35. Kombinatoorne geomeetria

Nagu nimigi ütleb, asub kombinatoorne geomeetria kusagil kombinatoorika ja geomeetria ühisel piirialal. Selle teema ülesannetes käsitletakse sageli teatud punktide, kujundite või kehade konfiguratsiooni kas tasandil või ruumis, aga tõestatavad omadused on pigem kombinatoorset laadi (nt mingi värvimisviisi või jaotuse olemasolu).

Ülesanded

Ülesanne 35.1 (Sügisene lahtine võistlus 2011, noorem rühm) Leia vähim värvide arv, millega saab ära värvida kõik tasandi täisarvuliste koordinaatidega punktid nii, et ükski kaks sama värvi punkti ei asuks teineteisest täpselt 5 ühiku kaugusel.

Ülesanne 35.2 (Piirkonnavoor 2011, 10. klass) Kuubi tipud värvitakse 3 värviga nii, et kuubi igal serval on otspunktid eri värvi. Tõesta, et leidub võrdkülgne kolmnurk, mille tippudeks on kuubi ühte värvi tipud.

Ülesanne 35.3 (Lõppvoor 1994, 11. klass) Tasandil on osa täisarvuliste koordinaatidega punkte värvitud valgeks ja kõik ülejäänud mustaks. Tõesta, et leidub võrdhaarne täisnurkne kolmnurk, mille kõik tipud on täisarvuliste koordinaatidega ja ühte värvi.

Ülesanne 35.4 (Piirkonnavoor 1997, 12. klass) Osa tasandi punkte värvitakse siniseks ja kõik ülejäänud punaseks. Tõesta, et mistahes värvimisviisi korral saab sellel tasandil leida võrdkülgse kolmnurga, mille kõik tipud on ühte värvi.

Ülesanne 35.5 (Kevadine lahtine võistlus 1993) Tasandile tuleb paigutada n valget punkti ja minimaalsel arvul musti punkte nii, et iga kahe valge punktiga määratud sirgel nende punktide vahel asuks vähemalt üks must punkt. Mitu musta punkti tuleb tasandile paigutada?

Ülesanne 35.6 (Sügisene lahtine võistlus 2017, vanem rühm) Kas koordinaattasandil leidub võrdkülgne kolmnurk, mille iga tipu mõlemad koordinaadid on täisarvud?

Ülesanne 35.7 (Piirkonnavoor 1997, 11. klass) Tasandil on antud lõplik arv sirglõike, millel ei ole ühiseid punkte. Kas nende lõikude mistahes paigutuse korral on võimalik mõned nende otspunktid omavahel sirglõikudega ühendada nii, et moodustub iseennast mittelõikav murdjoon, mis sisaldab kõik antud lõigud?

Ülesanne 35.8 (Lõppvoor 1998, 11. klass) Juku jaotas ringjoone n võrdseks kaareks, märkides sellel n punkti. Seejärel leidis ta, et ükskõik kuidas ta ka ei värviks kahe värviga kõik märgitud punktid, leidub ringjoone tasandil alati selline sirge, mille suhtes iga märgitud punkt peegeldub sama värvi märgitud punktiks. Leia arvu n kõik võimalikud väärtused.

Ülesanne 35.9 (Lõppvoor 1997, 11. klass) Tasandil on antud n punkti $(n > 3)$, millest ükski kolmik ei asu ühel sirgel. Kas nende punktide seast on alati võimalik valida kolm punkti nii, et läbi nende joonestatud ringjoone

a) sisepiirkonnas;

b) sisepiirkonnas ega ringjoonel

ei asu ühtki teist antud punkti?

Ülesanne 35.10 (Lõppvoor 2016, 11. klass) Iga punkt võrdkülgse kolmnurga külgedel on värvitud kas punaseks või siniseks. Kas võib kindlalt väita, et leidub täisnurkne kolmnurk, mille kõik tipud on värvitud sama värvi?

Lahendused

35.1 Vastus: 2.

On selge, et ühest värvist ei piisa. Kahe värviga võime tasandi täisarvuliste koordinaatidega punktid värvida “lõpmatus malekorras”, st punkti koordinaatidega (i, j) värvime mustaks, kui $i + i$ on paarisarv, ja valgeks, kui $i + j$ on paaritu.

Vaatleme kahte punkti täisarvuliste koordinaatidega vastavalt (x_1, y_1) ja (x_2, y_2). Nende vaheline kaugus on 5 parajasti siis, kui kehtib võrdus

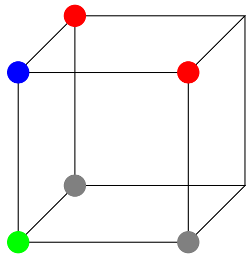
$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = 25\,. \tag{35.1}$$

Kuna 25 on paaritu arv, peavad mittenegatiivsed täisarvud $(x_2-x_1)^2$ ja $(y_2-y_1)^2$ olema erineva paarsusega, mis on nii parajasti siis, kui arvude x_1, x_2, y_1, y_2 seas leidub paaritul arvul paarituid arve. See omakorda on nii parajasti siis, kui arvud $x_1 + y_1$ ja $x_2 + y_2$ on erineva paarsusega. Ülaldefineeritud värvimisreegli järgi on punktid (x_1, y_1) ja (x_2, y_2) sel juhul aga erinevat värvi.

Muidugi saab võrrandit (35.1) lahendada ka nii, kui panna tähele, et võrrandi $x^2 + y^2 = 25$ kõikvõimalikud täisarvulised lahendid on $(0, \pm 5)$, $(\pm 5, 0)$, $(\pm 3, \pm 4)$ ja $(\pm 4, \pm 3)$. Igal juhul on lahendi komponendid erineva paarsusega, millest edasi saame arutleda ülaltoodud tõestusega analoogiliselt.

35.2 Vaatleme kuubi mingit tippu; olgu ta üldisust kitsendamata värvitud siniseks. Sellel tipul on mööda servi kolm naabertippu, millest ükski ei saa ülesande tingimuste põhjal sinine olla.

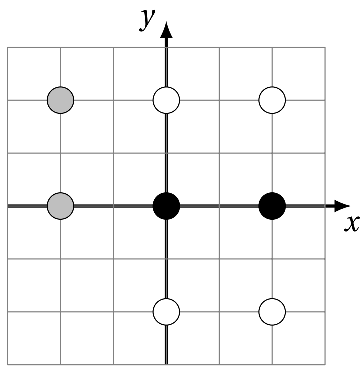
Kui kõik need kolm naabertippu on sama värvi, moodustavad nad võrdkülgse kolmnurga tipud ja ülesanne on lahendatud. Läbi tuleb veel vaadata juht, kui kaks neist naabertippudest on ühte värvi (näiteks punased) ja kolmas teist värvi (näiteks roheline).



Vaatleme joonisel halliga märgitud tippe. Kuna neil mõlemal on üks punane ja üks roheline naabertipp, peavad nad mõlemad tegelikult olema sinised. Koos algse sinise tipuga moodustavad nad seega võrdkülgse kolmnurga tipud.

35.3 Vaatleme ühte horisontaalset sirget, mis läbib täisarvuliste koordinaatidega punkte. On selge et leidub niisugune värv, millega värvitud punkte asub sellel sirgel vähemalt kaks. Olgu selleks värviks üldisust kitsendamata must ja valime koordinaatteljed nii, et kahe musta punkti koordinaadid on $(0,0)$ ja $(a,0)$ mingi positiivse täisarvu a jaoks.

Kui üks punktidest koordinaatidega $(0,a),(a,a),(0,-a),(a,-a)$ oleks must, tekiks ülesandes nõutud kolmnurk. Niisiis vaatame edasi juhtu, kui kõik need neli punkti on valged (vt joonist, kus $a=2$).



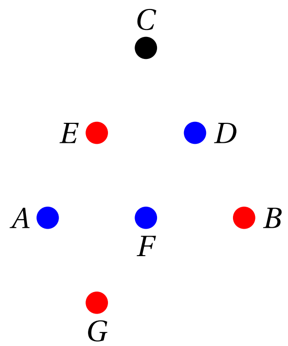
Kui punkt koordinaatidega $(-a,0)$ on valge, moodustub võrdhaarne täisnurkne kolmnurk tippudega $(-a,0),(0,a),(0,-a)$. Olgu siis punkt $(-a,0)$ must ning vaatleme punkti $(-a,a)$. Kui ka see on must, tekib ülesandes nõutud kolmnurk tippudega $(-a,a),(-a,0),(0,0)$. Kui aga punkt $(-a,a)$ on valge, saame otsitava kolmnurga tippudega $(-a,a),(a,a),(a,-a)$. Niisiis tekib nõutud omatustega kolmnurk alati.

35.4 Lahenduse võti on uurida konstruktsiooni, kus tekiks palju võrdkülgseid kolmnurki.

Vaatleme tasandil suvalist võrdkülgset kolmnrka ABC ning olgu külgede BC, CA ja AB keskpunktid vastavalt D, E ja F. Siis on ka kolmnurk DEF võrdkülgne. Kui kõik tema tipud on ühte värvi, siis on ülesanne lahendatud.

Vaatleme juhtu, kui kaks kolmnurga DEF tippudest on ühte ja üks teist värvi; üldisust kitsendamata olgu D ja F sinised ning E punane. Kui ka punkt B on sinine, on ülesanne lahendatud, sest kolmnurk BDF on võrdkülgne. Vaatleme edasi juhtu, kui B on punane.

Kui nii A kui C on punased, on ülesanne tänu kolmnurga ABC võrdkülgusele lahendatud. Olgu siis üks tippudest A ja C sinine; valime selleks üldisust kitsendamata punkti A. Olgu G punkti E peegeldus sirgest AB. Kui punkt G on sinine, oleme saanud siniste tippudega võrdkülgse kolmnurga AFG, vastasel juhul aga saame punaste tippudega võrdkülgse kolmnurga BEG.



35.5 Vastus: $n-1$.

On selge, et musti punkte pole kindlasti vaja rohkem, kui valgetest punktidest moodustatud paare, st $\dfrac{n(n-1)}{2}$ tükki. Niisiis on musti ja valged punkte lõplikul arvul. Järelikult on lõplikul arvul ka vaadeldavate punktide paaride poolt määratud sirgeid.

Valime tasandil sirge s, mis pole risti ühegi vaadeldavate punktide paari poolt määratud sirgega. (Niisugune sirge s leidub, sest, nagu me just nägime, on tema jaoks “keelatud” sihte lõplik arv.) Leiame kõigi vaadeldavate punktide ristprojektsioonid sirgele s; olgu valge punkti projektsioon valge ja musta punkti projektsioon must. Tänu sirge s valikule ei lange ükski kaks projektsiooni kokku. Samas on selge, et kui tasandil asub punkt B punktide A ja C vahel, siis asub ka punkti B projektsioon punktide A ja C projektsioonide vahel. Järelikult peab iga kahe valge projektsiooni vahel asuma vähemalt üks must projektsioon. Kuna valgeid projektsioone on n, peab nende vahel sirgel olema vähemalt $n-1$ musta projektsiooni, mis peavad omakorda pärinema vähemalt $n-1$ mustast punktist tasandil.

Teisest küljest on selge, et $n-1$ mustast punktist piisab, kui validagi kõik punktid ühel sirgel.

35.6 Vastus: ei.

Oletame, et niisugune kolmnurk leidub.

Me võime seda kolmnurka koordinaattasandil nihutada nii, et tema üks tipp satub koordinaatide alguspunkti. Ülejäänud kahe tipu koordinaadid jäävad seejuures endiselt täisarvudeks; olgu need siis vastavalt (x_1, y_1) ja (x_2, y_2).

Kuna kolmnurk on võrdkülgne, peavad Pythagorase teoreemi põhjal kehtima võrdused

$$x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2\,.$$

Vaatleme selle võrduste ahela liikmete jääke jagamisel 4-ga. Kahe täisarvu ruudu summa saab 4-ga jagades anda jäägiks kas 0, 1 või 2.

Kui kehtiks

$$x_1^2 + y_1^2 \equiv x_2^2 + y_2^2 \equiv 2 \bmod 4\,,$$

siis peaksid x_1, y_1, x_2, y_2 kõik paaritud olema. See aga tähendaks, et $(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 \equiv 0 \bmod 4$, vastuolu.

Kui kehtiks

$$x_1^2 + y_1^2 \equiv x_2^2 + y_2^2 \equiv 1 \bmod 4\,,$$

siis peaks arvudest x_1 ja y_1 üks olema paaris ja teine paaritu ning samuti peaks arvudest x_2 ja y_2 üks olema paaris ja teine paaritu.

Kui x_1 ja x_2 on sama paarsusega, siis on ka y_1 ja y_2 sama paarsusega, mistõttu $(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 \equiv 0 \bmod 4$, vastuolu. Kui x_1 ja x_2 on eri paarsusega, siis on ka y_1 ja y_2 eri paarsusega, mistõttu $(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 \equiv 2 \bmod 4$, mis annab samuti vastuolu.

Niisiis on ainsaks võimaluseks

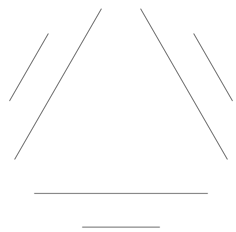
$$x_1^2 + y_1^2 \equiv x_2^2 + y_2^2 \equiv 0 \bmod 4\,,$$

mis tähendab, et kõik arvud x_1, y_1, x_2, y_2 on paaris. Järelikult rahuldab ka kolmnurk tippudega $(0,0)$, $\left(\frac{x_1}{2}, \frac{y_1}{2}\right)$ ja $\left(\frac{x_2}{2}, \frac{y_2}{2}\right)$ ülesande tingimusi, aga on 2 korda lühema küljepikkusega.

Nüüd võime sama arutlust korrata selle väiksema kolmnurga puhul, saades omakorda väiksema kolmnurga jne. Languse printsiibi põhjal ei saa see protsess igavesti kesta, niisiis pole protsessi alguses eeldatud kolmnurka üldse olemas.[1]

35.7 Vastus: ei.

Kontranäiteks sobib järgmine paigutus:



Kolme lühema lõigu seas peab leiduma vähemalt üks, mis pole murdjoone otsmiseks lüliks. See tähendab, et tema mõlemad otsad peavad olema ühendatud teiste lõikudega. Teisest küljest on selge, et vaadeldava lühema lõigu mõlemad otspunktid saavad olla ühendatud ainult vastava pikema lõigu otspunktidega. Nii aga moodustub kinnine tsükkel, mis ei saa olla osaks pikemast murdjoonest.

35.8 Vastus: $n \leqslant 5$.

Kui kõik punktid on värvitud sama värvi, sobib otsitavaks sirgeks moodustuva korrapärase n-nurga suvaline sümmeetriatelg (sh leidub sümmeetriatelg juhtudel $n = 1$ ja $n = 2$).

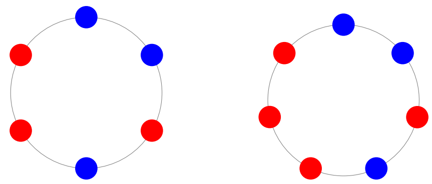
Kui $n \leqslant 5$, peab leiduma värv, millega on värvitud kas $0, 1$ või 2 punkti. Kui ühte värvi kasutatud ei ole, sobib otsitavaks sirgeks moodustuva korrapärase n-nurga suvaline sümmeetriatelg (sh leidub sümmeetriatelg juhtudel $n = 1$ ja $n = 2$).

Kui eraldi värviga punkte on üks, sobib n-nurga sümmeetriatelg, mis läbib seda punkti. Kui eraldi värvi punkte on kaks, sobib nende kahe punkti poolt moodustatud lõigu keskristsirge.

[1] Formaalselt on meil languse printsiibi rakendamiseks tarvis rangelt kahanevat naturaalarvulist suurust, aga vaadeldavate kolmnurkade küljepikkused ja pindalad võivad tulla hoopis irratsionaalsed. Arutluse jaoks sobivateks suurusteks saame valida näiteks kas kolmnurga tipukoordinaatide absoluutväärtuste seast suurima või küljepikkuse ruudu.

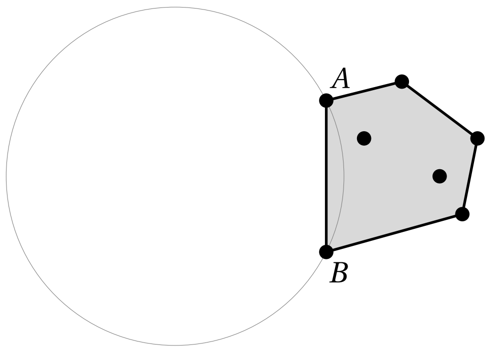
Kui $n \geqslant 6$, nummerdame punktid päripäeva, värvime punktid number $1, 2$ ja 4 ühe värviga (näiteks sinisega) ning kõik teised teise värviga (näiteks punasega). Kui $n \geqslant 6$, puudub sinisel kolmnurgal sümmeetriatelg.

Näide juhtudel $n = 6$ ja $n = 7$ on toodud joonisel.

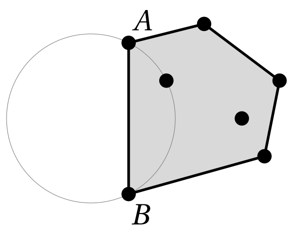


35.9 Vastus: a) jah, b) ei.

a) Vaatleme antud punktihulga *kumerat katet*, st vähimat hulknurka, mis sisaldab kõiki antud punkte. Olgu A ja B selle hulknurga mingid kaks järjestikust tippu. Ülesande tingimuste põhjal pole lõigul AB ühtegi teist vaadeldava hulga punkti. See tähendab, et me saame valida ringjoone, mis läbib punkte A ja B, aga mis ei sisalda ühtegi teist selle hulga punkti ei sisepiirkonnas ega ringjoonel.



Nüüd hakkame ringjoont muutma nii, et ta läbiks endiselt punkte A ja B, kuid tema keskpunkt liigub teiste punktide poole. Jätkame seda liigutamist kuni hetkeni, mil ringjoon läbib esimest korda mingit kolmandat antud hulga punkti. See punkt koos punktidega A ja B sobibki otsitavaks kolmikuks.



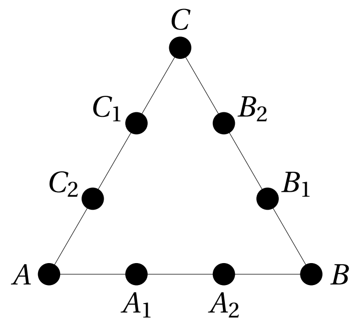
Sama kolmanda punktini võime jõuda ka teistsuguse konstruktsiooniga. Alustuseks valime samad punktid A ja B ning seejärel leiame nurgad, mille all lõik AB paistab kõigist teistest antud hulga punktidest peale A ja B. Otsitavasse kolmikusse sobib kolmandaks niisugune punkt C, mille jaoks leitud nurk on kõige suurem. Tõepoolest, kui kolmnurga ABC ümberringjoone sisepiirkonnas leiduks veel mõni vaadeldava hulga punktidest D, peaks kehtima võrratus $\angle ADB > \angle ACB$ (vaata teoreemi 27.1). See on aga vastuolus punkti C valikuga.

b) Me võime valida kõik punktid ühel ringjoonel, nii määrab iga punktikolmik täpselt sellesama ringjoone. Ülesande algses sõnastuses oli punktide arvu n kohta kitsendus $n \geqslant 3$. Sellisel kujul oleks korrektne vastus, et $n = 3$ puhul saab sobiva kolmiku alati valida (meil ongi ainult üks kolmik), $n > 3$ puhul aga mitte tingimata.

35.10 Vastus: jah.

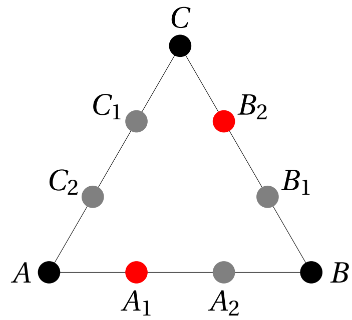
Otsime jälle konfiguratsiooni, mis ühest küljest koosneks võimalikult vähestest punktidest, aga teisest küljest moodustaks võimalikult palju täisnurkseid kolmnurki.

Olgu antud võrdkülgne kolmnurk ABC ning valime tema külgedel punktid $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$, mis jagavad vastavad küljed kolmeks võrdseks lõiguks (vt joonist).



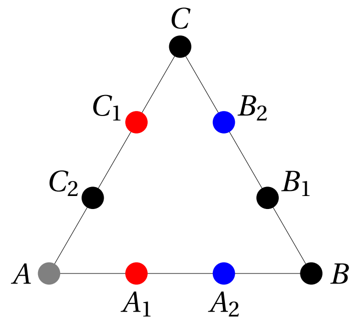
Kuusnurk $A_1A_2B_1B_2C_1C_2$ on siis korrapärane.

Vaatleme kõigepealt juhtu, kus selle kuusnurga ühe pika diagonaali (näiteks A_1B_2) mõlemad otspunktid on sama värvi (näiteks punased).



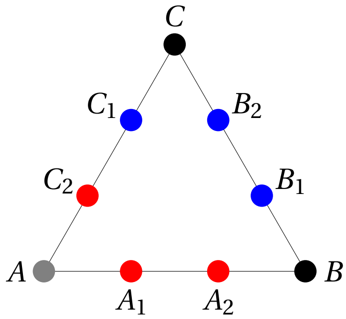
Kui mõni puntkidest A_2, B_1, C_1, C_2 on samuti punane, moodustub punaste tippudega täisnurkne kolmnurk, sest A_1B_2 on vaadeldava kuusnurga ümberringjoone diameeter ja diameetrile toetuv piirdenurk on Thalese teoreemi põhjal täisnurk. Kui aga kõik punktid A_2, B_1, C_1, C_2 on sinised, moodustub samal põhjusel siniste tippudega täisnurkne kolmnurk, näiteks $B_1C_1C_2$.

Jääb vaadelda juhtum, kus kuusnurga $A_1A_2B_1B_2C_1C_2$ kõigi pikkade diagonaalide otspunktid on eri värvi. Olgu üldisust kitsendamata A_1 punane ja B_2 sinine. Kui A_2 on sinine, peab C_1 olema punane.



Ükskõik, kumba värvi on nüüd punkt A, ikka tekib sama värvi tippudega täisnurkne kolmnurk (kas AA_1C_1 või AA_2B_2).

Kui A_2 on punane, peab C_1 olema sinine. Saadav konfiguratsioon on sümmeetriline külje AB keskristsirge suhtes, seega võime üldisust kitsendamata lisaks eeldada, et C_2 on punane ja B_1 sinine.



Jälle näeme, et ükskõik, kumba värvi on punkt A, tekib alati sama värvi tippudega täisnurkne kolmnurk (kas AA_2C_2 või AB_1C_1).

Oleme kõik juhtumid läbi vaadanud ning iga kord leidus nõutud omadustega kolmnurk.