BC|}{|PQ|} = \frac{|BC|}{|AK|}, \quad k = \frac{|CA|}{|QR|} = \frac{|CA|}{|BL|} \quad \text{ja} \quad k = \frac{|AB|}{|RP|} = \frac{|AB|}{|CM|}.$$

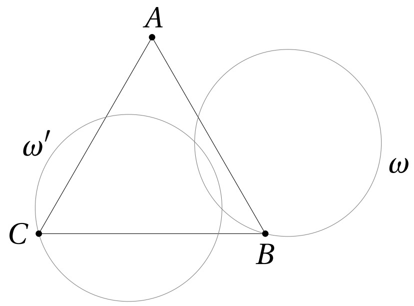
Kolmnurga ABC pindala valemist teame, et

$$2S = |BC| \cdot |AK| = |BC| \cdot \frac{|BC|}{k},$$

järelikult $|BC| = \sqrt{2Sk}$. Analoogiliselt saame ka $|CA| = \sqrt{2Sk}$ ja $|AB| = \sqrt{2Sk}$, niisiis on kolmnurk ABC võrdkülgne.

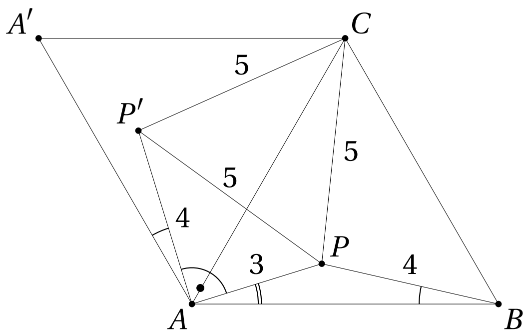
Teisest küljest, kui kolmnurk ABC on võrdkülgne, on tema kõrgused võrdse pikkusega ning üksteise suhtes 60° nurga all. Niisiis saab kõrgustele vastavatest vektoritest moodustada (võrdkülgse) kolmnurga, järelikult $\overrightarrow{AK}+\overrightarrow{BL}+\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{0}$.

36.7 Vaatleme tasandi pööret 60° võrra päripäeva ümber punkti A. See pööre viib ringjoone ω mingiks ringjooneks ω' ning punkti B punktiks C sellel ringjoonel. Kuna ω' sõltub ainult punktist A ning algsest ringjoonest ω, aga mitte punkti B valikust, sobibki ω' otsitavaks ringjooneks.



36.8 Vastus: $\dfrac{25\sqrt{3}}{4}+9$.

Tähistame uuritava võrdkülgse kolmnurga tipud vastupäeva A, B ja C ning kolmnurga sees punkti P nii, et $|AP|=3$, $|BP|=4$ ja $|CP|=5$. Vaatleme kolmnurga pööret ümber punkti C 60° võrra päripäeva. See pööre viib tipu B tipuks A. Viigu ta lisaks punktid A ja P vastavalt punktideks A' ja P'.



Kolmnurgas CPP' kehtib $|CP|=|CP'|=5$ ning $\angle PCP'=60^\circ$, järelikult on see kolmnurk võrdkülgne. Muuhulgas saame $|PP'|=5$. Lisaks $|AP|=3$ ning $|AP'|=|BP|=4$, mistõttu kolmnurk APP' on täisnurkne. Teisest küljest näeme. et $\angle A'AB=2\cdot 60^\circ=120^\circ$, niisiis

$$\angle PAB+\angle ABP=\angle PAB+\angle A'AP'=\angle A'AB-\angle P'AP=120^\circ-90^\circ=30^\circ\,.$$

Järelikult

$$\angle BPA=180^\circ-(\angle PAB+\angle ABP)=180^\circ-30^\circ=150^\circ$$

ning koosinusteoreemist kolmnurgas ABP saame leida

$$|AB|^2=3^2+4^2-2\cdot 3\cdot 4\cdot\cos 150^\circ=9+16+24\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=25+12\sqrt{3}\,.$$

Kolmnurga ABC pindala avaldub seega kujul

$$S=\frac{1}{2}\cdot|AB|^2\cdot\sin 60^\circ=\frac{1}{2}\cdot(25+12\sqrt{3})\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{25\sqrt{3}}{4}+9\,.$$