34. Nurgapoolitaja omadused

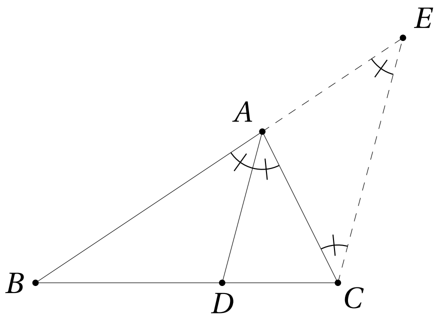
Nurgapoolitaja on võistlusülesannetes sageli esinev geomeetriline objekt, millel on palju huvitavaid omadusi. Nende seas on ajalooliselt välja kujunenud üks, mida mõnevõrra segadusttekitavalt nimetatakse gi lihtsalt nurgapoolitaja omaduseks.

34.1 Nurgapoolitaja (esimene) omadus

Teoreem 34.1 Lõigaku kolmnurga ABC nurga BAC poolitaja külge BC punktis D. Siis jagab punkt D lõigu BC suhtes $|AB| : |AC|$, st

$$\frac{|BD|}{|CD|} = \frac{|AB|}{|AC|}.$$

Tõestus. Tõmbame tipust C lõiguga AD paralleelse sirge. Lõikugu see sirge külje AB pikendusega punktis E.



Kuna AD on nurga BAD poolitaja, teame, et $\angle BAD = \angle DAC$. Konstruktsiooni järgi $EC \parallel AD$, seega $\angle BAD = \angle AEC$ ja samuti põiknurkade omadusest $\angle DAC = \angle ACE$. Järelikult on kolmnurk ACE võrdhaarne ja $|AE| = |AC|$.

Kiirteteoreemist teame, et

$$\frac{|BD|}{|CD|} = \frac{|AB|}{|AE|}.$$

Kuna eeltõestatu põhjal lisaks $|AE| = |AC|$, saamegi siit teoreemi väite. □

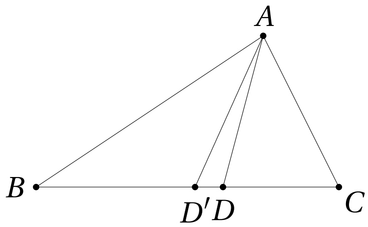
Kehtib ka teoreemi 34.1 pöördteoreem.

Teoreem 34.2 Valime kolmnurga ABC küljel BC punkti D nii, et

$$\frac{|BD|}{|CD|} = \frac{|AB|}{|AC|}.$$

Siis AD on nurga BAD poolitaja.

Tõestus. Vaatleme nurga BAD poolitajat; lõikugu ta küljega BC punktis D'. Oletame vastuväiteliselt, et $D \neq D'$. Vaatleme kõigepealt juhtu, kus punkt D' asub lõigu BD sisepiirkonnas.



Kuna BD' on nurga BAD poolitaja, saame teoreemist 34.1

$$\frac{|BD'|}{|CD'|} = \frac{|AB|}{|AC|}.$$

Et punkt D' asub lõigu BD sisepiirkonnas, kehtivad võrratused $|BD'| < |BD|$ ja $|CD'| > |CD|$. Järelikult

$$\frac{|BD'|}{|CD'|} < \frac{|BD|}{|CD|} = \frac{|AB|}{|AC|},$$

vastuolu teoreemiga 34.1. Sama moodi saame vastolu ka juhul, kui punkt D' asub lõigu CD sisepiirkonnas. Järelikult on ainus võimalus, et $D = D'$ ja AD on nurga BAD poolitaja. □

Teoreemide 34.1 ja 34.2 analoogid kehtivad ka välisnurga poolitaja korral ja vastavad tõestused on väga sarnased nende teoreemide tõestustega.

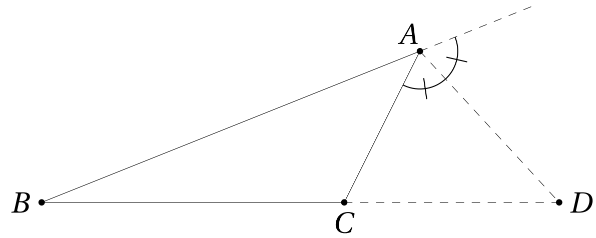
Teoreem 34.3 Lõigaku kolmnurga ABC tipu A juures asuva välisnurga poolitaja külje BC pikendust punktis D. Siis kehtib võrdus

$$\frac{|BD|}{|CD|} = \frac{|AB|}{|AC|}.$$

Teoreem 34.4 Valime kolmnurga ABC külje BC pikendusel punkti D nii, et

$$\frac{|BD|}{|CD|} = \frac{|AB|}{|AC|}.$$

Siis AD on kolmnurga tipu A juures asuva välisnurga poolitaja.



Harjutus 34.1 Tõesta teoreemid 34.3 ja 34.4.

Nurgapooltaja omaduse ilusaks rakenduseks on Apolloniose ringjoon, mille kohta saab lähemalt lugeda jaotisest 34.3.

Ülesanded

Ülesanne 34.1 (Lõppvoor 2006, 9. klass) Võrdhaarse kolmnurga ABC tipunurga C suurus on $120°$. Kolmnurga alusel AB valitakse punktid D ja E nii, et $|AD| = |DE| = |EB|$. Leia kolmnurga CDE nurkade suurused.

Ülesanne 34.2 (Piirkonnavoor 2005, 12. klass) Kolmnurga ABC tipust A tõmmatud nurgapoolitaja lõikab külge BC punktis D. Lisaks läbib punkti D veel kaks sirget: küljega AB paralleelne sirge, mis lõikab külge AC punktis E, ning küljega AC paralleelne sirge, mis lõikab külge AB punktis F. Tõesta, et

$$\frac{|EC|}{|FB|} = \frac{|CD|^2}{|BD|^2}.$$

Ülesanne 34.3 (Kevadine lahtine võistlus 1994) Tõesta, et kui kolmnurgas ABC kehtib võrdus $\frac{|AC|}{|BC|} = \frac{|AB|+|BC|}{|AC|}$, siis $\angle B = 2 \cdot \angle A$

Ülesanne 34.4 (Lõppvoor 2012, 10. klass) Tasandil on antud kolmnurk ABC. Olgu P tipust A tõmmatud nurgapoolitaja lõikepunkt küljega BC ning M kolmnurga ABC tipust B tõmmatud mediaani aluspunkt. Sirged AB ja MP lõikuvad punktis K. Tõesta, et kui $\frac{|PC|}{|BP|} = 2$, siis AP ja CK on risti.

Ülesanne 34.5 (Lõppvoor 2017, 11. klass) Olgu AM erikülgse kolmnurga ABC mediaan. Olgu K kolmnurga ABC siseringjoone puutepunkt küljega BC. Tõesta, et kui külje BC pikkus on külgede AB ja AC pikkuste aritmeetiline keskmine, siis nurga BAC poolitaja läbib lõigu KM keskpunkti.

Ülesanne 34.6 (Lõppvoor 2001, 12. klass) Olgu I ja r vastavalt täisnurkse kolmnurga ABC siseringjoone keskpunkt ja raadius. Teravnurkade tippudest tõmmatud kiired AI ja BI lõikavad vastaskaateteid BC ja AC vastavalt punktides D ja E. Tõesta, et

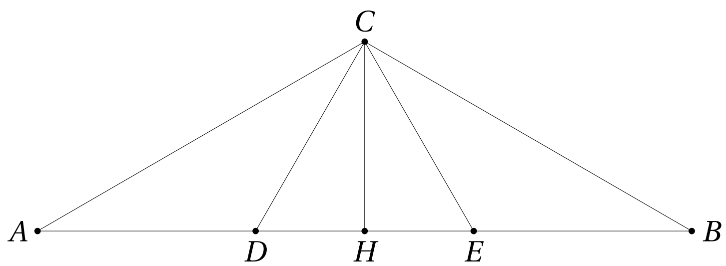
$$\frac{1}{|AE|} + \frac{1}{|BD|} = \frac{1}{r}.$$

Ülesanne 34.7 (Sügisene lahtine võistlus 2022, vanem rühm) Kumeras nelinurgas $ABCD$ on $\angle ABC = \angle ADC$ ning $\angle BAD > \angle DCB$. Nurga ADC poolitaja ja lõigu AC keskristsirge lõikuvad punktis P. Lõigul AC valitakse selline punkt E, et $\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|CE|}{|EA|}$. Tõesta, et $\angle EPC = \angle ACB$.

Lahendused

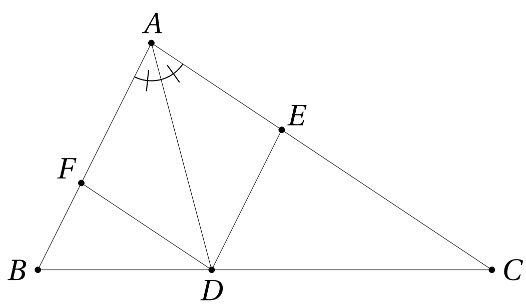
34.1 Vastus: kõik nurgad on 60° suurused.

Tõmbame kolmnurgale ABC tipust C kõrguse CH. Tänu kolmnurga võrdhaarsusele osutub CH ka mediaaniks ja nurgapoolitajaks (vt teoreem 33.1). Muuhulgas poolitab H lõigud AB ja DE.



Kuna CH on nurga BCA poolitaja, saame $\angle BCH = 60^\circ$ ja $\frac{|CH|}{|CB|} = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$. Samas ka $\frac{|HE|}{|EB|} = \frac{1}{2}$, järelikult on CE teoreemi 34.2 alusel nurga BCH poolitaja. Niisiis $\angle ECH = 30^\circ$ ning analoogiliselt $\angle HCD = 30^\circ$, mistõttu $\angle ECD = 60^\circ$ ja CDE on võrdhaarne kolmnurk tipunurgaga 60°. Järelikult peavad ka selle kolmnurga alusnurgad olema 60° suurused.

34.2 Kuna $ED \parallel AB$ ja $FD \parallel AC$, siis $\triangle EDC \sim \triangle ABC \sim \triangle FBD$.



Kolmnurkade EDC ja FBD sarnasusest saame $\frac{|EC|}{|ED|} = \frac{|FD|}{|FB|}$, millest omakorda

$$\frac{|EC|}{|FB|} = \frac{|ED| \cdot |FD|}{|FB| \cdot |FB|}.$$

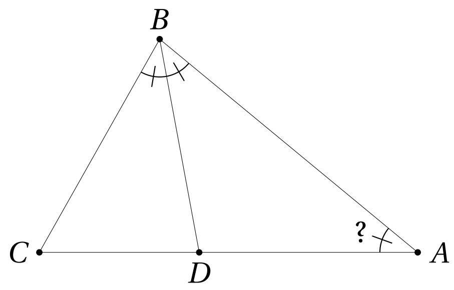
Kolmnurkade FDB ja ABC sarnasusest $\frac{|FD|}{|FB|} = \frac{|AC|}{|AB|}$ ning nurgapoolitaja omadusest saame edasi $\frac{|AC|}{|AB|} = \frac{|CD|}{|BD|}$, seega kehtib ka võrdus $\frac{|FD|}{|FB|} = \frac{|CD|}{|BD|}$. Teisest küljest ED ja FB on vastavad lõigud sarnastes kolmnurkades EDC ja FBD sarnasusteguriga $\frac{|ED|}{|FB|} = \frac{|CD|}{|BD|}$. Kokkuvõttes

$$\frac{|EC|}{|FB|} = \frac{|ED|\cdot|FD|}{|FB|\cdot|FB|} = \frac{|ED|}{|FB|}\cdot\frac{|FD|}{|FB|} = \frac{|CD|}{|BD|}\cdot\frac{|CD|}{|BD|},$$

mida oligi tarvis.

34.3 Kuna tõestada tuleb võrdus $\angle B = 2\cdot\angle A$, on loomulik lisakonstruktsioon kolmnurga tipust B tõmmatud nurgapoolitaja. Lõigaku see nurgapoolitaja külge AC punktis D. Ülesande väide on siis samaväärne väitega $\angle DBC = \angle CAB$.

Järgmiseks tuleb aru saada, mida hakata peale murruga $\frac{|AB|+|BC|}{|AC|}$. Siin aitab meid nurgapoolitaja omadus, mis ütleb, et punkt D jagab külje AC suhtes $|AB|:|BC|$.



Nurgapoolitaja omadusest teame niisiis, et $\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|AD|}{|DC|}$. Siit järeldub muuhulgas suhete võrdsus $\frac{|AB|}{|AD|} = \frac{|BC|}{|DC|}$. Tähistades viimast suhet k, saame kirjutada $|AB| = k\cdot|AD|$ ja $|BC| = k\cdot|CD|$, seega

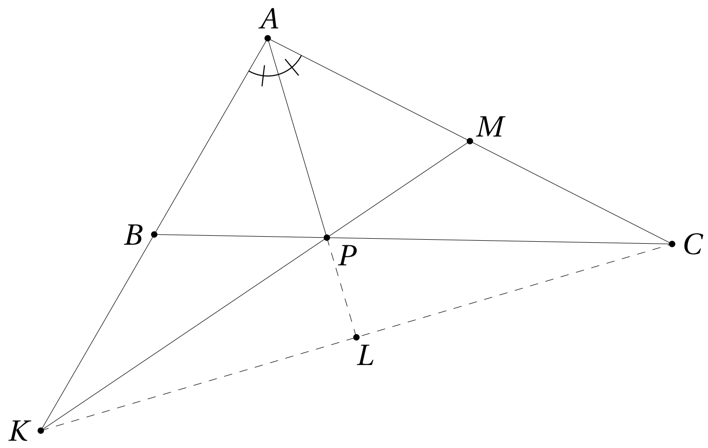
$$\frac{|AB|+|BC|}{|AC|} = \frac{k\cdot|AD|+k\cdot|CD|}{|AC|} = \frac{k\cdot(|AD|+|DC|)}{|AC|} = \frac{k\cdot|AC|}{|AC|} = k.$$

Ülesande tingimustest järeldub nüüd, et

$$\frac{|AC|}{|BC|} = \frac{|AB|+|BC|}{|AC|} = k = \frac{|BC|}{|DC|}.$$

Kolmnurkadel ABC ja BDC on tipu C juures sama nurk ning selle nurga lähisküljed on vastavalt võrdelised. Seega on need kolmnurgad sarnased, millest muuhulgas järeldub vajalik võrdus $\angle DBC = \angle CAB$.

34.4 Teeme joonise.



Olgu L sirgete AP ja KL lõikepunkt, siis on tarvis tõestada, et AL on kolmnurga AKC kõrgus. Kuna AL on konstruktsiooni järgi nurga KAC poolitaja, on tarvilik ja piisav näidata, et kolmnurk AKC on võrdhaarne, st et $|AK| = |AC|$.

Nurgapoolitaja omaduse põhjal $\frac{|AC|}{|AB|} = \frac{|PC|}{|BP|} = 2$, kust saame $|AC| = 2|AB|$. Seega tuleb tõestada, et B on lõigu AK keskpunkt ehk BC on kolmnurga AKC mediaan.

Me teame, et lõik KM on selle kolmnurga mediaan ja et punkt P, mis asub ka lõigul KM, jaotab lõigu BC suhtes $1:2$. Kas nendest tähelepanekutest piisab väitmaks, et BC on kolmnurga AKC mediaan?

Seda pole niisama lihtne tõestada. Appi tuleb trikk, mida geomeetriaülesannete lahendamisel sageli kasutatakse – me *konstrueerime* kolmnurga nii, et BC oleks tema mediaan, ja seejärel tõestame, et saadav olukord langeb kokku ülesandes kirjeldatuga.

Täpsemalt, olgu K' punkti A peegeldus üle punkti B, st B on lõigu AK' keskpunkt. Siis on nii BC kui $K'M$ kolmnurga $AK'M$ mediaanid. Need mediaanid lõikuvad punktis, mis jaotab lõigu BC suhtes $1:2$, st punktis P. Seega on K' samuti sirgete AB ja MP lõikepunkt, mistõttu $K = K'$. Järelikult $|AK| = 2|AB| = |AC|$, mida oligi tarvis.

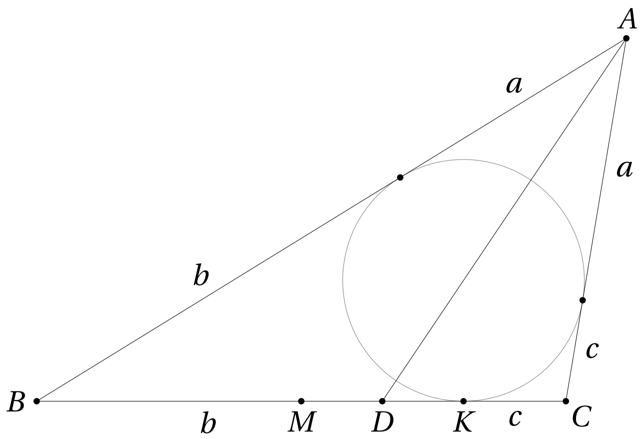
Selle ülesande teise lahenduse annab ülesanne 33.14.

34.5 Üldisust kitsendamata olgu $|AB| > |AC|$. Tähistame kolmnurga tippudest A, B ja C siseringjoonele tõmmatud puutujalõikude pikkusi vastavalt a, b ja c. Ülesande tingimustest saame siis

$$|BC| = \frac{|AB| + |AC|}{2} \quad \text{ehk} \quad b + c = \frac{a + b + a + c}{2},$$

millest järeldub võrdus $2a = b + c$.

Olgu D nurga BAC lõikepunkt küljega BC. Siis asuvad punktid M, D ja K küljel BC niisuguses järjekorras nagu näidatud joonisel.



Nurgapoolitaja omadusest saame

$$\frac{|BD|}{|DC|} = \frac{|AB|}{|AC|} = \frac{a+b}{a+c}, \quad \text{millest} \quad |BD| = |DC| \cdot \frac{a+b}{a+c}.$$

Teisest küljest aga

$$|BD| + |DC| = |BC| = b + c.$$

Niisiis saame teisendada

$$\begin{aligned}
|DC| \cdot \frac{a+b}{a+c} + |DC| &= b + c, \\
|DC| \cdot \left(\frac{a+b}{a+c} + 1\right) &= b + c, \\
|DC| \cdot \frac{a+b+a+c}{a+c} &= b + c, \\
|DC| &= \frac{(b+c)(a+c)}{2a+b+c} = \\
&= \frac{(b+c)(a+c)}{2(b+c)} = \frac{a+c}{2},
\end{aligned}$$

sest $b + c = 2a$.

Nüüd avaldame lõikude MD ja DK pikkused:

$$\begin{aligned}
|MD| &= |MC| - |DC| = \frac{b+c}{2} - \frac{a+c}{2} = \frac{b-a}{2}, \\
|DK| &= |DC| - |KC| = \frac{a+c}{2} - c = \frac{a-c}{2}.
\end{aligned}$$

Võrdusest $2a = b + c$ saame $a - c = b - a$, mistõttu ka $|MD| = |DK|$, nagu oligi tarvis.

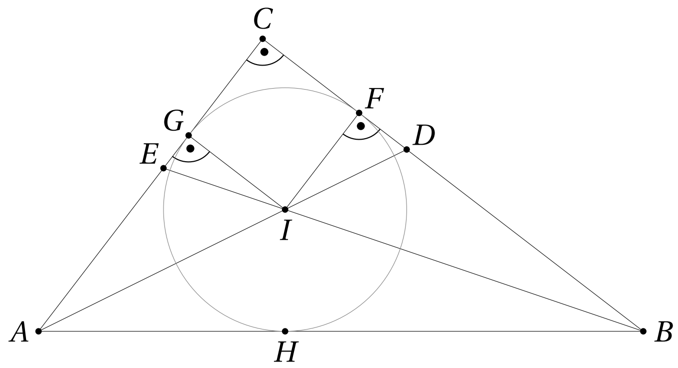
34.6 Nurgapoolitaja omadusest saame võrdused

$$\frac{|CE|}{|AE|} = \frac{|BC|}{|AB|} \quad \text{ja} \quad \frac{|CD|}{|BD|} = \frac{|AC|}{|AB|}.$$

Seega

$$\frac{1}{|AE|} + \frac{1}{|BD|} = \frac{|BC|}{|AB| \cdot |CE|} + \frac{|AC|}{|AB| \cdot |CD|} = \frac{1}{|AB|}\left(\frac{|BC|}{|CE|} + \frac{|AC|}{|CD|}\right).$$

Olgu kolmnurga ABC siseringjoone puutepunktid külgedega BC, CA ja AB vastavalt F, G ja H.



Kuna $IF \perp BC$, kehtib ka $IF \parallel EC$. Järelikult $\triangle BEC \sim \triangle BIF$, millest $\frac{|BC|}{|CE|} = \frac{|BF|}{|FI|} = \frac{|BF|}{r}$. Analoogiliselt näitame, et $\frac{|AC|}{|CD|} = \frac{|AG|}{r}$. Puutujalõikude võrdsust kasutades saame nüüd

$$\frac{|BC|}{|CE|} + \frac{|AC|}{|CD|} = \frac{|BF|}{r} + \frac{|AG|}{r} = \frac{|BH|}{r} + \frac{|AH|}{r} = \frac{|AB|}{r}.$$

Kokkuvõttes

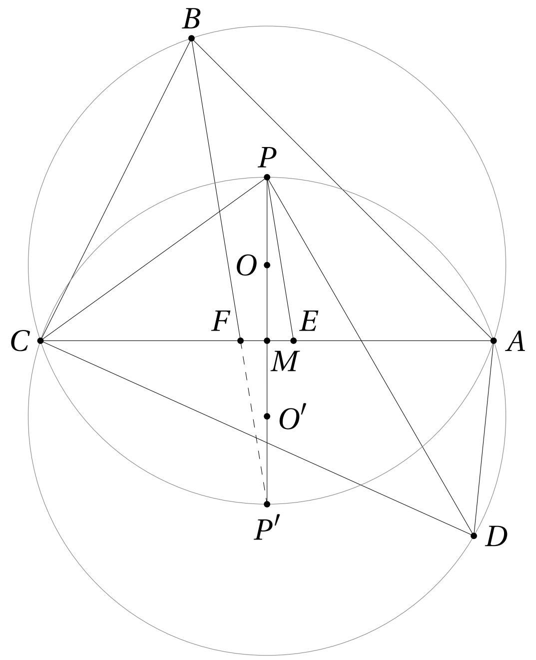
$$\frac{1}{|AE|} + \frac{1}{|BD|} = \frac{1}{|AB|}\left(\frac{|BC|}{|CE|} + \frac{|AC|}{|CD|}\right) = \frac{1}{|AB|} \cdot \frac{|AB|}{r} = \frac{1}{r},$$

nagu oligi tarvis.

34.7 Tingimus $\angle ABC = \angle ADC$ tähendab, et lõik AC paistab punktidest B ja D sama nurga all. See omakorda tähendab, et kolmnurkade ABC ja ADC ümberringjooned on sümmeetrilised sirge AC suhtes. Olgu nende ringjoonte keskpunktid vastavalt O ja O', siis on OO' lõigu AC keskristsirge. Olgu M sirgete OO' ja AC lõikepunkt (ning muuhulgas lõigu AC keskpunkt).

Uurime tingimust $\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|CE|}{|EA|}$. Me teame nurgapoolitaja omadusest, et lõigul AC leidub täpselt üks punkt F nii, et $\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|FA|}{|CF|}$, nimelt nurga ABC poolitaja lõikepunkt selle lõiguga. Niisiis on ka punkt E lõigul AC üheselt määratud, kusjuures punktid E ja F on sümmeetrilised selle lõigu keskpunkti M suhtes.

Nurga ADC poolitaja ja lõigu AC keskristsirge lõikuvad kolmnurga ADC ümberringjoone kaare AC keskpunktis, niisiis ongi P vaadeldava kaare keskpunkt. Muuhulgas asub P sirgel OO'.



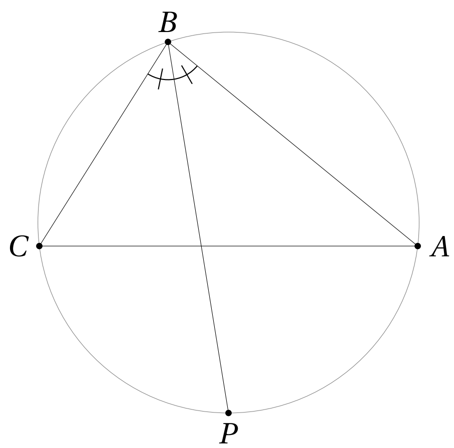
Olgu P' punktiga P sirge AC suhtes sümmeetriline punkt. Siis on P' kolmnurga ABC ümberringjoone kaare CA keskpunkt ning asub järelikult nurga ABC poolitajal. Lõik FP' on sümmeetriline lõiguga EP punkti M suhtes, mistõttu sirged EP ja BP' on paralleelsed ning järelikult $\angle PEC = \angle CFB$.

Seega on ülesande väide samaväärne väitega, et kolmnurgad PEC ja CFB on sarnased. Viimase väite tõestamiseks piisab näidata, et $\angle PCA = \angle CBP'$. See võrdus aga kehtib, sest need nurgad toetuvad piirdenurkadena võrdse raadiusega ringjoonte võrdse suurusega kaartele (vastavalt kaared PA ja $P'C$).

34.2 Nurgapoolitaja teine omadus

Teoreem 34.5 Olgu antud punkt P kolmnurga ABC kaarel AC, mis ei sisalda punkti B. Sirge BP on nurga ABC poolitaja parajasti siis, kui P on kaare AC keskpunkt.

Tõestus. Sirge BP on nurga ABC poolitaja parajasti siis, kui $\angle ABP = \angle PAC$ ehk $\overset{\frown}{AP} = \overset{\frown}{PC}$. Viimane tingimus aga tähendab parajasti seda, et P on kaare AC keskpunkt.



□

Kuna peale nurgapoolitaja läbib kaare AC keskpunkti ka külje AC keskristsirge, saame teoreemist 34.5 lihtsa järelduse, mis omab ülesannete lahendamisel sageli iseseisvat tähtsust.

Järeldus 34.1 Vaatleme kolmnurga tippu, mille lähisküljed pole võrdsed. Sellest tipust tõmmatud nurgapoolitaja ja vastaskülje keskristsirge lõikuvad vaadeldava kolmnurga ümberringjoonel, kusjuures lõikepunktiks on vastava kaare keskpunkt.

Võrdhaarse kolmnurga tipunurgast tõmmatud nurgapoolitaja ja vastaskülje keskristsirge langevad kokku (vt järeldus 33.1).

Ülesanded

Ülesanne 34.8 (Lõppvoor 1998, 9. klass) Olgu S kolmnurga ABC siseringjoone keskpunkt ning lõigaku sirge AS kolmnurga ABC ümberringjoont punktis D ($D \neq A$). Tõesta, et lõigud BD, CD ja SD on võrdse pikkusega.

Ülesanne 34.9 (Piirkonnavoor 1999, 10. klass) Täisnurkse kolmnurga ABC hüpotenuusi AB keskpunktiga sirge BC suhtes sümmeetriline punkt D asub nurga CAB poolitajal. Leia kolmnurga ABC teravnurkade suurused.

Ülesanne 34.10 (Piirkonnavoor 2019, 10. klass) Kolmnurga ABC mingi kahe külje keskristsirged lõikuvad kolmnurga ABC mingi sisenurga poolitajal. Tõesta, et kolmnurk ABC on võrdhaarne.

Ülesanne 34.11 (Lõppvoor 2006, 10. klass) Kolmnurga ABC tipust B tõmmatud nurgapoolitaja lõikab külge AC punktis G ning tipust C tõmmatud nurgapoolitaja lõikab külge AB punktis H. On teada, et kolmnurkade ABG ja ACH ümberringjoonte üks lõikepunktidest asub küljel BC . Tõesta, et nurga BAC suurus on 60°.

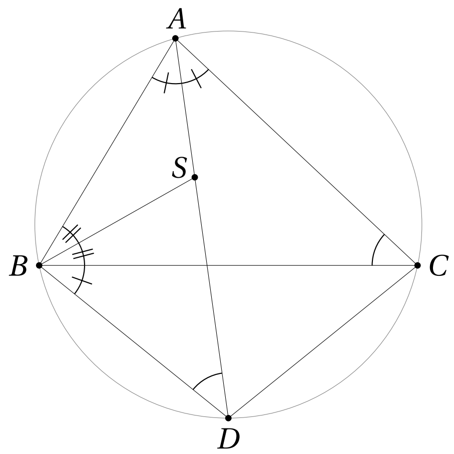
Ülesanne 34.12 (Piirkonnavoor 2000, 12. klass) Kolmnurga ABC nurgapoolitajaid pikendatakse lõikumiseni ümberringjoonega. Kolmnurk, mille tippudeks on saadavad lõikepunktid, on sarnane kolmnurgaga ABC. Tõesta, et kolmnurk ABC on võrdkülgne.

Ülesanne 34.13 (Piirkonnavoor 2007, 11. klass) Teravnurkse kolmnurga ABC ümberringjoone kaartel BC, CA ja AB, millest igaüks ühendab parajasti kahte kolmnurga tippu, on valitud vastavalt punktid A_1, B_1 ja C_1 nii, et $|AB_1| = |AC_1|$, $|BC_1| = |BA_1|$ ja $|CA_1| = |CB_1|$. Tõesta, et sirged AA_1, BB_1 ja CC_1 lõikuvad ühes punktis.

Vaata ka ülesandeid 33.18 ja 32.9.

Lahendused

34.8 Tähistame kolmnurga ABC nurkade suurusi vastavalt α, β ja γ. Et S on selle kolmnurga siseringjoone keskpunkt, on AS, BS ja CS tema nurgapoolitajad.



Teoreemi 34.5 põhjal on D kaare BC keskpunkt, järelikult $|BD| = |CD|$.

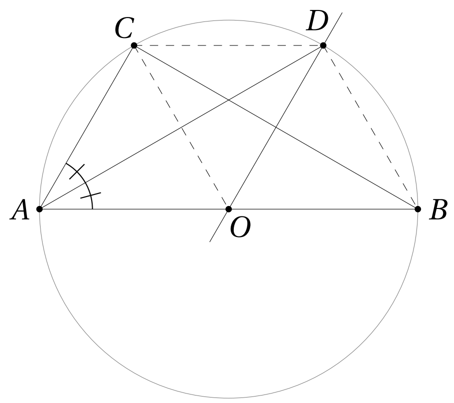
Kuna $ABDC$ on kõõlnelinurk, saame $\angle BDA = \angle BCA = \gamma$ ning $\angle CBD = \angle CAD = \frac{\alpha}{2}$. Samuti teame, et $\angle SBC = \frac{\beta}{2}$. Leiame nurga DSB suuruse:

$$\angle DSB = 180^\circ - \angle SBD - \angle BDS = 180^\circ - \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}\right) - \gamma = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = \angle SBD.$$

Niisiis on kolmnurk BDS võrdhaarne, mistõttu ka $|BD| = |SD|$.

34.9 Vastus: 30° ja 60°.

Olgu O hüpotenuusi AB (ja kolmnurga ABC ümberringjoone) keskpunkt. Siis on OD lõigu BC keskristsirge. Järelduse 34.1 põhjal asub sirge OD ja nurga CAB poolitaja lõikepunkt D kolmnurga ABC ümberringjoonel.



Kuna punktid O ja D on sirge BC suhtes sümmeetrilised, saame $\angle COB = \angle BDC$. Kesk- ja piirdenurga vahelisest seosest teame, et $\angle COB = 2\angle CAB$.

Teisest küljest, kuna $ABDC$ on kõõlnelinurk, kehtib võrdus $\angle CAB + \angle BDC = 180^\circ$. Seega saame

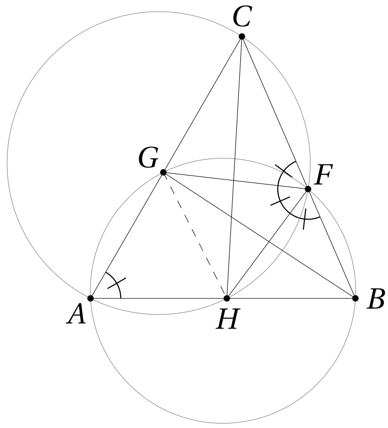
$$\angle CAB + 2\angle CAB = 180^\circ,$$

kust omakorda $\angle CAB = 60^\circ$ ja järelikult ka $\angle ABC = 30^\circ$.

Teise võimaliku lahenduse annab ülesanne 33.9.

34.10 Kolmnurga külgede keskristsirgete lõikepunkt on tema ümberringjoone keskpunkt. See tähendab, et kolmnurga mingist tipust tõmmatud nurgapoolitaja on sirge, mis läbib nii ümberringjoone keskpunkti kui ka vastaskaare keskpunkti. Niisiis on see nurgapoolitaja ühtlasi vastaskülje keskristsirge. Teoreemi 33.2 põhjal on kolmnurk ABC järelikult võrdhaarne.

34.11 Olgu kolmnurkade ABG ja ACH ümberringjoonte teine lõikepunkt F. Teeme joonise.



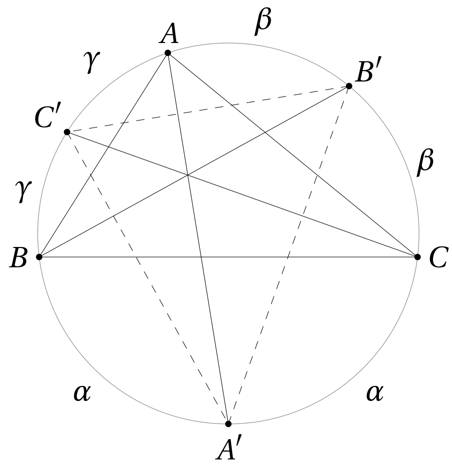
Kuna BG ja CH on vastavalt nurkade ABC ja BCA poolitajad, poolitavad punktid G ja H vastavad kaared AF. See tähendab, et punktid A ja F on sümmeetrilised sirge GH suhtes ning järelikult $\angle GAH = \angle HFG$.

$AHFC$ on kõõlnelinurk, seega $\angle CAH = 180^\circ - \angle HFC = \angle BFH$. Analoogiliselt järeldub $ABFG$ kõõlnelinurksusest, et $\angle GAB = \angle GFC$. Kokkuvõttes saame

$$180^\circ = \angle BFH + \angle HFG + \angle GFC = 3\angle CAB\,,$$

millest järeldubki, et $\angle CAB = 60^\circ$.

34.12 Olgu kolmnurga ABC nurkade suurused vastavalt α, β ja γ ning lõigaku nende nurkade poolitajad ümberringjoont vastavalt punktides A', B' ja C'.



Mõtleme kaarte suuruste peale, milledeks vaadeldavad punktid ringjoone jagavad. Kuna $\angle CAB = \alpha$, siis on kaare BC suurus võrdne vastava kesknurga suurusega ehk 2α. Kuna A' poolitab selle kaare, saame $\overset{\frown}{BA'} = \overset{\frown}{A'C} = \alpha$. Analoogiliselt ka $\overset{\frown}{CB'} = \overset{\frown}{B'A} = \beta$ ja $\overset{\frown}{AC'} = \overset{\frown}{C'B} = \gamma$.

Kaarele $B'C'$ vastava kesknurga suurus on järelikult $\beta+\gamma$, mistõttu $\angle C'A'B' = \frac{\beta+\gamma}{2}$. Sama moodi näitame, et $\angle A'B'C' = \frac{\alpha+\gamma}{2}$ ja $\angle B'C'A' = \frac{\alpha+\beta}{2}$. Et kolmnurgad ABC ja $A'B'C'$ on sarnased (võib-olla mingi tippude ümberjärjestusega), peavad nurgad $\frac{\beta+\gamma}{2}$, $\frac{\alpha+\gamma}{2}$ ja $\frac{\alpha+\beta}{2}$ olema mingis järjekorras samad kui α, β ja γ.

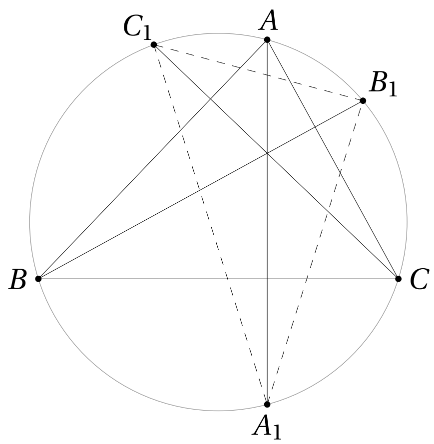
Oletame vastuväiteliselt, et ABC ei ole võrdkülgne kolmnurk. Siis peab tema nurkade seas leiduma kaks mittevõrdset. Olgu üldisust kitsendamata suurim nurk α ning vähim γ, seega $\alpha > \gamma$ ning $\alpha \geqslant \beta \geqslant \gamma$. Vaatame läbi kaks võimalust.

Kui $\alpha > \beta \geqslant \gamma$, ei saa ükski nurkadest $\frac{\beta+\gamma}{2}$, $\frac{\alpha+\gamma}{2}$ ja $\frac{\alpha+\beta}{2}$ olla võrdne nurgaga α.

Kui aga $\alpha \geqslant \beta > \gamma$, ei saa ükski nurkadest $\frac{\beta+\gamma}{2}$, $\frac{\alpha+\gamma}{2}$ ja $\frac{\alpha+\beta}{2}$ olla võrdne nurgaga γ.

Mõlemal juhul saime vastuolu, mistõttu ABC peab olema võrdkülgne kolmnurk.

34.13 Teeme joonise.



Kuna võrdsetele kõõludele vastavad võrdse suurusega kaared, on A kaare B_1C_1 keskpunkt. Teoreemi 34.5 põhjal on sirge AA_1 järelikult nurga $C_1A_1B_1$ poolitaja. Analoogiliselt saame, et sirged BB_1 ja CC_1 on vastavalt nurkade $A_1B_1C_1$ ja $B_1C_1A_1$ poolitajad. Teisisõnu on AA_1, BB_1 ja CC_1 kolmnurga $A_1B_1C_1$ nurgapoolitajad, mis lõikuvad ühes punktis.

34.3 Apolloniose ringjoon

Nurgapoolitaja omaduses (vt jaotis 34.1) mängis olulist rolli suhe $\frac{|AB|}{|AC|}$. Siinses jaotises uurime, milliste punktide A korral on see suhe etteantud konstantse suurusega. Tegemist on ilusa ja üllatava tulemusega, mida tundis juba Vana-Kreeka õpetlane Apollonios[1]. Sõnastame ka selle tulemuse omaette teoreemina.

[1]Apollonios Pergest (u. 240 – 190 e.Kr.) oli Vana-Kreeka geomeeter ja astronoom, kelle olulisimaks teoseks sai 7-osaline käsikiri koonuselõigetest.

Teoreem 34.6 Olgu antud positiivne reaalarv $k \neq 1$ ja tasandil lõik BC. Nende tasandi punktide A hulk, mille korral
$$\frac{|AB|}{|AC|} = k,$$
moodustab ringjoone, mille keskpunkt asub sirgel BC. Seda ringjoont nimetatakse *Apolloniose ringjooneks.*

Tõestus. Uurime alustuseks, mitu teoreemi võrdust rahuldavat punkti asub sirgel BC. Osutub, et selliseid punkte on täpselt kaks – üks lõigu BC sisepiirkonnas ja teine lõigust BC väljaspool.

Vaatleme kõigepealt lõigu BC sisepiirkonda ja seal punkti X, mis liigub punktist B punkti C. Paneme tähele, et selles protsessis $|XB|$ kasvab ja $|XC|$ kahaneb, mis tähendab, et suhe $\frac{|XB|}{|XC|}$ samuti kasvab. Kui $X = B$, siis $\frac{|XB|}{|XC|} = 0$, aga kui punkt X läheneb C-le, kasvab $\frac{|XB|}{|XC|}$ tõkestamatult. Niisiis saavutatakse iga positiivne reaalarv k suhte $\frac{|XB|}{|XC|}$ väärtusena lõigu BC sisepiirkonna punktide X jaoks, kusjuures igaüks täpselt ühel korral.

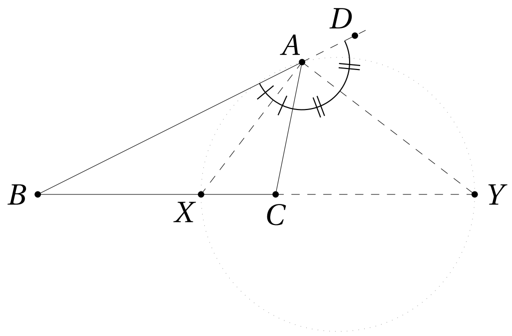
Lõigust BC väljapoole jäävad sirge BC punktid jagame kahte hulka – need, mis asuvad lõigu pikendusel üle punkti B, ja need, mis asuvad lõigu pikendusel üle punkti C.

Näitame, et reaalarvud $k > 1$ on sama moodi saavutatavad suhtena $\frac{|YB|}{|YC|}$ protsessis, kus punkt Y liigub lõigu BC pikendusel üle punkti C punktist C eemale. Kui $Y = C$, on suhe $\frac{|YB|}{|YC|}$ küll määramata, aga punktile C väga lähedaste puntkide Y puhul saab vaadeldav suhe kuitahes suureks. Teisendades
$$\frac{|YB|}{|YC|} = \frac{|YC| + |BC|}{|YC|} = 1 + \frac{|BC|}{|YC|}$$
näeme, et kui punkt Y kaugeneb punktist C, kahaneb suurus $\frac{|BC|}{|YC|}$ monotoonselt. Lõpmata kaugel saab ta kuitahes väikeseks ja seega jõuab suhe $\frac{|YB|}{|YC|}$ kuitahes lähedale arvule 1, kattes nii ära kõik reaalarvud $k > 1$.

Tõestus, et reaalarvud $0 < k < 1$ vastavad sirge BC punktidele, mis asuvad lõigu BC pikendusel üle punkti B, on analoogiline.

Olgu nüüd X ja Y punktid, mis vastavad antud reaalarvule k vastavalt lõigu BC sisepiirkonnas ja sellest väljas.

Vaatleme suvalist punkti A, mis ei asu sirgel BC, aga mille jaoks $\frac{|AB|}{|AC|} = k$. Kuna $\frac{|AB|}{|AC|} = k = \frac{|XB|}{|XC|}$, on AX nurga BAC poolitaja. Et teisest küljest ka $\frac{|AB|}{|AC|} = k = \frac{|YB|}{|YC|}$, on AY kolmnurga tipu A juures asuva välisnurga poolitaja.



Kuna AX ja AY on vastavalt tipu A juures asuva sise- ja välisnurga poolitajad, saame

$$\angle XAY = \angle XAC + \angle CAY = \frac{1}{2}\angle BAC + \frac{1}{2}\angle CAD = \frac{1}{2}\cdot 180^\circ = 90^\circ.$$

Thalese teoreemi pöördteoreemi järgi asub punkt A seega ringjoonel diameetriga XY. Muuhulgas asub selle ringjoone keskpunkt sirgel BC.

Jääb veel tõestada, et kõigi vaadeldava ringjoone punktide puhul kehtib teoreemi võrdus. Oletame, et leidub ringjoone punkt A', mille puhul see nii ei ole, st

$$\frac{|A'B|}{|A'C|} = k',$$

kus $k' \neq k$. Oletame konkreetsuse mõttes, et $k' > k > 1$ (ülejäänud juhtumite korral on tõestus analoogiline). Tõmbame kolmnurga $A'BC$ tipu A' juurest nii sise- kui välisnurga poolitajad; lõigaku nad sirget BC vastavalt punktides X' ja Y'. Siis nurgapoolitaja omaduse põhjal saame

$$\frac{|X'B|}{|X'C|} = \frac{|A'B|}{|A'C|} = k' > k = \frac{|XB|}{|XC|}.$$

Tõestuse esimeses osas nägime, et suhe $\frac{|XB|}{|XC|}$ kasvab siis, kui punkt X liigub punkti C suunas. Järelikult asub punkt X' punktide X ja C vahel.

Täpselt sama moodi saame, et

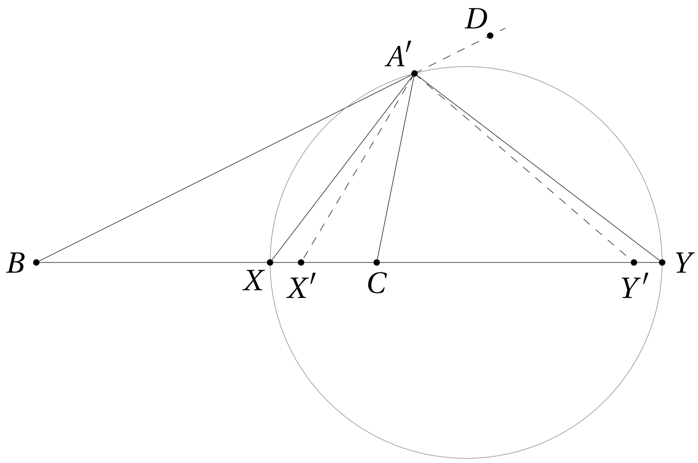
$$\frac{|Y'B|}{|Y'C|} = \frac{|A'B|}{|A'C|} = k' > k = \frac{|YB|}{|YC|}.$$

Kuna suhe $\frac{|YB|}{|YC|}$ samuti kasvab, kui punkt Y liigub punkti C suunas, peab punkt Y' asuma punktide Y ja C vahel.

Et $A'X'$ ja $A'Y'$ on nurgapoolitajad, saame

$$\angle X'A'Y' = \angle X'A'C + \angle CA'Y' = \frac{1}{2}\angle BA'C + \frac{1}{2}\angle CA'D = \frac{1}{2}\cdot 180^\circ = 90^\circ.$$

See aga pole võimalik, sest eeltõestatu põhjal $\angle X'A'Y' < \angle XAY$. Saadud vastuolu näitab, et teoreemi võrdus kehtib kõigi vaadeldava ringjoone punktide puhul.



□

Ülesanded

Ülesanne 34.14 (Piirkonnavoor 2020, 12. klass) Koordinaattasandil on antud punktid $A(0;0)$ ja $B(-9;0)$. Leia võrrand joonele, mis koosneb parajasti neist punktidest, mis asuvad punktist B kaks korda kaugemal kui punktist A, ja skitseeri see joon.

Ülesanne 34.15 (Sügisene lahtine võistlus 1998, vanem rühm) Kolmnurga ABC küljel BC on võetud selline tippudest B ja C erinev punkt D, et nurkade ACB ja ADB poolitajad lõikuvad küljel AB. Olgu punkt D' sümmeetriline punktiga D sirge AB suhtes. Tõesta, et punktid C, A ja D' asuvad ühel sirgel.

Lahendused

34.14 Teoreemi 34.6 põhjal teame, et tegemist on ringjoonega, mille keskpunkt asub sirgel AB ehk koordinaattasandi x-teljel. Selle ringjoone ja sirge AB lõikepunktide X_1, X_2 koordinaadid esituvad kujul $(x;0)$, kus

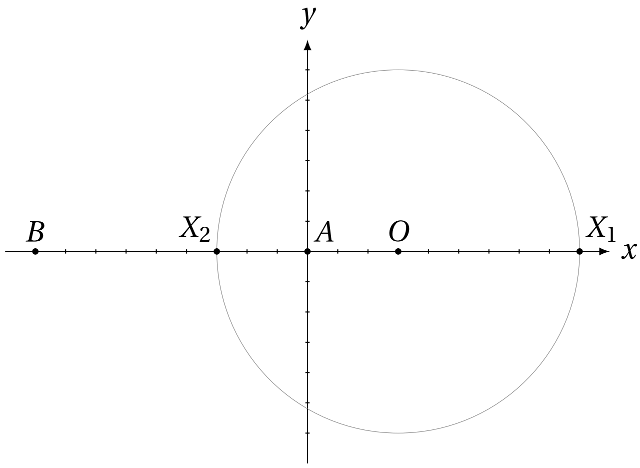
$$2 = \frac{|BX_i|}{|AX_i|} = \frac{|x-(-9)|}{|x-0|} = \frac{|x+9|}{|x|} \quad (i = 1,2)\,.$$

Juhul $x > 0$ saame võrrandi $2x = x + 9$, mis annab lahendi $x = 9$.

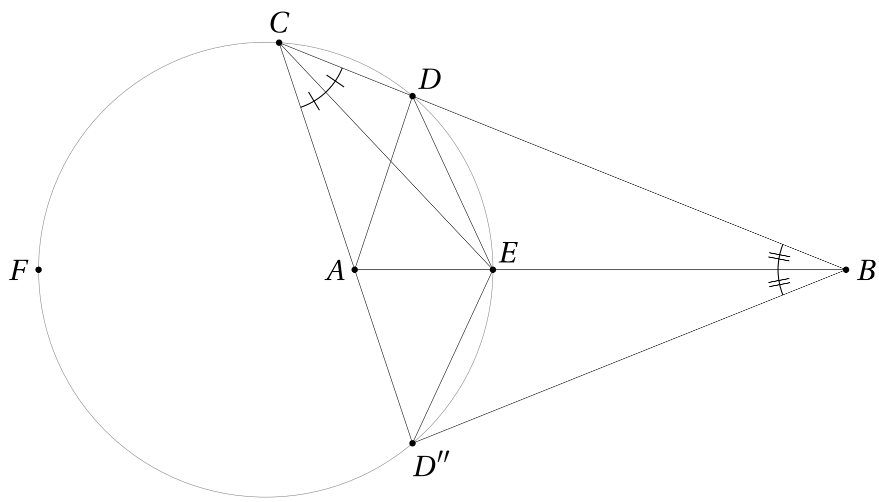
Juhul $-9 \leqslant x < 0$ saame võrrandi $-2x = x + 9$, mis annab lahendi $x = -3$.

Juhul $x < -9$ saame võrrandi $-2x = -x - 9$, mis annab lahendi $x = 9$, aga see ei kuulu vaadeldavasse piirkonda.

Niisiis on otsitavad lõikepunktid $X_1(9;0)$ ja $X_2(-3;0)$ ning ringjoone keskpunktiks on diameetri X_1X_2 keskpunkt $O(3;0)$.



34.15 Olgu nurkade ACB ja ADB poolitajate lõikepunkt E. Peegeldame külje BC sirget sirge AB suhtes; olgu D'' selle peegeldatud sirge lõikepunkt sirgega AC.

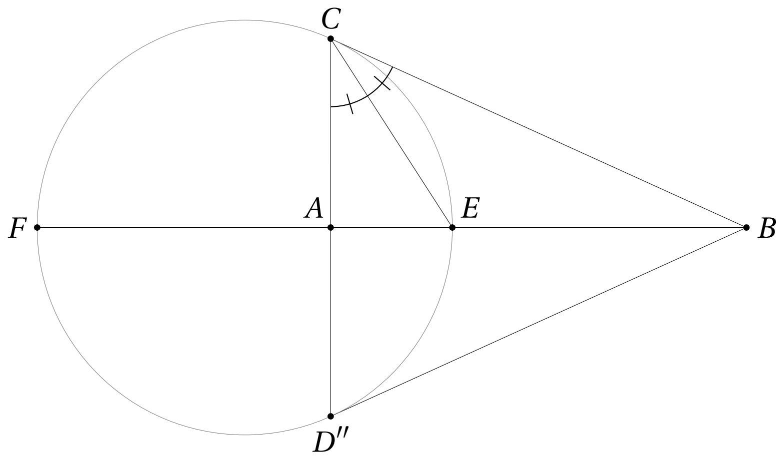


Siis ülesande tingimuste põhjal $\angle D''CE = \angle ECB$ ning konstruktsiooni järgi $\angle CBE = \angle EBD''$. Järelikult on E kolmnurga BCD'' nurgapoolitajate lõikepunkt ja muuhulgas $\angle BD''E = \angle ED''C$.

Lahenduse lõpuleviimiseks tõestame, et punktid D ja D'' on sümmeetrilised sirge AB suhtes (ja järelikult $D' = D''$). Paneme tähele, et teoreemi 34.6 põhjal saab sirgel BC olla ainult kaks punkti, millest tõmmatud nurgapoolitajad lõikuvad punktis E. Tõepoolest, kõik sellised tasandi punktid peavad asuma ühel ringjoonel, aga ringjoonel ja sirgel saab olla kuni kaks ühist punkti. Sama tähelepanek kehtib ka sirge BD'' suhtes, kusjuures kuna Apolloniose ringjoone keskpunkt asub sirgel AB, peavad vastavad punktid sirge AB suhtes sümmeetrilised olema.

Kuna nurga $BD''A$ poolitaja läbib punkti E ja D'' asub sirgel, mis on sümmeetriline sirgega BC, peab D'' olema sümmeetriline kas punktiga C või punktiga D. Näitame, et kui D'' oleks sümmeetriline punktiga C, siis oleks BC Apolloniose ringjoone puutuja ning punktid C ja D langeksid kokku, mis oleks vastuolu ülesande tingimustega.

Kui punktid C ja D'' on sümmeetrilised sirge AB suhtes, peab kehtima $\angle CAB = 90°$.



Potentsiteoreemist 32.1 saame

$$|CA|^2 = |CA| \cdot |AD''| = |FA| \cdot |AE|$$

ehk $\frac{|CA|}{|FA|} = \frac{|AE|}{|CA|}$. Kuna AE on nurga ACE poolitaja, teame nurgapoolitaja omadusest, et $\frac{|CA|}{|CB|} = \frac{|AE|}{|EB|}$, kust omakorda $\frac{|AE|}{|CA|} = \frac{|EB|}{|CB|}$. Järelikult kehtib ka võrdus $\frac{|CA|}{|FA|} = \frac{|EB|}{|CB|}$.

Kuna F on samuti punkt Apolloniose ringjoonel, teame, et $\frac{|CA|}{|CB|} = \frac{|FA|}{|FB|}$, kust saame $\frac{|CA|}{|FA|} = \frac{|CB|}{|FB|}$. Järelikult kehtib võrdus $\frac{|EB|}{|CB|} = \frac{|CB|}{|FB|}$ ehk $|CB|^2 = |EB| \cdot |FB|$. Potentsiteoreemi 32.3 järgi on see võrdus samaväärne tingimusega, et BC on Apolloniose ringjoone puutuja.