36. Geomeetrilised võrratused

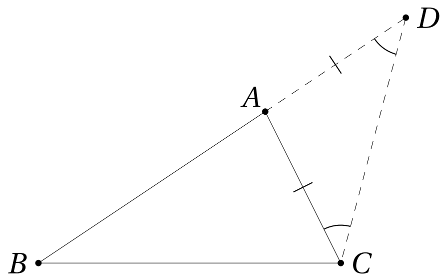
36.1 Kolmnurgavõrratus

Kolmnurgavõrratus on lihtne erijuht tähelepanekust, et kõige lühem tee tasandi kahe punkti vahel on sirglõik.

Teoreem 36.1 **(Kolmnurgavõrratus)** Kolmnurgas ABC kehtib võrratus

$$|AB| + |AC| > |BC|\,.$$

Tõestus. Pikendame külge AB üle tipu A kuni punktini D, nii et $|AD| = |AC|$.



Kolmnurk ACD on konstruktsiooni põhjal võrdhaarne, seega $\angle ACD = \angle CDA$ ja järelikult

$$\angle BCD > \angle ACD = \angle CDA = \angle CDB\,.$$

Kolmnurgas BCD on suurema nurga vastas suurem külg, mistõttu $|BD| > |BC|$. Teisest küljest aga $|BD| = |AB| + |AD| = |AB| + |AC|$, millest järeldubki tõestatav väide.[1] □

Loomulikult kehtib kolmnurgavõrratus ka teiste külgede jaoks, st $|AC| + |BC| > |AB|$ ja $|AB| + |BC| > |AC|$.

[1] On huvitav märkida, et teoreemi 36.1 tõestus pärineb otse Eukleidese kogumikust "Elemendid", täpsemalt selle 1. raamatu 20. lausest [6]. Umbes 300 aastat eKr kirja pandud "Elemente" peetakse tänaseni kaasaegse matemaatika alusteoseks, kus Eukleides tõi sisse nii aksiomaatilise meetodi kui range loogilise arutelu. Nii näiteks ei kasutanud ta ka väiteid "Võrdhaarse kolmnurga alusnurgad on võrdsed" ja "Kolmnurgas on suurema nurga vastas suurem külg" ilma tõestuseta. Need väited põhjendas ta "Elementide" 1. raamatus varasemate lausetega number 5 ja 19.

Kolmnurgavõrratust saab üldistada juhule, kus tasandi punktid A, B ja C asuvad ühel sirgel ega moodusta kolmnurka. Sel juhul saab kehtida ka võrdus $|AB|+|AC|=|BC|$, mis on nii parajasti siis, kui punkt A asub lõigul BC. Kui punkt A asub sirgel BC väljaspool lõiku BC, kehtib endiselt $|AB|+|AC|>|BC|$. Kokkuvõttes kehtib tasandi kolme suvalise punkti A, B ja C korral võrratus $|AB|+|AC|\geqslant|BC|$.

Ülesanne 36.1 (Lõppvoor 2018, 11. klass) Olgu p kolmnurga ABC poolümbermõõt. Tõesta, et tasandi suvalise punkti Q korral kehtib võrratus

$$|AQ|+|BQ|+|CQ|>p\,.$$

Lahendus. Olgu Q kolmnurga ABC tasandi suvaline punkt. Siis kehtivad vastavalt kolmnurkades QAB, QBC ja QCA võrratused

$$\begin{aligned}|AQ|+|BQ|&\geqslant|AB|\,,\\|BQ|+|CQ|&\geqslant|BC|\,,\\|CQ|+|AQ|&\geqslant|CA|\,.\end{aligned}$$

Nende võrratuste liitmisel saame

$$2(|AQ|+|BQ|+|CQ|)\geqslant 2p\,.$$

Selleks, et viimases võrratuses kehtiks võrdus, peaks punkt Q asuma korraga lõikudel AB, BC ja CA, mis ei ole võimalik. Seega kehtib tegelikult

$$2(|AQ|+|BQ|+|CQ|)>2p\,,$$

mis on samaväärne ülesande võrratusega.

Ülesanded

Ülesanne 36.2 (Talvine lahtine võistlus 2011, noorem rühm) Kas on võimalik, et täisarvuliste küljepikkustega kolmnurga ümbermõõt jagub selle kolmnurga pikima külje kahekordse pikkusega?

Ülesanne 36.3 (Piirkonnavoor 2018, 12. klass) Olgu x, y ja z kolmnurga külgede pikkused. Tõesta, et

$$z(z-1)<x(x+1)+y(y-1)+2xy\,.$$

Ülesanne 36.4 (Piirkonnavoor 2007, 12. klass) Tõesta, et suvalises kolmnurgas ABC kehtib võrratus

$$|AB|^2+|BC|^2>\frac{1}{3}(|AB|^2+|BC|^2+|CA|^2)\,.$$

Ülesanne 36.5 (Sügisene lahtine võistlus 2016, vanem rühm.) Kolmnurga ABC külgedel BC, CA ja AB võetakse vastavalt punktid D, E ja F. Tõesta, et

$$\frac{1}{2}(|BC|+|CA|+|AB|)<|AD|+|BE|+|CF|<\frac{3}{2}(|BC|+|CA|+|AB|)\,.$$

Ülesanne 36.6 (Lõppvoor 1994, 10. klass) Olgu a, b ja c mingi kolmnurga külgede pikkused. Tõesta, et kehtivad võrratused:

a) $2(ab+bc+ac) > a^2+b^2+c^2$;

b) $2(a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2) > a^4+b^4+c^4$.

Ülesanne 36.7 (Lõppvoor 2010, 12. klass) Olgu a, b ja c kolmnurga külgede pikkused ning k mingi reaalarv. Tõesta, et kui ruutvõrrandil $x^2+(a+b+c)x+k(ab+bc+ca)=0$ leidub reaalarvuline lahend, siis $k<1$.

Ülesanne 36.8 (Lõppvoor 2002, 12. klass) Tõesta, et positiivsed reaalarvud a, b ja c rahuldavad võrratust

$$2(a^4+b^4+c^4) < (a^2+b^2+c^2)^2$$

siis ja ainult siis, kui leidub kolmnurk küljepikkustega a, b ja c.

Ülesanne 36.9 (Talvine lahtine võistlus 2013, vanem rühm) Olgu a, b ja c mingi kolmnurga külgede pikkused. Tõesta, et

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} < 2\,.$$

Ülesanne 36.10 (Sügisene lahtine võistlus 2008, vanem rühm) Olgu kolmnurga ABC küljel BC valitud suvaline punkt D. Olgu kolmnurkade ABC, ABD ja ACD siseringjoonte raadiused vastavalt r_1, r_2 ja r_3. Tõesta, et $r_1 < r_2 + r_3$.

Lahendused

36.2 Vastus: ei.

Olgu kolmnurga küljepikkused a, b ja c ning olgu c üldisust kitsendamata nende seast pikim. Seega kehtivad võrratused $a \leqslant c$ ja $b \leqslant c$, millest saame, et $a+b+c \leqslant 3c$ ja järelikult $\frac{a+b+c}{2c} \leqslant 1{,}5$.

Teisest küljest kolmnurgavõrratuse põhjal $a+b>c$, millest saame $a+b+c>2c$ ja järelikult ka $\frac{a+b+c}{2c} > 1$. Niisiis ei saa $\frac{a+b+c}{2c}$ olla täisarv.

36.3 Avame sulud ja viime miinusmärgiga liikmed teisele poole. Nii saame ülesande võrratuse teisendada samaväärsele kujule

$$z^2+y < x^2+x+y^2+2xy+z\,.$$

Seda võrratust on võimalik saada võrratuste $y<x+z$ ja $z^2<(x+y)^2$ liitmisel. Esimene neist kehtib otse tänu kolmnurgavõrratusele, teine aga on saadud kolmnurgavõrratuse poolte ruutu tõstmisel (mis on lubatud, sest kolmnurgavõrratuse mõlemad pooled on positiivsed).

36.4 Korrutades mõlemad pooled 3-ga ja koondades sarnased liikmed, saame ülesande võrratuse teisendada samaväärsele kujule

$$2|AB|^2+2|BC|^2 > |CA|^2\,.$$

Aritmeetilise ja geomeetrilise keskmise vahelisest võrratusest teame, et kehtib $|AB|^2 + |BC|^2 \geqslant 2|AB| \cdot |BC|$, seega

$$2|AB|^2 + 2|BC|^2 \geqslant |AB|^2 + 2|AB| \cdot |BC| + |BC|^2 = (|AB| + |BC|)^2 > |CA|^2 .$$

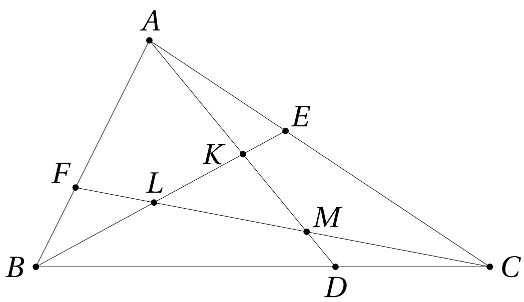
Viimase võrratuse saame kolmnurgavõrratuse $|AB| + |BC| > |CA|$ pooli ruutu tõstes (mis annab kehtiva võrratuse, sest kolmnurgavõrratuse mõlemad pooled on positiivsed).

36.5 Vaatamata natuke hirmuäratavale väljanägemisele pole selles ülesandes suurt trikki – tuleb lihtsalt kasutada kolmnurgavõrratust sobivalt valitud kolmnurkades.

Esimese tõestatava võrratuse saame ümber kirjutada kujul

$$|BC| + |CA| + |AB| < 2(|AD| + |BE| + |CF|) .$$

Selle võrratuse tõestamiseks peame kolmnurga küljepikkusi hindama ülevalt lõikude AD, BE ja CF pikkuste kaudu. Tähistame nende lõikude paarikaupa lõikumispunktid K, L ja M nii, nagu näha joonisel (need punktid võivad ka kokku langeda):



Kolmnurgavõrratus kolmnurgas ABK annab

$$|AB| < |AK| + |BK| .$$

Teisest küljest aga $|AK| < |AD|$ ja $|BK| < |BE|$, järelikult ka

$$|AB| < |AD| + |BE| .$$

Analoogiliselt tõestame võrratused

$$|BC| < |BE| + |CF| \quad \text{ja} \quad |AC| < |AD| + |CF| .$$

Kolme saadud võrratuse liitmine annabki ülesande esimese võrratuse.

Ülesande teise võrratuse jaoks peame lõikude AD, BE ja CF pikkusi hindama ülevalt kolmnurga ABC külgede pikkuste kaudu. Lõik AD on üheks küljeks kolmnurkades ABD ja ACD, kust saame vastavalt võrratused $|AD| < |BD| + |AB|$ ja $|AD| < |DC| + |CA|$. Nende võrratuste liitmine annab

$$2|AD| < |BD| + |DC| + |AB| + |CA| = |AB| + |BC| + |CA| .$$

Analoogiliselt tõestame võrratused

$$2|BE| < |AB| + |BC| + |CA| \quad \text{ja} \quad 2|CF| < |AB| + |BC| + |CA| .$$

Kolme viimase võrratuse liitmisel saamegi ülesande teise võrratuse.

36.6 a) Kolmnurgavõrratusest teame, et $a+b>c$. Korrutades seda võrratust mõlemalt poolt c-ga, saame $ac+bc>c^2$. Sama moodi tõestame võrratused $ab+bc>b^2$ ja $ab+ac>a^2$. Ülesande a)-osa võrratuse saame nende kolme võrratuse liitmisel.

b) Viime liikmed ühele poole ja tegurdame saadava avaldise:

$$\begin{aligned}
&a^4+b^4+c^4-2a^2b^2-2b^2c^2-2a^2c^2=\\
&=a^4+b^4+c^4-2a^2b^2+2b^2c^2-2a^2c^2-4b^2c^2=\\
&=(a^2-b^2-c^2)^2-(2bc)^2=\\
&=(a^2-b^2-c^2-2bc)(a^2-b^2-c^2+2bc)=\\
&=(a^2-(b+c)^2)(a^2-(b-c)^2)=\\
&=(a-b-c)(a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)\,.
\end{aligned}$$

Kolmnurgavõrratusest teame, et $a-b-c<0$, $a-b+c>0$ ja $a+b-c>0$. Lisaks loomulikult $a+b+c>0$. Seega on nende nelja teguri korrutis negatiivne, mis tõestabki ülesande b)-osa võrratuse.

36.7 Ruutvõrrandil leidub lahend parajasti siis, kui tema diskriminant on mittenegatiivne. Seega kehtib võrratus

$$\begin{aligned}
(a+b+c)^2-4k(ab+bc+ca)&\geqslant 0\,,\\
a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)-4k(ab+bc+ca)&\geqslant 0\,,\\
a^2+b^2+c^2&\geqslant (4k-2)(ab+bc+ca)\,.
\end{aligned}$$

Ülesande 36.6 a)-osast teame, et kolmnurga külgede korral kehtib lisaks võrratus $2(ab+bc+ac)>a^2+b^2+c^2$. Järelikult ka

$$2(ab+bc+ac)>(4k-2)(ab+bc+ca)$$

ning kuna avaldis $ab+bc+ca$ on positiivne, võime viimase võrratuse pooled temaga läbi jagada. Kokkuvõttes saame $2>4k-2$, millest järeldubki $4>4k$ ehk $1>k$, nagu vaja.

36.8 Sulge lahti korrutades ning sarnaseid liikmeid koondades saame ülesande võrratuse teisendada samaväärsele kujule

$$\begin{aligned}
2(a^4+b^4+c^4)&<(a^2+b^2+c^2)^2\,,\\
2a^4+2b^4+2c^4)&<a^4+b^4+c^4+2(a^2b^2+b^2c^2+a^2b^2)\,,\\
a^4+b^4+c^4&<2(a^2b^2+b^2c^2+a^2b^2)\,.
\end{aligned}$$

Ülesande 36.6 b)-osas tõestasime, et kui a, b ja c on ühe kolmnurga küljepikkused, siis see võrratus kehtib.

Jääb veel tõestada, et võrratuse kehtivusest järeldub vajaliku kolmnurga olemasolu. Kasutades ülesande 36.6 b)-osa tõestust võime saadud võrratuse veelkord ümber kirjutada kujul

$$(a-b-c)(a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)>0\,.$$

Üldisust kitsendamata olgu a antud arvudest suurim, st $a\geqslant b$ ja $a\geqslant c$. Siis $a+b+c>0$, $a-b+c>0$ ja $a+b-c>0$, järelikult ka $a-b-c>0$ ehk $a>b+c$. Nüüd on lihtne mõista, et vajalik kolmnurk eksisteerib. Näiteks võime joonestada lõigu pikkusega a ning ringjooned raadiustega b ja c keskpunktidega vastavalt selle lõigu otspunktides. Tänu võrratusele $a > b + c$ need ringjooned lõikuvad ning nende lõikepunkt sobibki otsitava kolmnurga kolmandaks tipuks.

36.9 Kolmnurga küljepikkustena on arvud a, b ja c positiivsed. Niisiis saame algse võrratusega samaväärse võrratuse, kui korrutame tema mõlemaid pooli suurusega $(a+b)(b+c)(c+a)$:

$$a(a+b)(c+a)+b(a+b)(b+c)+c(b+c)(c+a) < 2(a+b)(b+c)(c+a).$$

Sulge avades ja sarnaseid liikmeid koondades saame võrratuse

$$a^3+b^3+c^3 < a^2b+a^2c+b^2a+b^2c+c^2a+c^2b,$$

mis omakorda on samaväärne võrratusega

$$0 < a^2(b+c-a)+b^2(a+c-b)+c^2(a+b-c).$$

See võratus aga ilmselt kehtib, sest tänu kolmnurgavõrratustele $b+c-a > 0$, $a+c-b > 0$ ja $a+b-c > 0$.

36.10 Ülesande võrratus näeb kolmnurgavõrratuse moodi välja, aga selle sarnasuse ärakasutamiseks tuleks näidata, et lõikudest pikkusega r_1, r_2 ja r_3 saab moodustada kolmnurga. Samas pole üldse ilmne, kuidas niisugust omadust põhjendada, nõnda on selle idee näol tegemist omamoodi "valejäljega".

Lahendusele viib aga pindalade rehkendus, kui tuletame meelde, et kolmnurga pindala S avaldub kujul pr, kus p on vaadeldava kolmnurga poolümbermõõt ja r tema siseringjoone raadius. Olgu kolmnurkade ABC, ABD ja ACD poolümbermõõdud vastavalt p_1, p_2 ja p_3. Siis saame

$$p_1r_1 = S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABD} + S_{\triangle ACD} = p_2r_2 + p_3r_3,$$

kust omakorda järeldub võrdus

$$r_1 = \frac{p_2}{p_1}r_2 + \frac{p_3}{p_1}r_3.$$

Ülesande võrratuse tõestamiseks piisab nüüd, kui näitame, et $p_1 > p_2$ ja $p_1 > p_3$ ehk kolmnurga ABC ümbermõõt on suurem kui kolmnurkadel ABD ja ACD. Need väited aga järelduvad kolmnurgavõrratusest, sest

$$\begin{aligned} P_{\triangle ABC} = |AB|+|BC|+|CA| = |AB|+|BD|+|DC|+|CA| > \\ > |AB|+|BD|+|DA| = P_{\triangle ABD} \end{aligned}$$

ja sama moodi ka kolmnurga ACD jaoks.

36.2 Mitmesuguseid gemomeetrilisi võrratusi

Jaotises 36.1 tutvusime kõige sagedamini esineva geomeetrilise võrratuse – kolmnurgavõrratusega. Erinevaid geomeetrilisi objekte, mida omavahel võrrelda saab, on aga rikkalikult ja vastavaid ülesandeid esineb matemaatikavõistlustel päris tihti. Enamasti taandub nende lahendamine sobiva algebralise võrratuse tuletamisele ja tõestamisele.

Ülesanded

Ülesanne 36.11 (Sügisene lahtine võistlus 1994, noorem rühm) Kaks võrdse raadiusega ringjoont lõikuvad kahes erinevas punktis A ja B. Olgu nende ringjoonte raadius r ning keskpunktid vastavalt O_1 ja O_2. Leia nelinurga O_1AO_2B pindala suurim võimalik väärtus.

Ülesanne 36.12 (Piirkonnavoor 1994, 9. klass) Tõesta, et ringid, mille diameetriteks on kumera nelinurga küljed, katavad täielikult selle nelinurga.

Ülesanne 36.13 (Lõppvoor 2007, 9. klass) Kolmnurga ABC tippudest A ja B tõmmatud mediaanid on omavahel risti. Tõesta, et kolmnurga külg AB on lühem kolmnurga kummastki ülejäänud küljest.

Ülesanne 36.14 (Piirkonnavoor 2015, 12. klass) Kas tasandil leidub neli erinevat punkti A, B, C, D, millest ükski kolm ei asu ühel sirgel, nii et punkt A asub väljaspool kolmnurga BCD ümberringjoont, punkt B asub väljaspool kolmnurga CDA ümberringjoont, punkt C asub väljaspool kolmnurga DAB ümberringjoont ning punkt D asub väljaspool kolmnurga ABC ümberringjoont?

Ülesanne 36.15 (Piirkonnavoor 2019, 12. klass) Tõesta, et iga kolmnurga siseringjoone raadius on vähemalt kolmandik selle kolmnurga pikimale küljele tõmmatud kõrgusest, ja leia kõik kolmnurgad, mille puhul kehtib võrdus.

Ülesanne 36.16 (Piirkonnavoor 2016, 12. klass) Nelinurga $ABCD$ tipud paiknevad ühel ringjoonel raadiusega 1. Leia selle nelinurga suurim võimalik pindala.

Ülesanne 36.17 (Piirkonnavoor 2011, 12. klass) Täisnurkses kolmnurgas võetakse mõlema kaateti ristprojektsioonid hüpotenuusile. Tõesta, et kaateti ja tema projektsiooni pikkuste vahe on väiksem kui pool teise kaateti projektsiooni pikkusest.

Ülesanne 36.18 (Talvine lahtine võistlus 2009, vanem rühm) On antud trapets $ABCD$ alustega AB ja CD ning diagonaalide lõikepunktiga P. Tõesta võrratus

$$S_{PAB} + S_{PCD} > S_{PBC} + S_{PDA},$$

kus kirjutis S_{XYZ} tähistab kolmnurga XYZ pindala.

Ülesanne 36.19 (Lõppvoor 2010, 11. klass) Kuullaager koosneb kahest üksteise sees paiknevast ühise teljega silindrist, mille vahel asub n ühesuurust kuuli. Kõigi kuulide keskpunktid on ühel silindrite teljega ristuval tasandil ning iga kuul puutub mõlemat silindrit ja kahte oma naaberkuuli. Olgu r kuulide raadius ning R välimise silindri raadius. Tõesta, et

$$\frac{r}{R} < \frac{\pi}{n + \pi}.$$

Ülesanne 36.20 (Lõppvoor 2015, 11. klass) Kolmnurga pindala S ja ümberringjoone raadius r rahuldavad tingimust $S \geqslant r^2$. Tõesta, et selle kolmnurga kõik nurgad on suuremad kui 30°, kuid ükski nurk pole suurem kui 90°.

Ülesanne 36.21 (Lõppvoor 2007, 11. klass) Tasandile on paigutatud teatud arv ringe raadiusega 2. Tõesta, et nende ringidega kaetud ala kogupindala on arvuliselt vähemalt niisama suur kui seda ala piiravate kaarte kogupikkus.

Ülesanne 36.22 (Lõppvoor 2009, 12. klass) Suure kera sisse paigutatakse neli ühesuurust väikest kera nii, et igaüks neist puutub kolme ülejäänut ja suurt kera. Kas väikeste kerade koguruumala on võrdne neist ülejääva osaga suure kera ruumalast, sellest suurem või väiksem?

Ülesanne 36.23 (Lõppvoor 2022, 12. klass) Kolmnurk ümbermõõduga P on jaotatud k kolmnurgakujuliseks tükiks, kus $k \geqslant 2$.

a) Tõesta, et leidub tükk, mille ümbermõõt on suurem kui $\dfrac{P}{k}$.

b) Tõesta, et kui algne kolmnurk on võrdkülgne, siis leidub tükk, mille ümbermõõt on vähemalt $\dfrac{P}{\sqrt{k}}$.

Ülesanne 36.24 (Sügisene lahtine võistlus 2010, vanem rühm) Teravnurkse kolmnurga ABC ümberringjoone kaarel AB, mis ei sisalda punkti C, valitakse punkt D ning sirgetel DA ja DB vastavalt sellised punktid A_1 ja B_1, et $CA_1 \perp DA$ ja $CB_1 \perp DB$. Tõesta, et $|AB| \geqslant |A_1B_1|$.

Ülesanne 36.25 (Kevadine lahtine võistlus 1999, vanem rühm) On antud kaks täisnurkset kolmnurka, millest esimese siseringjoon on teisele ümberringjooneks. Olgu nende kolmnurkade pindalad vastavalt S ja S'. Tõesta, et

$$\frac{S}{S'} \geqslant 3 + 2\sqrt{2}.$$

Ülesanne 36.26 (Lõppvoor 2015, 12. klass) Olgu täisnurkse kolmnurga ümberringjoone raadius R ja siseringjoone raadius r. Tõesta, et $R \geqslant (1+\sqrt{2})r$.

Ülesanne 36.27 (Lõppvoor 2010, 12. klass) Nelinurga külgede pikkused on a, b, c, d ja pindala S. Tõesta, et kehtib võrratus

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geqslant 4S,$$

ning tee kindlaks, milliste nelinurkade korral kehtib võrdus.

Vaata ka ülesannet 37.8.

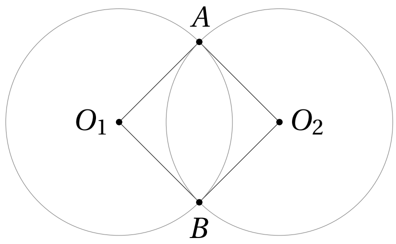
Lahendused

36.11 Vastus: r^2.

Nelinurk O_1AO_2B on romb, sest kõik tema küljed on pikkusega r. Antud küljepikkusega rombidest on kõige suurema pindalaga ruut. Selles väites veendumiseks võime tähistada näiteks $\angle AO_1B = \alpha$; siis

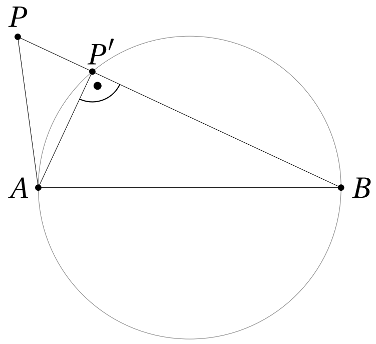
$$S_{O_1AO_2B} = 2S_{AO_1B} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot r \cdot r \cdot \sin\alpha = r^2 \cdot \sin\alpha \leqslant r^2,$$

kusjuures võrdus kehtib parajasti siis, kui $\sin\alpha = 1$ ehk $\alpha = 90^\circ$.



36.12 Olgu antud kumer nelinurk $ABCD$. Kõik tema küljed on kindlasti vaadeldavate ringidega kaetud. Oletame vastuväiteliselt, et nelinurga $ABCD$ sisepiirkonnas leidub punkt P, mis jääb väljapoole kõiki ringe, mille diameetriteks selle nelinurga küljed on.

Paneme tähele, et kõik nelinurga küljed peavad punktist P paistma teravnurga all. Vaatleme näiteks külge AB ja sellele kui diameetrile joonestatud ringjoont. Sirgete PA ja PB lõikepunktidest vaadeldava ringjoonega peab vähemalt üks asuma sirgest AB samal pool kui punkt P. Olgu selleks üldisust kitsendamata ringjoone ja sirge PB lõikepunkt, mida tähistame P'.

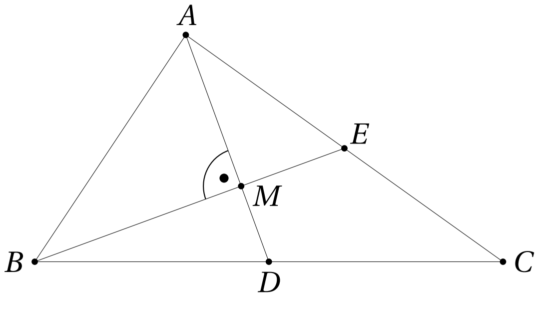


Thalese teoreemi põhjal on $\angle BP'A = 90^\circ$. Järelikult ka $\angle AP'P = 90^\circ$, mistõttu $\angle BPA = \angle P'PA < 90^\circ$.

Samamoodi saame võrratused $\angle BPC < 90^\circ$, $\angle CPD < 90^\circ$ ja $\angle DPA < 90^\circ$. See aga pole võimalik, sest

$$\angle APB + \angle BPC + \angle CPD + \angle DPA = 360^\circ\,.$$

36.13 Olgu D ja E vastavalt külgede BC ja AC keskpunktid ning olgu M kolmnurga ABC mediaanide lõikepunkt. Ülesande tingimuste põhjal $\angle AMB = 90^\circ$. Teeme joonise.



Mediaanide lõikepunkt jaotab mediaanid suhtes 1 : 2. Tähistades $|MD| = a$ ja $|ME| = b$, saame järelikult $|AM| = 2a$ ja $|BM| = 2b$.

Kuna AMB on täisnurkne kolmnurk, teame Pythagorase teoreemist, et

$$|AB| = \sqrt{|AM|^2 + |BM|^2} = \sqrt{(2a)^2 + (2b)^2} = 2\sqrt{a^2 + b^2}\,.$$

Täisnurksed on ka kolmnurgad AME ja BMD. Seega saame Pythagorase teoreemi abil avaldada ka külgede AC ja BC pikkused:

$$|AC| = 2|AE| = 2\sqrt{|AM|^2 + |ME|^2} = 2\sqrt{4a^2 + b^2}\,,$$
$$|BC| = 2|BD| = 2\sqrt{|BM|^2 + |MD|^2} = 2\sqrt{4b^2 + a^2}\,.$$

Lahenduse lõpetamiseks piisab tähele panna järgmisi võrratusi:

$$|AC| = 2\sqrt{4a^2 + b^2} > 2\sqrt{a^2 + b^2} = |AB|\,,$$
$$|BC| = 2\sqrt{4b^2 + a^2} > 2\sqrt{a^2 + b^2} = |AB|\,.$$

36.14 Paneme kõigepealt tähele, et kui kõik ülesande tingimused kehtivad, moodustavad punktid A, B, C ja D kumera nelinurga. Tõepoolest, kui näiteks punkt A asuks kolmnurga BCD sees, asuks ta muuhulgas ka selle kolmnurga ümberringjoone sees. Sama arutelu kehtib ka teiste punktide korral.

Oletame nüüd üldisust kitsendamata, et moodustub kumer nelinurk $ABCD$ tippudega selles järjekorras. Kuna punkt A asub väljaspool kolmnurga BCD ümberringjoont, peab kehtima võrratus $\angle DAB + \angle BCD < 180^\circ$ (vt teoreemi 27.1). Kuna punkt B asub väljaspool kolmnurga CDA ümberringjoont, peab kehtima ka võrratus $\angle ABC + \angle CDA < 180^\circ$. Neid võrratusi liites saame

$$\angle DAB + \angle BCD + \angle ABC + \angle CDA < 360^\circ\,,$$

mis aga pole võimalik, sest kumera nelinurga sisenurkade summa on 360°.

36.15 Vaatleme kolmnurka küljepikkustega a, b ja c ning olgu a nende külgede seast pikim. Olgu sellele küljele tõmmatud kõrgus h_a. Kolmnurga pindala valemitest teame, et

$$\frac{ah_a}{2} = S = pr = \frac{a+b+c}{2}r\,.$$

Kuivõrd $a \geqslant b$ ja $a \geqslant c$, saame $\frac{a+b+c}{2}r \leqslant \frac{3a}{2}r$ ning seega

$$\frac{ah_a}{2} \leqslant \frac{3a}{2}r\,,$$

millest järeldub $h_a \leqslant 3r$ ehk $\frac{1}{3}h_a \leqslant r$, nagu oligi tarvis.

Võrdus kehtib parajasti siis, kui $a = b$ ja $a = c$, st siis kui kolmnurk on võrdkülgne.

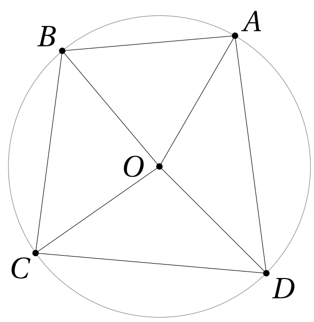
36.16 Vastus: 2.

Kui $ABCD$ on ruut ümberringjoone raadiusega 1, siis on tema pindala 2. Näitame, et see ongi suurim võimalik väärtus.

Kõigepealt paneme tähele, et vaadeldava ringjoone keskpunkt O peab jääma nelinurga $ABCD$ sisse. Kui see nii ei ole, peab kogu nelinurk mahtuma poolringi sisse, järelikult ei saa tema pindala ületada poolringi pindala $\frac{\pi \cdot 1^2}{2} = \frac{\pi}{2}$. Aga kuna $\frac{\pi}{2} < 2$, ei saa niisugusel juhul pindala maksimum kindlasti realiseeruda.

Kui ringjoone keskpunkt O jääb nelinurga $ABCD$ sisse, saame selle nelinurga pindala avaldada kujul

$$S_{ABCD} = S_{AOB} + S_{BOC} + S_{COD} + S_{DOA}.$$



Paneme tähele, et

$$S_{AOB} = \frac{1}{2} \cdot |OA| \cdot |OB| \cdot \sin\angle AOB = \frac{\sin\angle AOB}{2} \leqslant \frac{1}{2},$$

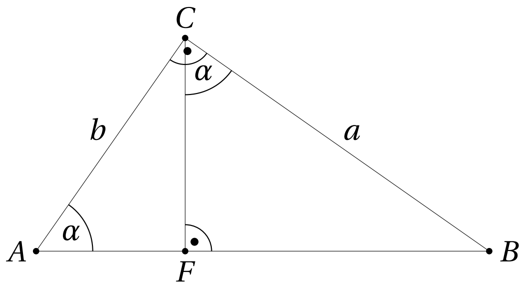
kusjuures võrdus kehtib parajasti siis, kui $\angle AOB = 90^\circ$. Samasugused võrratused saame ka kolmnurkade BOC, COD ja DOA jaoks, kusjuures võrdused $\angle AOB = \angle BOC = \angle COD = \angle DOA = 90^\circ$ saavad kõik korraga kehtida ning sel juhul on nelinurk $ABCD$ ruut pindalaga $4 \cdot \frac{1}{2} = 2$.

Kuna siinusfunktsioon on vahemikus $[0^\circ; 180^\circ]$ nõgus, saame kasutada ka Jenseni võrratust (vaata jaotist 15):

$$\begin{aligned}
S_{ABCD} &= S_{AOB} + S_{BOC} + S_{COD} + S_{DOA} = \\
&= \frac{\sin\angle AOB}{2} + \frac{\sin\angle BOC}{2} + \frac{\sin\angle COD}{2} + \frac{\sin\angle DOA}{2} = \\
&= 2 \cdot \left(\frac{\sin\angle AOB}{4} + \frac{\sin\angle BOC}{4} + \frac{\sin\angle COD}{4} + \frac{\sin\angle DOA}{4}\right) \leqslant \\
&\leqslant 2 \cdot \sin\left(\frac{\sin\angle AOB + \sin\angle BOC + \sin\angle COD + \sin\angle DOA}{4}\right) = \\
&= 2 \cdot \sin\left(\frac{360^\circ}{4}\right) = 2 \cdot \sin(90^\circ) = 2,
\end{aligned}$$

kusjuures võrdus kehtib parajasti siis, kui $\angle AOB = \angle BOC = \angle COD = \angle DOA = 90^\circ$.

36.17 Olgu vaadeldav täisnurkne kolmnurk ABC täisnurgaga tipu C juures ning olgu F tipu C ristprojektsioon hüpotenuusile AB. Tähistame $a = |BC|$, $b = |CA|$ ja $\alpha = \angle CAB$.



Lihtne on näha, et

$$\angle BCF = 90^\circ - \angle FCA = \angle CAF = \alpha\,.$$

Täisnurksetest kolmnurkadest AFC ja CFB saame siis vastavalt

$$|AF| = b\cos\alpha \quad \text{ja} \quad |FB| = a\sin\alpha\,.$$

Täisnurksest kolmurgast ABC teame, et $\tan\alpha = \dfrac{a}{b}$ ehk $a = b\tan\alpha$. Selle võrduse abil saame ka $|FB|$ avaldada kaateti b pikkuse kaudu:

$$|FB| = a\sin\alpha = b\tan\alpha\sin\alpha = b\frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha}\,.$$

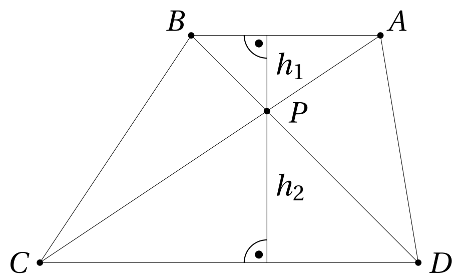
Nüüd saame ülesande võrratuse teisendada samaväärsele kujule:

$$\begin{aligned}
|AC| - |AF| &< \frac{|FB|}{2}\,,\\
b - b\cos\alpha &< \frac{b}{2}\cdot\frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha}\,,\\
1 - \cos\alpha &< \frac{1}{2}\cdot\frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha}\,,\\
2\cos\alpha - 2\cos^2\alpha &< \sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha\,,\\
0 &< 1 - 2\cos\alpha + \cos^2\alpha = (1-\cos\alpha)^2\,.
\end{aligned}$$

Viimane võrratus aga kehtib, sest $\alpha \in (0^\circ; 90^\circ)$.

36.18 Olgu tipust P kolmnurkadele PAB ja PCD tõmmatud kõrgused vastavalt h_1 ja h_2. Siis avaldub trapetsi $ABCD$ pindala valemiga

$$S_{ABCD} = \frac{(|AB| + |CD|)(h_1 + h_2)}{2}\,.$$



Kuna $S_{ABCD} = S_{PAB} + S_{PCD} + S_{PBC} + S_{PDA}$, on ülesande võrratus samaväärne järgmiste võrratustega:

$$\begin{aligned}
2(S_{PAB} + S_{PCD}) &> S_{ABCD}\,,\\
|AB|\cdot h_1 + |CD|\cdot h_2 &> \frac{(|AB|+|CD|)(h_1+h_2)}{2}\,,\\
2|AB|\cdot h_1 + 2|CD|\cdot h_2 &> |AB|\cdot h_1 + |AB|\cdot h_2 + |CD|\cdot h_1 + |CD|\cdot h_2\,,\\
|AB|\cdot h_1 + |CD|\cdot h_2 &> |AB|\cdot h_2 + |CD|\cdot h_1\,,\\
(|AB|-|CD|)(h_1-h_2) &> 0\,.
\end{aligned}$$

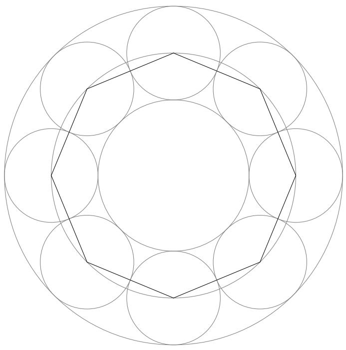
Tänu põiknurkade võrdsusele teame, et $\angle PAB = \angle PCD$ ja $\angle PBA = \angle PDC$. Järelikult $\triangle PAB \sim \triangle PCD$, kusjuures need kolmnurgad ei saa olla kongruentsed, sest muidu oleks $ABCD$ rööpkülik. Järelikult peab kehtima kas võrratus $|AB| > |CD|$ või $|AB| < |CD|$. Tänu kolmnurkade PAB ja PCD sarnasusele peab esimesel juhul kehtima võrratus $h_1 > h_2$ ning teisel juhul $h_1 < h_2$. Mõlemal juhul kehtib aga võrratus $(|AB|-|CD|)(h_1-h_2) > 0$, mida oligi tarvis tõestada.

36.19 Teisendame ülesande võrratust:

$$\begin{aligned}
nr + \pi r &< \pi R\,,\\
nr &< \pi(R-r)\,,\\
2nr &< 2\pi(R-r)\,.
\end{aligned}$$

Saadud võrratuse parem pool kujutab endast niisuguse ringjoone pikkust, mille raadius on $R-r$. Selline on näiteks ringjoon c kuullaagri ristlõike tasandil, mille keskpunkt asub silindrite ühisel teljel ja mis läbib kuulide keskpunte.

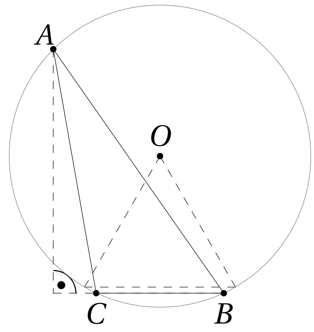
Ühendades kõrvutasuvate kuulde keskpunktid lõikudega, moodustub korrapärane n-nurk küljepukkusega $2r$ ja ümbermõõduga $n\cdot 2r$. Kuna see n-nurk asub ringjoone c sees, on tema ümbermõõt väiksem kui ringjoonel c, mis annabki nõutud võrratuse.



36.20 Tähistame vaadeldavat kolmnnurka ABC ning oletame kõigepealt vastuväiteliselt, et tal leidub nurk, mis pole suurem kui 30°; olgu see nurk üldisust kitsendamata CAB. Väidame, et selle nurga vastaskülg CB ei saa olla pikem kui r.

Olgu O kolmnurga ABC ümberringjoone keskpunkt, siis kesknurga ja piirdenurga vahelisest seosest saame $\angle COB = 2\angle CAB \leqslant 60^\circ$. Teame, et kesknurk suurusega 60° toetub kõõlule pikkusega r, sest tekib võrdkülgne kolmnurk. Niisiis peab tõepoolest kehtima võrratus $|CB| \leqslant r$.

Teisest küljest peab küljele CB tipust A tõmmatud kõrgus olema kindlasti väiksem kui ringjoone diameeter $2r$.

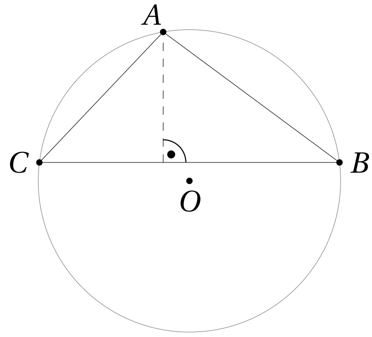


Kokkuvõtteks saame

$$S_{ABC} < \frac{r \cdot 2r}{2} = r^2,$$

mis on vastuolus ülesande tingimustega. Saadud vastuolu näitab, et kolmnurga ABC kõik nurgad peavad olema suuremad kui 30°.

Oletame nüüd vastuväiteliselt, et vaadeldava kolmnurga mingi nurk (olgu ta näiteks jälle BAC) on suurem kui 90°. Kuna diameetrile toetuv piirdenurk on täpselt 90°, pole nurga BAC vastaskülg CB diameeter, mistõttu $|CB| < 2r$. Teisalt peab sellele küljele tõmmatud kõrgus olema väiksem kui r.



Järelikult saame

$$S_{ABC} < \frac{2r \cdot r}{2} = r^2,$$

mis on jällegi vastuolus ülesande tingimustega. Järelikult ei saa kolmnurgas ABC olla ühtegi nürinurka.

36.21 Lihtne on näha, et raadiusega 2 ringi pindala ja ümbermõõt on mõlemad võrdsed arvuga 4π. Järelikult on arvuliselt võrdsed ka niisuguse ringi mingi sektori pindala ja sellele sektorile vastava ringjoone kaare pikkus. Tõepoolest, kui sektori kesknurk on α, saame mõlema vaadeldava suuruse väärtuseks $\frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 4\pi$.

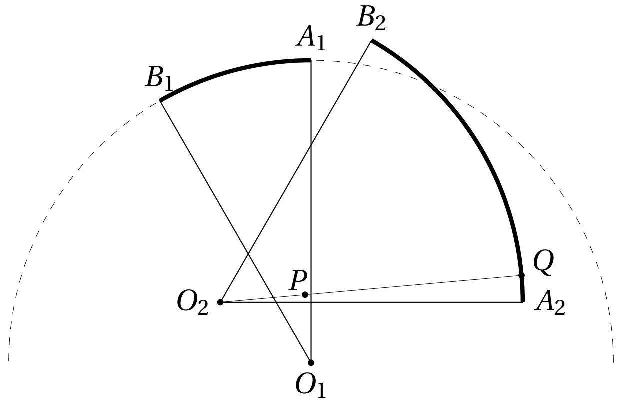
Ülesandes kirjeldatud kujundit piirab mingi lõplik arv ringjoonte kaari. Leiame igale kaarele vastava ringi sektori. Ülesande väide on tõestatud, kui näitame, et ühelgi kahel niisugusel sektoril ei saa olla ühiseid sisepunkte, sest kogu kujundi pindala peab siis olema vähemalt sama suur kui vaadeldavate sektorite pindalade summa. See suurus on aga arvuliselt võrdne ülesande kujundit piiravate kaarte pikkuste summaga.

Oletame vastuväiteliselt, et leidub kaks vaadeldavat sektorit, milledel omakorda leidub ühiseid sisepunkte. Olgu nende sektorite keskpunktid O_1 ja O_2 ning neile vastavad kaared A_1B_1 ja A_2B_2. Lahenduse võtmeks on tähelepanek, et kui neil sektoritel leidub ühiseid sisepunkte, peab leiduma ka niisugune ühine sisepunkt P, mille kaugus punktidest O_1 ja O_2 on erinev. Olgu üldisust kitsendamata $|O_1P| < |O_2P|$.

Tähistagu Q kiire O_2P lõikepunkti kaarega A_2B_2. Kolmnurgavõrratusest saame siis

$$|O_1Q| \leqslant |O_1P| + |PQ| < |O_2P| + |PQ| = |O_2Q| = 2\,.$$

Järelikult asub punkt Q niisuguse ringjoone sisepiirkonnas, mille keskpunktiks on O_1 ja raadiuseks 2. Seega ei saa punkt Q asuda ülesande kujundi piirjoonel; vastuolu.



36.22 Vastus: väiksem.

Olgu väikese ja suure kera raadiused vastavalt r ja R. Väikese kera ruumala on siis $\frac{4}{3}\pi r^3$ ja suure kera ruumala $\frac{4}{3}\pi R^3$. Ilmselt peab kehtima võrratus $R > 2r$, sest ükski väikestest keradest ei sisalda suure kera keskpunkti. Järelikult

$$\frac{4}{3}\pi R^3 > \frac{4}{3}\pi(2r)^3 = 8\cdot\frac{4}{3}\pi r^3\,.$$

Nelja väikese kera koguruumala on aga $4\cdot\frac{4}{3}\pi r^3$, mis on seega vähem kui pool suure kera ruumalast.

36.23 a) Kolmnurga tükkideks jagamisel jagunevad ka algse kolmnurga küljed nende tükkide vahel. Kuna tükke on k, peab nende seas leiduma mõni, mis katab algse kolmnurga külgedest vähemalt $\frac{P}{k}$. Et $k \geqslant 2$, peab sellel tükil leiduma ka külg, mis ei asu algse kolmnurga küljel, seega on tema ümbermõõt rangelt suurem kui $\frac{P}{k}$.

b) Olgu algse võrdkülgse kolmnurga küljepikkus 1, siis $P = 3$ ja tema pindala $S = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\cdot \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4}$.

Jagades antud kolmnurga k kolmnurkseks tükiks, peab nende tükkide seas leiduma niisugune, mille pindala S_1 on vähemalt $\frac{S}{k}$. Hindame selle tüki ümbermõõtu, mistarvis näitame sisuliselt, et fikseeritud pindalaga kolmnurkade seast on vähima ümbermõõduga võrdkülgne kolmnurk.

Kuidas siduda omavahel kolmnurga pindala ja ümbermõõt? Üks võimalus on kasutada Heroni valemit (vaata teoreem 37.3), mille järgi

$$S_1 = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}\,,$$

kus a, b ja c on vaadeldava kolmnurkse tüki küljepikkused ning $p = \dfrac{a+b+c}{2}$.

Aritmeetilise ja geomeetrilise keskmise vahelisest võrratusest saame

$$\sqrt[3]{(p-a)(p-b)(p-c)} \leqslant \frac{(p-a)+(p-b)+(p-c)}{3} = \frac{3p-2p}{3} = \frac{p}{3},$$

seega

$$S_1^2 = p(p-a)(p-b)(p-c) \leqslant p \cdot \frac{p^3}{27} = \frac{(a+b+c)^4}{16 \cdot 27}.$$

Niisiis saame selle kolmnurkse tüki ümbermõõtu altpoolt hinnata võrratusega

$$a+b+c \geqslant 2 \cdot 3^{\frac{3}{4}} \cdot \sqrt{S_1},$$

kusjuures võrdus kehtib parajasti siis, kui $p-a = p-b = p-c$ ehk $a = b = c$.

Asendades viimasesse avaldisse $S_1 \geqslant \dfrac{S}{k} = \dfrac{\sqrt{3}/4}{k}$, saame

$$2 \cdot 3^{\frac{3}{4}} \cdot \sqrt{S_1} \geqslant 2 \cdot 3^{\frac{3}{4}} \cdot \sqrt{\frac{\sqrt{3}/4}{k}} = \frac{3}{\sqrt{k}} = \frac{P}{\sqrt{k}},$$

mistõttu $a+b+c \geqslant \dfrac{P}{\sqrt{k}}$, nagu oligi tarvis.

Näitamaks, et fikseeritud pindalaga kolmnurkade seast on vähima ümbermõõduga võrdkülgne kolmnurk, saame kasutada ka Jenseni võrratuse järeldust 15.1. Kuivõrd kolmnurga pindala saab arvutada valemiga $S = pr$, kus r tähistab siseringjoone raadiust, on ümbermõõdu minimeerimine samaväärne siseringjoone raadiuse maksimeerimisega. Järeldus 15.1 ütleb, et kõigi niisuguste kolmnurkade seas, millele antud ringjoon on siseringjooneks, on kõige väiksema pindalaga korrapärane kolmnurk. Järelikult on fikseeritud pindala korral maksimaalse siseringjoone raadiusega (ehk minimaalse ümbermõõduga) samuti korrapärane (ehk võrdkülgne) kolmnurk.

Kui võrdkülgse kolmnurga küljepikkus on a' ja pindala S', siis

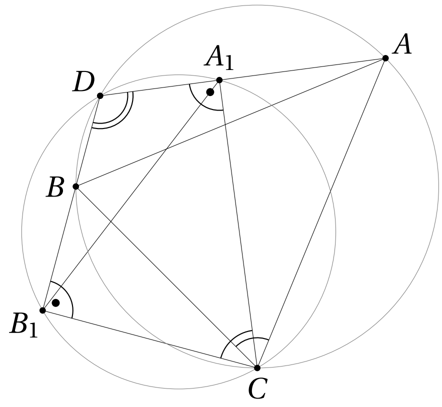
$$S' = \frac{1}{2} \cdot a' \cdot a' \cdot \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3} \cdot a'^2}{4}, \quad \text{kust saame} \quad a' = \sqrt{\frac{4S'}{\sqrt{3}}} = 2 \cdot 3^{-\frac{1}{4}} \cdot \sqrt{S'}.$$

Järelikult iga kolmnurk, mille pindala on S', peab omama ümbermõõtu, mille pikkus on vähemalt

$$3a' = 2 \cdot 3^{\frac{3}{4}} \cdot \sqrt{S'}.$$

Lahenduse lõpuleviimiseks paneme tähele, et kui tükkide seas leidub võrdkülgne kolmnurk pindalaga vähemalt $\dfrac{S}{k}$, on ta suure kolmnurgaga sarnane, kusjuures nende sarnasustegur on vähemalt $\dfrac{1}{\sqrt{k}}$. Järelikult peab selle tüki ümbermõõt olema vähemalt $\dfrac{P}{\sqrt{k}}$. Kui tükk pole võrdkülgne, peab tema ümbermõõt ülaltõestatu põhjal veel suurem olema.

36.24 Ülesande tingimuste põhjal on $ADBC$ kõõlnelinurk. Teisest küljest, kuna kehtivad võrdused $\angle CA_1D = \angle CB_1D = 90^\circ$, siis osutub kõõlnelinurgaks ka A_1DB_1C, kusjuures tema diameeter on CD.



Kuna $\angle ADB = \angle A_1DB_1$, peavad võrdsed olema ka vaadeldavate kõõlnelinurkade vastasnurgad, st $\angle BCA = \angle B_1CA_1$. Tähistades nende kõõlnelinurkade ümberringjoonte raadiused vastavalt R ja R_1, saame siinusteoreemist võrdused

$$\frac{|AB|}{\sin\angle BCA} = 2R \quad \text{ja} \quad \frac{|A_1B_1|}{\sin\angle B_1CA_1} = 2R_1\,.$$

Järelikult

$$\frac{|AB|}{2R} = \sin\angle BCA = \sin\angle B_1CA_1 = \frac{|A_1B_1|}{2R_1}\,.$$

Eelpool nägime, et $R_1 = |CD|$. Kuna D on punkt kolmnurga ABC ümberringjoonelt, peab kehtima võrratus $R \geqslant R_1$, millest nüüd järeldubki omakorda ülesande väide $|AB| \geqslant |A_1B_1|$.

Harjutus 36.1 Tegelikult pole ülesande väite kehtimiseks vaja ei seda, et punktid C ja D asuks erinevatel kaartel AB, ega isegi seda, et kolmnurk ABC oleks teravnurkne. Mõtle ülesande lahendus läbi ka üldjuhul. Kas mingitel tingimustel tekib teine võimalik joonis? Olukorra visualiseerimiseks võid appi võtta GeoGebra.

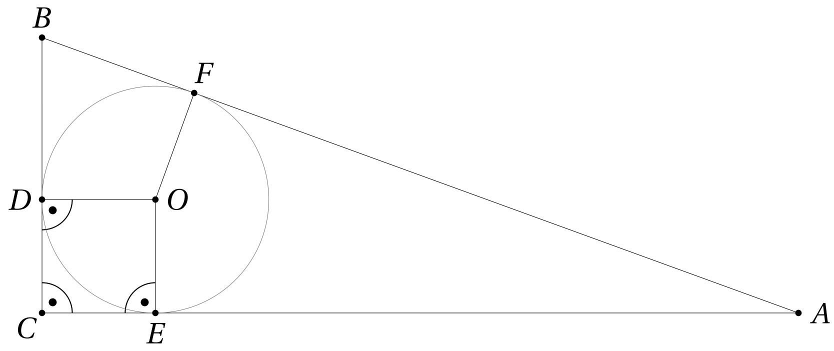
36.25 Olgu ülesandes kirjeldatud ringjoone raadius r. Lahenduse ideeks on hinnata pindalasid S ja S' raadiuse r kaudu.

Uurime kõigepealt seda kolmnurka pindalaga S', millele vaadeldav ringjoon on ümberringjooneks. Kuna kolmnurk on täisnurkne, on tema hüpotenuus vaadeldava ringjoone diameetriks pikkusega $2r$. Sellele hüpotenuusile toetuva kõrguse suurim võimalik pikkus on r, niisiis saame pindala S' ülevalt hinnata kui

$$S' \leqslant \frac{2r \cdot r}{2} = r^2\,.$$

Uurime nüüd kolmnurka pindalaga S, millele vaadeldav ringjoon on siseringjooneks, ja selgitame välja pindala S vähima võimaliku väärtuse. Teame, et kolmnurga pindala avaldub tema siseringjoone raadiuse kaudu kujul $S = pr$, kus p on kolmnurga poolümbermõõt.

Olgu vaadeldav kolmnurk ABC täisnurgaga tipu C juures. Olgu tema siseringjoone puuutepunktid külgedega BC, CA ja AB vastavalt D, E ja F. Teeme joonise.



Tähistame kaatetite pikkused $|BC| = a$ ja $|CA| = b$. Kuna $\angle ODC = \angle DCE = \angle CEO = 90^\circ$ ja $|DO| = |EO| = r$, on $ODCE$ ruut küljepikkusega r. Järelikult ka $|DC| = |CE| = r$, mistõttu $|FB| = |BD| = |BC| - |DC| = a - r$ ja $|AF| = |EA| = |CA| - |CE| = b - r$. Kolmnurga poolümbermõõt p avaldub seega kujul

$$p = \frac{|AB| + |BC| + |CA|}{2} = \frac{|AF| + |BF| + a + b}{2} = \frac{b - r + a - r + a + b}{2} = \\ = a + b - r\,.$$

Nüüd saame vaadeldava kolmnurga pindala avaldistest:

$$\begin{aligned} \frac{ab}{2} &= pr = (a+b-r)r\,, \\ ab &= 2ar + 2br - 2r^2\,, \\ b(a-2r) &= 2ar - 2r^2\,, \\ b &= \frac{2ar - 2r^2}{a - 2r}\,. \end{aligned}$$

Järelikult

$$S = \frac{ab}{2} = \frac{a^2r - ar^2}{a - 2r}\,.$$

Leiame pindala S avaldise tuletise muutuja a järgi:

$$\begin{aligned} S' &= \frac{(a^2r - ar^2)' \cdot (a-2r) - (a^2r - ar^2) \cdot (a-2r)'}{(a-2r)^2} = \\ &= \frac{(2ar - r^2) \cdot (a-2r) - (a^2r - ar^2) \cdot 1}{(a-2r)^2} = \\ &= \frac{2a^2r - 4ar^2 - ar^2 + 2r^3 - a^2r + ar^2}{(a-2r)^2} = \\ &= \frac{a^2r - 4ar^2 + 2r^3}{(a-2r)^2}\,. \end{aligned}$$

Leiame tuletise nullkoha(d). Selleks võrdustame lugeja nulliga ja lahendame ruutvõrrandi $a^2r - 4ar^2 + 2r^3 = 0$:

$$a = \frac{4r^2 \pm \sqrt{16r^4 - 4 \cdot r \cdot 2r^3}}{2r} = \frac{4r^2 \pm \sqrt{8r^4}}{2r} = \frac{4r^2 \pm 2r^2\sqrt{2}}{2r} = (2 \pm \sqrt{2})r\,.$$

Paneme tähele, et kaateti pikkus a peab rahuldama võrratust $a > 2r$, seega ei saa ülalleitud tuletise avaldise nimetaja olla 0. Teiseks näeme, et $(2 - \sqrt{2})r < 2r$, järelikult sobib lahendiks ainult väärtus $a = (2+\sqrt{2})r$. Kuna nii protsessis $a \to 2r$ kui ka protsessis $a \to \infty$ suureneb pindala S tõkestamatult, peab leitud väärtus $a = (2+\sqrt{2})r$ vastama pindala S miinimumkohale.

Leiame külje b pikkuse sellel kohal:

$$b = \frac{2ar - 2r^2}{a - 2r} = \frac{2(2+\sqrt{2})r^2 - 2r^2}{2r + \sqrt{2}r - 2r} = \frac{2r^2 + 2\sqrt{2}r^2}{\sqrt{2}r} = (2+\sqrt{2})r = a\,.$$

Niisiis on minimaalse pindalaga kolmnurga näol tegemist võrdhaarse täisnurkse kolmnurgaga. Leiame tema pindala:

$$S_{\min} = \frac{ab}{2} = \frac{((2+\sqrt{2})r)^2}{2} = \frac{(4+4\sqrt{2}+2)r^2}{2} = (3+2\sqrt{2})r^2\,.$$

Seega $S \geqslant (3+2\sqrt{2})r^2$. Kuna eespool tõestasime, et $S' \leqslant r^2$, saame kokkuvõttes

$$S \geqslant (3+2\sqrt{2})r^2 \geqslant (3+2\sqrt{2})S'\,,$$

millest järeldubki ülesande võrratus.

Tuletise kasutamine viib kindlasti sihile, aga saadav lahendus kipub minema pikaks ja sellisena veaohtlikuks. Võrratusele $S \geqslant (3+2\sqrt{2})r^2$ on olemas elegantne ning oluliselt lühem lahendus, kuid selle peale tulemine vajab vaimuvälgatust.

Tähistame ka $|AB| = c$, siis Pythagorase teoreemist teame, et $c = \sqrt{a^2+b^2}$. Järelikult

$$S = pr = \frac{a+b+c}{2}r = \frac{a+b+\sqrt{a^2+b^2}}{2}r\,.$$

Nüüd tuleb läbi näha, et avaldistele $a+b$ ja a^2+b^2 võib rakendada aritmeetilise ja geomeetrilise keskmise vahelist võrratust, millest saame $a+b \geqslant 2\sqrt{ab}$ ja $a^2+b^2 \geqslant 2ab$. Järelikult

$$\frac{a+b+\sqrt{a^2+b^2}}{2}r \geqslant \frac{2\sqrt{ab}+\sqrt{2ab}}{2}r\,.$$

Teisest küljest $S = \dfrac{ab}{2}$. Teisendame saadavat võrratust

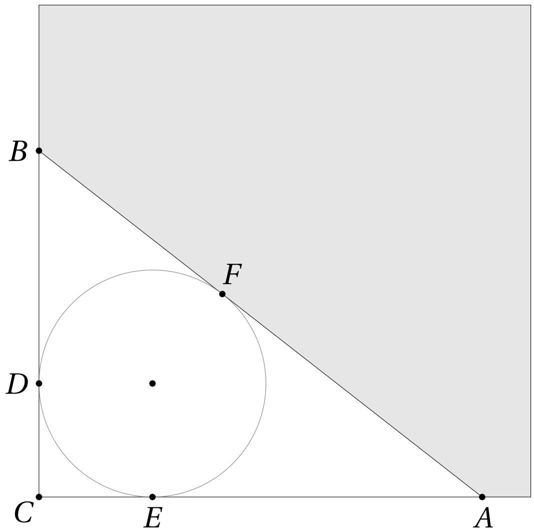
$$\begin{aligned}
\frac{ab}{2} &\geqslant \frac{2\sqrt{ab}+\sqrt{2ab}}{2}r\,,\\
\sqrt{ab} &\geqslant (2+\sqrt{2})r\,,\\
ab &\geqslant (2+\sqrt{2})^2r^2 = (6+2\sqrt{2})r^2\,.
\end{aligned}$$

Kokkuvõttes näeme, et $S = \dfrac{ab}{2} \geqslant (3+\sqrt{2})r^2$, mida oligi tarvis.

Tuletise abil näitasime ülalpool, et pindala S miinimumi realiseeriv kolmnurk peab olema võrdhaarne. Sellele väitele saab anda ka füüsikalise tõestuse.

Kujutame ette, et vaadeldava täisnurkse kolmnurga ABC näol on tegemist vaakumkambriga, mille sisse on paigutatud kambri seinu puutuv ringikujuline raam raadiusega r. Kambri kaks seina on määratud fikseeritud sirgetega BC ja CA, kolmas sein AB aga saab liikuda nii, et tema otspunktid libisevad nendel sirgetel ning tema ja raami puutepunkt F libiseb mööda raami.

Asetame vaakumkambri gaasiga täidetud ruudukujulisse ruumi nii, et kambri nurk C asub ruumi nurgas (vt joonist).



Gaas püüab oma ruumala suurendada, seega jääb sein AB oma libisemisel paigale siis, kui kolmnurga ABC pindala on vähim võimalik. Teisest küljest tähendab tasakaaluasend seda, et gaasi poolt avaldatav rõhk lõikudele AF ja BF on võrdne (mõtle neist kui kangi õlgadest!). See tähendab, et $|AF| = |BF|$, millest puutujalõikude võrdsuse tõttu järeldub omakorda $|AC| = |BC|$.

Kasutades ülal sisseviidud tähiseid saame $|AB| = 2|AF| = 2|AE| = 2(a-r)$. Pythagorase teoreem annab

$$\begin{aligned} |BC|^2 + |CA|^2 &= |AB|^2\,, \\ 2a^2 &= 4(a-r)^2\,, \\ 2a^2 &= 4a^2 - 8ar + 4r^2\,, \\ 2a^2 - 8ar + 4r^2 &= 0\,, \\ a^2 - 4ar + 2r^2 &= 0\,, \\ a &= 2r \pm \sqrt{4r^2 - 2r^2}\,, \\ a &= (2 \pm \sqrt{2})r\,. \end{aligned}$$

Nagu ka eelpool tähele panime, peab kehtima võrratus $a > 2r$. Seega sobib ainult lahend $a = (2+\sqrt{2})r$, mis annab vaadeldava kolmnurga pindala vähimaks võimalikuks väärtuseks $\dfrac{a^2}{2} = (3+\sqrt{2})r^2$.

Rohkem materjali füüsikaliste printsiipide rakendamisest matemaatikaülesannete lahendamisel leiab huvitatud lugeja Mark Levi suurepärasest raamatust [7].

36.26 Olgu vaadeldava täisnurkse kolmnurga ümberringjoone raadius R fikseeritud. Uurime, milline saab olla tema siseringjoone raadiuse r suurim võimalik väärtus.

Olgu selle kolmnurga kaatetid a ja b. Sama moodi nagu ülesande 36.25 lahenduses saame puutujalõikude võrdsuse abil näidata, et $(a-r)+(b-r) = 2R$ ehk $a+b-2r = 2R$. Kuna ümberringjoone raadius R on fikseeritud, on siseringjoone raadius r maksimaalne parajasti siis, kui maksimaalse väärtuse omandab kaatetite pikkuste summa $a+b$.

Kuna täisnurkse kolmnurga hüpotenuus on pikkuselt võrdne tema ümberringjoone diameetriga, siis Pythagorase teoreemist teame, et $a^2+b^2 = (2R)^2 = 4R^2$.

Niisiis on vaja maksimeerida summa $a+b$ tingimusel $a^2+b^2=4R^2$. Selleks võime kasutada aritmeetilise ja ruutkeskmise vahelist võrratust (vaata teoreemi 13.4)

$$\frac{a+b}{2} \leqslant \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

Niisiis saame

$$\frac{a+b}{2} \leqslant \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} = \sqrt{\frac{4R^2}{2}} = \sqrt{2}R,$$

millest omakorda

$$r = \frac{a+b-2R}{2} = \frac{a+b}{2} - R \leqslant \sqrt{2}R - R = (\sqrt{2}-1)R.$$

Järelikult

$$R \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}-1} r = \frac{\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} r = \frac{\sqrt{2}+1}{2-1} r = (1+\sqrt{2})r,$$

mida oligi tarvis tõestada.

Harjutus 36.2 Kui aritmeetilise keskmise ja ruutkeskmise vaheline võrratus meelde ei tule, pole kõik veel sugugi kadunud. Alati on võimalik kasutada haamrit nimega tuletis. Võrdusest $a^2+b^2=4R^2$ saame avaldada $b=\sqrt{4R^2-a^2}$, mistõttu $a+b=a+\sqrt{4R^2-a^2}$. Leia selle avaldise tuletis muutuja a järgi ja vii lahendus iseseisvalt lõpule.

36.27 Olgu α ja β nende nurkade suurused, mis asuvad vastavalt külgede vahel pikkustega a ja b ning c ja d. Siis

$$S = \frac{1}{2}ab\sin\alpha + \frac{1}{2}cd\sin\beta.$$

(Paneme tähele, et see võrdus kehtib isegi siis, kui nelinurk ei ole kumer ja üks neist nurkadest on suurem kui 180°!)

Aritmeetilise ja geomeetrilise keskmise vahelisest võrratusest teame, et mittenegatiivsete x ja y jaoks $xy \leqslant \dfrac{x^2+y^2}{2}$; samuti kehtib võrratus $\sin\varphi \leqslant 1$ iga nurga φ korral. Niisiis saame

$$S = \frac{1}{2}ab\sin\alpha + \frac{1}{2}cd\sin\beta \leqslant \frac{a^2+b^2}{4} + \frac{c^2+d^2}{4},$$

millest järeldubki vajalik võrratus.

Võrdus kehtib parajasti siis, kui $a=b$, $c=d$ ning $\alpha=\beta=90^\circ$, st nelinurk moodustub kahest võrdhaarsest täisnurksest kolmnurgast, mis on hüpotenuuse pidi kokku pandud. Seega peavad need kolmnurgad võrdsed olema ja kokkuvõttes kehtib võrdus parajasti siis, kui antud nelinurk on ruut.