

33. Nurgapoolitaja omadused

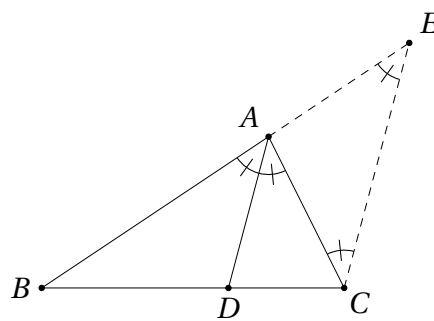
Nurgapoolitaja on võistlusülesannetes sageli esinev geomeetriline objekt, millel on palju huvitavaid omadusi. Nende seas on ajalooliselt välja kujunenud üks, mida mõnevõrra segadusttekitavalt nimetataksegi lihtsalt nurgapoolitaja omaduseks.

33.1 Nurgapoolitaja (esimene) omadus

Teoreem 33.1 Lõigaku kolmnurga ABC nurga BAC poolitaja külge BC punktis D . Siis jagab punkt D lõigu BC suhtes $|AB| : |AC|$, st

$$\frac{|BD|}{|CD|} = \frac{|AB|}{|AC|}.$$

Tõestus. Tõmbame tipust C lõiguga AD paralleelse sirge. Lõikuga see sirge külje AB pikendusega punktis E .



Kuna AD on nurga BAC poolitaja, teame, et $\angle BAD = \angle DAC$. Konstruktsiooni järgi $EC \parallel AD$, seega $\angle BAD = \angle AEC$ ja samuti põiknurkade omadusest $\angle DAC = \angle ACE$. Järelikult on kolmnurk ACE võrdhaarne ja $|AE| = |AC|$.

Kiirteteoreemist teame, et

$$\frac{|BD|}{|CD|} = \frac{|AB|}{|AE|}.$$

Kuna eeltõestatu põhjal lisaks $|AE| = |AC|$, saamegi siit teoreemi väite. \square

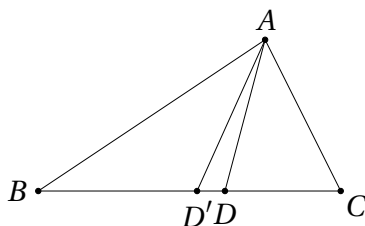
Kehtib ka teoreemi 33.1 pöördteoreem.

Teoreem 33.2 Valime kolmnurga ABC küljel BC punkti D nii, et

$$\frac{|BD|}{|CD|} = \frac{|AB|}{|AC|}.$$

Siis AD on nurga BAD poolitaja.

Tõestus. Vaatleme nurga BAD poolitajat; lõikugu ta küljega BC punktis D' . Oletame vastuväiteliselt, et $D \neq D'$. Vaatleme kõigepealt juhtu, kus punkt D' asub lõigu BD sisepiirkonnas.



Kuna BD' on nurga BAD poolitaja, saame teoreemist 33.1

$$\frac{|BD'|}{|CD'|} = \frac{|AB|}{|AC|}.$$

Et punkt D' asub lõigu BD sisepiirkonnas, kehtivad võrratused $|BD'| < |BD|$ ja $|CD'| > |CD|$. Järelikult

$$\frac{|BD'|}{|CD'|} < \frac{|BD|}{|CD|} = \frac{|AB|}{|AC|},$$

vastuolu teoreemiga 33.1. Sama moodi saame vastuolu ka juhul, kui punkt D' asub lõigu CD sisepiirkonnas. Järelikult on ainus võimalus, et $D = D'$ ja AD on nurga BAD poolitaja. \square

Teoreemide 33.1 ja 33.2 analoogid kehtivad ka välisnurga poolitaja korral ja vastavad tõestused on väga sarnased nende teoreemide tõestustega.

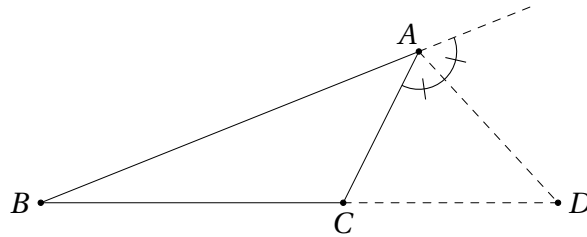
Teoreem 33.3 Lõigaku kolmnurga ABC tipu A juures asuva välisnurga poolitaja külje BC pikendust punktis D . Siis kehtib võrdus

$$\frac{|BD|}{|CD|} = \frac{|AB|}{|AC|}.$$

Teoreem 33.4 Valime kolmnurga ABC külje BC pikendusel punkti D nii, et

$$\frac{|BD|}{|CD|} = \frac{|AB|}{|AC|}.$$

Siis AD on kolmnurga tipu A juures asuva välisnurga poolitaja.



Harjutus 33.1 Tõesta teoreemid 33.3 ja 33.4.

Nurgapoolitaja omaduse ilusaks rakenduseks on Apolloniose ringjoon, mille kohta saab lähemalt lugeda lisast 39.

Ülesanded

Ülesanne 33.1 (Lõppvoor 2006, 9. klass) Võrdhaarse kolmnurga ABC tipunurga C suurus on 120° . Kolmnurga alusel AB valitakse punktid D ja E nii, et $|AD| = |DE| = |EB|$. Leia kolmnurga CDE nurkade suurused.

Ülesanne 33.2 (Piirkonnavor 2005, 12. klass) Kolmnurga ABC tipust A tõmmatud nurgapoolitaja lõikab külge BC punktis D . Lisaks läbib punkti D veel kaks sirget: küljega AB paralleelne sirge, mis lõikab külge AC punktis E , ning küljega AC paralleelne sirge, mis lõikab külge AB punktis F . Tõesta, et

$$\frac{|EC|}{|FB|} = \frac{|CD|^2}{|BD|^2}.$$

Ülesanne 33.3 (Lõppvoor 2012, 10. klass) Tasandil on antud kolmnurk ABC . Olgu P tipust A tõmmatud nurgapoolitaja lõikepunkt küljega BC ning M kolmnurga ABC tipust B tõmmatud mediaani aluspunkt. Sirged AB ja MP lõikuvad punktis K . Tõesta, et kui $\frac{|PC|}{|BP|} = 2$, siis AP ja CK on risti.

Ülesanne 33.4 (Lõppvoor 2017, 11. klass) Olgu AM erikülgsel kolmnurga ABC mediaan. Olgu K kolmnurga ABC siseringjoone puutepunkt küljega BC . Tõesta, et kui külje BC pikkus on külgede AB ja AC pikkuste aritmeetiline keskmine, siis nurga BAC poolitaja läbib lõigu KM keskpunkti.

Ülesanne 33.5 (Lõppvoor 2001, 12. klass) Olgu I ja r vastavalt täisnurkse kolmnurga ABC siseringjoone keskpunkt ja raadius. Teravnurkade tippudest tõmmatud kiired AI ja BI lõikavad vastaskaateteid BC ja AC vastavalt punktides D ja E . Tõesta, et

$$\frac{1}{|AE|} + \frac{1}{|BD|} = \frac{1}{r}.$$

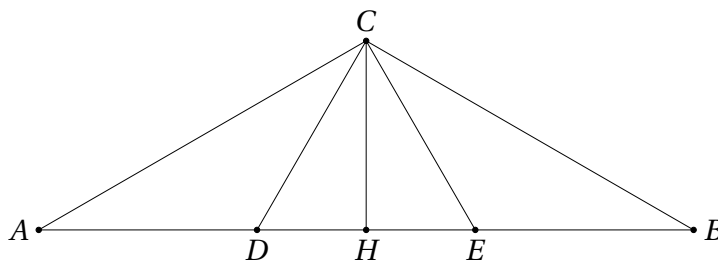
Ülesanne 33.6 (Sügisene lahtine võistlus 2022, vanem rühm) Kumeras nelinurgas $ABCD$ on $\angle ABC = \angle ADC$ ning $\angle BAD > \angle DCB$. Nurga ADC poolitaja ja lõigu AC keskrisirge lõikuvad punktis P . Lõigul AC valitakse selline punkt E , et $\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|CE|}{|EA|}$.

Tõesta, et $\angle EPC = \angle ACB$.

Lahendused

33.1 Vastus: kõik nurgad on 60° suurused.

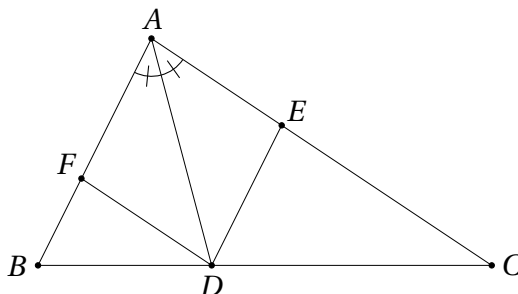
Tõmbame kolmnurgale ABC tipust C kõrguse CH . Tänu kolmnurga võrdhaarsusele osutub CH ka mediaaniks ja nurgapoolitajaks (vt teoreem 32.1). Muuhulgas poolitab H lõigud AB ja DE .



Kuna CH on nurga BCA poolitaja, saame $\angle BCH = 60^\circ$ ja $\frac{|CH|}{|CB|} = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$.

Samas ka $\frac{|HE|}{|EB|} = \frac{1}{2}$, järelikult on CE teoreemi 33.2 alusel nurga BCH poolitaja. Niisiis $\angle ECH = 30^\circ$ ning analoogiliselt $\angle HCD = 30^\circ$, mistõttu $\angle ECD = 60^\circ$ ja CDE on võrdhaarne kolmnurk tipunurgaga 60° . Järelikult peavad ka selle kolmnurga alusnurgad olema 60° suurused.

33.2 Kuna $ED \parallel AB$ ja $FD \parallel AC$, siis $\triangle EDC \sim \triangle ABC \sim \triangle FBD$.



Kolmnurkade EDC ja FBD sarnasusest saame $\frac{|EC|}{|ED|} = \frac{|FD|}{|FB|}$, millest omakorda

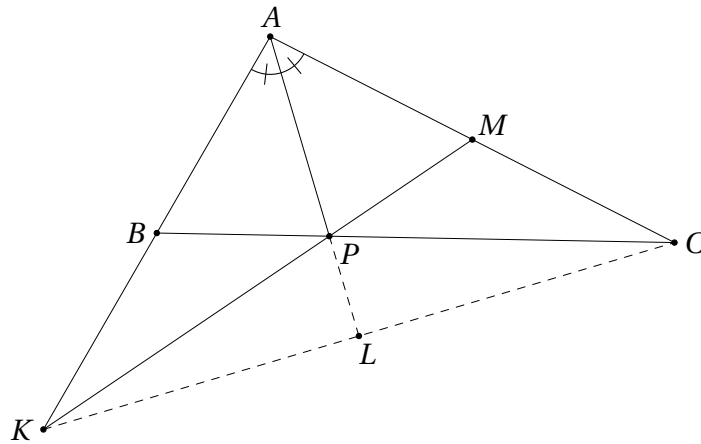
$$\frac{|EC|}{|FB|} = \frac{|ED| \cdot |FD|}{|FB| \cdot |FB|}.$$

Kolmnurkade FDB ja ABC sarnasusest $\frac{|FD|}{|FB|} = \frac{|AC|}{|AB|}$ ning nurgapoolitaja omadusest saame edasi $\frac{|AC|}{|AB|} = \frac{|CD|}{|BD|}$, seega kehtib ka võrdus $\frac{|FD|}{|FB|} = \frac{|CD|}{|BD|}$. Teisest küljest ED ja FB on vastavad lõigud sarnastes kolmnurkades EDC ja FBD sarnasusteguriga $\frac{|ED|}{|FB|} = \frac{|CD|}{|BD|}$. Kokkuvõttes

$$\frac{|EC|}{|FB|} = \frac{|ED| \cdot |FD|}{|FB| \cdot |FB|} = \frac{|ED|}{|FB|} \cdot \frac{|FD|}{|FB|} = \frac{|CD|}{|BD|} \cdot \frac{|CD|}{|BD|},$$

mida oligi tarvis.

33.3 Teeme joonise.



Olgu L sirgete AP ja KL lõikepunkt, siis on tarvis tõestada, et AL on kolmnurga AKC kõrgus. Kuna AL on konstruktsiooni järgi nurga KAC poolitaja, on tarvilik ja piisav näidata, et kolmnurk AKC on võrdhaarne, st et $|AK| = |AC|$.

Nurgapoolitaja omaduse põhjal $\frac{|AC|}{|AB|} = \frac{|PC|}{|BP|} = 2$, kust saame $|AC| = 2|AB|$. Seega tuleb tõestada, et B on lõigu AK keskpunkt ehk BC on kolmnurga AKC mediaan.

Me teame, et lõik KM on selle kolmnurga mediaan ja et punkt P , mis asub ka lõigul KM , jaotab lõigu BC suhtes $1 : 2$. Kas nendest tähelepanekutest piisab väitmaks, et BC on kolmnurga AKC mediaan?

Seda pole niisama lihtne tõestada. Appi tuleb trikk, mida geomeetriaülesannete lahendamisel sageli kasutatakse – me *konstrueerime* kolmnurga nii, et BC oleks tema mediaan, ja seejärel tõestame, et saadav olukord langeb kokku ülesandes kirjeldatuga.

Täpsemalt, olgu K' punkti A peegeldus üle punkti B , st B on lõigu AK' keskpunkt. Siis on nii BC kui $K'M$ kolmnurga $AK'M$ mediaanid. Need mediaanid lõikuvad punktis, mis jaotab lõigu BC suhtes $1 : 2$, st punktis P . Seega on K' samuti sirgete AB ja MP lõikepunkt, mistõttu $K = K'$. Järelikult $|AK| = 2|AB| = |AC|$, mida oligi tarvis.

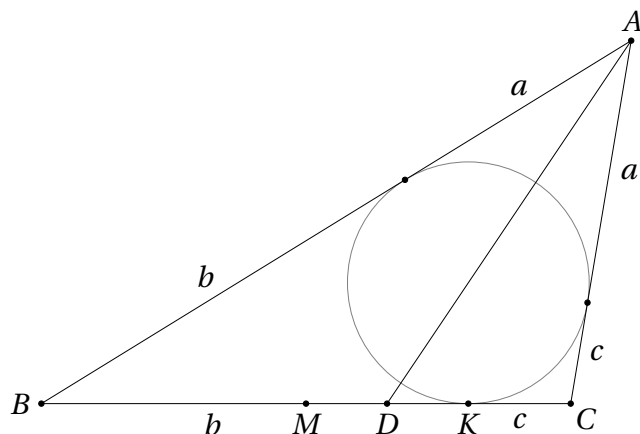
Selle ülesande teise lahenduse annab ülesanne 32.13.

33.4 Üldisust kitsendamata olgu $|AB| > |AC|$. Tähistame kolmnurga tippudest A, B ja C siseringjoonele tõmmatud puutujalõikude pikkusi vastavalt a, b ja c . Ülesande tingimustest saame siis

$$|BC| = \frac{|AB| + |AC|}{2} \quad \text{ehk} \quad b + c = \frac{a + b + a + c}{2},$$

millest järeldub võrdus $2a = b + c$.

Olgu D nurga BAC lõikepunkt küljega BC . Siis asuvad punktid M, D ja K küljel BC niisuguses järjekorras nagu näidatud joonisel.



Nurgapoolitaja omadusest saame

$$\frac{|BD|}{|DC|} = \frac{|AB|}{|AC|} = \frac{a+b}{a+c}, \quad \text{millest} \quad |BD| = |DC| \cdot \frac{a+b}{a+c}.$$

Teisest küljest aga

$$|BD| + |DC| = |BC| = b + c.$$

Niisiis saame teisendada

$$\begin{aligned} |DC| \cdot \frac{a+b}{a+c} + |DC| &= b + c, \\ |DC| \cdot \left(\frac{a+b}{a+c} + 1 \right) &= b + c, \\ |DC| \cdot \frac{a+b+a+c}{a+c} &= b + c, \\ |DC| &= \frac{(b+c)(a+c)}{2a+b+c} = \\ &= \frac{(b+c)(a+c)}{2(b+c)} = \frac{a+c}{2}, \end{aligned}$$

sest $b + c = 2a$.

Nüüd avaldame lõikude MD ja DK pikkused:

$$\begin{aligned} |MD| &= |MC| - |DC| = \frac{b+c}{2} - \frac{a+c}{2} = \frac{b-a}{2}, \\ |DK| &= |DC| - |KC| = \frac{a+c}{2} - c = \frac{a-c}{2}. \end{aligned}$$

Võrdusest $2a = b + c$ saame $a - c = b - a$, mistõttu ka $|MD| = |DK|$, nagu oligi tarvis.

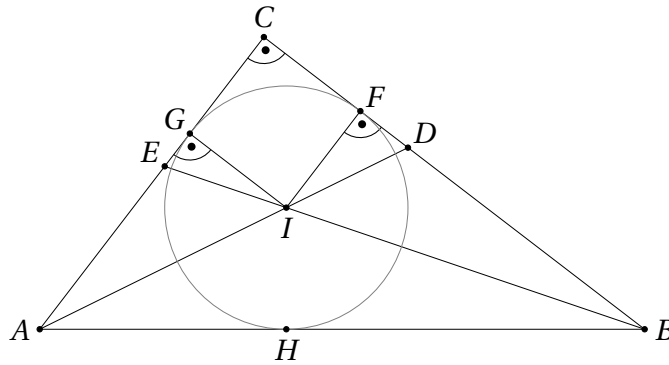
33.5 Nurgapoolitaja omadusest saame võrdused

$$\frac{|CE|}{|AE|} = \frac{|BC|}{|AB|} \quad \text{ja} \quad \frac{|CD|}{|BD|} = \frac{|AC|}{|AB|}.$$

Seega

$$\frac{1}{|AE|} + \frac{1}{|BD|} = \frac{|BC|}{|AB| \cdot |CE|} + \frac{|AC|}{|AB| \cdot |CD|} = \frac{1}{|AB|} \left(\frac{|BC|}{|CE|} + \frac{|AC|}{|CD|} \right).$$

Olgu kolmnurga ABC siseringjoone puutepunktid külgedega BC , CA ja AB vastavalt F , G ja H .



Kuna $IF \perp BC$, kehtib ka $IF \parallel EC$. Järelikult $\triangle BEC \sim \triangle BIF$, millest $\frac{|BC|}{|CE|} = \frac{|BF|}{|FI|} = \frac{|BF|}{r}$. Analoogiliselt näitame, et $\frac{|AC|}{|CD|} = \frac{|AG|}{r}$. Puutujalõikude võrdsust kasutades saame nüüd

$$\frac{|BC|}{|CE|} + \frac{|AC|}{|CD|} = \frac{|BF|}{r} + \frac{|AG|}{r} = \frac{|BH|}{r} + \frac{|AH|}{r} = \frac{|AB|}{r}.$$

Kokkuvõttes

$$\frac{1}{|AE|} + \frac{1}{|BD|} = \frac{1}{|AB|} \left(\frac{|BC|}{|CE|} + \frac{|AC|}{|CD|} \right) = \frac{1}{|AB|} \cdot \frac{|AB|}{r} = \frac{1}{r},$$

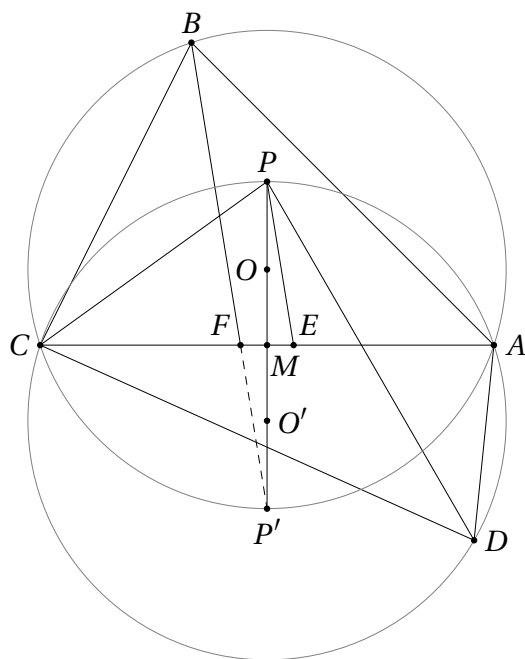
nagu oligi tarvis.

33.6 Tingimus $\angle ABC = \angle ADC$ tähendab, et lõik AC paistab punktide B ja D sama nurga all. See omakorda tähendab, et kolmnurkade ABC ja ADC ümberringjooned on sümmeetrilised sirge AC suhtes. Olgu nende ringjoonte keskpunktid vastavalt O ja O' , siis on OO' lõigu AC keskristsirge. Olgu M sirgete OO' ja AC lõikepunkt (ning muuhulgas lõigu AC keskpunkt).

Uurime tingimust $\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|CE|}{|EA|}$. Me teame nurgapoolitaja omadusest, et lõigul

AC leidub täpselt üks punkt F nii, et $\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|FA|}{|CF|}$, nimelt nurga ABC poolitaja lõikepunkt selle lõiguga. Niisiis on ka punkt E lõigul AC üheselt määratud, kusjuures punktid E ja F on sümmeetrilised selle lõigu keskpunkti M suhtes.

Nurga ADC poolitaja ja lõigu AC keskristsirge lõikuvad kolmnurga ADC ümberringjoone kaare AC keskpunktis, niisiis ongi P vaadeldava kaare keskpunkt. Muuhulgas asub P sirgel OO' .



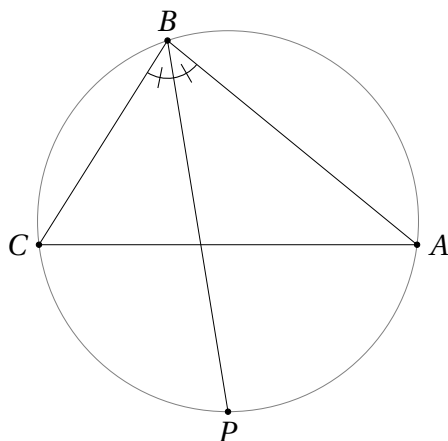
Olgu P' punktiga P sirge AC suhtes sümmeetriline punkt. Siis on P' kolmnurga ABC ümberringjoone kaare CA keskpunkt ning asub järelikult nurga ABC poolitajal. Lõik FP' on sümmeetriline lõiguga EP punkti M suhtes, mistõttu sirged EP ja BP' on paralleelsed ning järelikult $\angle PEC = \angle CFB$.

Seega on üllesande väide samaväärne väitega, et kolmnurgad PEC ja CFB on sarnased. Viimase väite tõestamiseks piisab näidata, et $\angle PCA = \angle CBP'$. See võrdus aga kehtib, sest need nurgad toetuvad piirdenurkadena võrdse raadiusega ringjoonte võrdse suurusega kaartele (vastavalt kaared PA ja $P'C$).

33.2 Nurgapoolitaja teine omadus

Teoreem 33.5 Olgu antud punkt P kolmnurga ABC kaarel AC , mis ei sisalda punkti B . Sirge BP on nurga ABC poolitaja parajasti siis, kui P on kaare AC keskpunkt.

Tõestus. Sirge BP on nurga ABC poolitaja parajasti siis, kui $\angle ABP = \angle PAC$ ehk $\widehat{AP} = \widehat{PC}$. Viimane tingimus aga tähendab parajasti seda, et P on kaare AC keskpunkt.



□

Kuna peale nurgapoolitaja läbib kaare AC keskpunkti ka külje AC keskristsirge, saame teoreemist 33.5 lihtsa järelduse, mis omab ülesannete lahendamisel sageli iseseisvat tähtsust.

Järeldus 33.1 Vaatleme kolmnurga tippu, mille lähisküljed pole võrdsed. Sellest tipust tõmmatud nurgapoolitaja ja vastaskülje keskristsirge lõikuvad vaadeldava kolmnurga ümberringjoonel, kusjuures lõikepunktiks on vastava kaare keskpunkt.

Võrdhaarse kolmnurga tipunurgast tõmmatud nurgapoolitaja ja vastaskülje keskristsirge langevad kokku (vt järeldus 32.1).

Ülesanded

Ülesanne 33.7 (Lõppvoor 1998, 9. klass) Olgu S kolmnurga ABC siseringjoone keskpunkt ning lõigaku sirge AS kolmnurga ABC ümberringjoont punktis D ($D \neq A$). Tõesta, et lõigud BD , CD ja SD on võrdse pikkusega.

Ülesanne 33.8 (Piirkonnavoor 1999, 10. klass) Täisnurkse kolmnurga ABC hüpotenuusi AB keskpunktiga sirge BC suhtes sümmeetriline punkt D asub nurga CAB poolitajal. Leia kolmnurga ABC teravnurkade suurused.

Ülesanne 33.9 (Piirkonnavoor 2019, 10. klass) Kolmnurga ABC mingi kahe külje keskristsirged lõikuvad kolmnurga ABC mingi sisenurga poolitajal. Tõesta, et kolmnurk ABC on võrdhaarne.

Ülesanne 33.10 (Lõppvoor 2006, 10. klass) Kolmnurga ABC tipust B tõmmatud nurgapoolitaja lõikab külge AC punktis G ning tipust C tõmmatud nurgapoolitaja lõikab külge AB punktis H . On teada, et kolmnurkade ABG ja ACH ümberringjoonte üks lõikepunktidest asub küljel BC . Tõesta, et nurga BAC suurus on 60° .

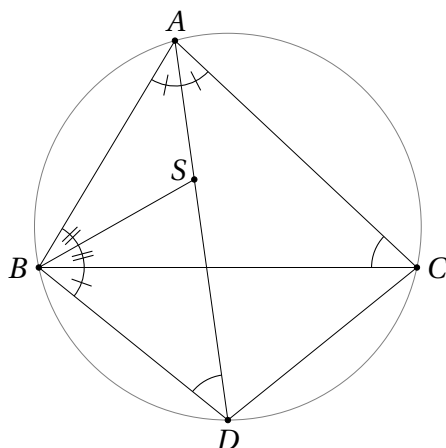
Ülesanne 33.11 (Piirkonnavoor 2000, 12. klass) Kolmnurga ABC nurgapoolitajaid pikendatakse lõikumiseni ümberringjoonega. Kolmnurk, mille tippudeks on saadavad lõikepunktid, on sarnane kolmnurgaga ABC . Tõesta, et kolmnurk ABC on võrdkülgne.

Ülesanne 33.12 (Piirkonnavoor 2007, 11. klass) Teravnurkse kolmnurga ABC ümberringjoone kaartel BC , CA ja AB , millest igaüks ühendab parajasti kahte kolmnurga tippu, on valitud vastavalt punktid A_1 , B_1 ja C_1 nii, et $|AB_1| = |AC_1|$, $|BC_1| = |BA_1|$ ja $|CA_1| = |CB_1|$. Tõesta, et sirged AA_1 , BB_1 ja CC_1 lõikuvad ühes punktis.

Vaata ka ülesandeid 32.17 ja 31.9.

Lahendused

33.7 Tähistame kolmnurga ABC nurkade suurusi vastavalt α , β ja γ . Et S on selle kolmnurga siseringjoone keskpunkt, on AS , BS ja CS tema nurgapoolitajad.



Teoreemi 33.5 põhjal on D kaare BC keskpunkt, järelikut $|BD| = |CD|$.

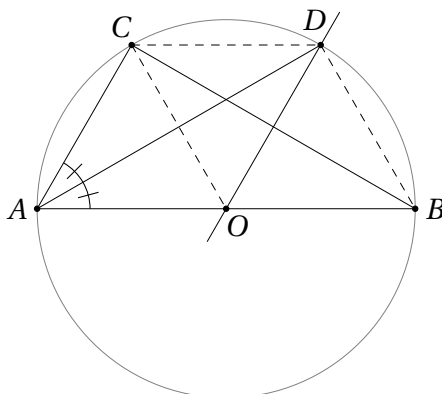
Kuna $ABDC$ on kõõlnelinurk, saame $\angle BDA = \angle BCA = \gamma$ ning $\angle CBD = \angle CAD = \frac{\alpha}{2}$. Samuti teame, et $\angle SBC = \frac{\beta}{2}$. Leiame nurga DSB suuruse:

$$\angle DSB = 180^\circ - \angle SBD - \angle BDS = 180^\circ - \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}\right) - \gamma = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = \angle SBD.$$

Niisiis on kolmnurk BDS võrdhaarne, mistõttu ka $|BD| = |SD|$.

33.8 Vastus: 30° ja 60° .

Olgu O hüpotenuusi AB (ja kolmnurga ABC ümberringjoone) keskpunkt. Siis on OD lõigu BC keskristsirge. Järelduse 33.1 põhjal asub sirge OD ja nurga CAB poolitaja lõikepunkt D kolmnurga ABC ümberringjoonel.



Kuna punktid O ja D on sirge BC suhtes sümmeetrilised, saame $\angle COB = \angle BDC$. Kesk- ja piirdenurga vahelisest seosest teame, et $\angle COB = 2\angle CAB$.

Teisest küljest, kuna $ABDC$ on kõõlnelinurk, kehtib võrdus $\angle CAB + \angle BDC = 180^\circ$. Seega saame

$$\angle CAB + 2\angle CAB = 180^\circ,$$

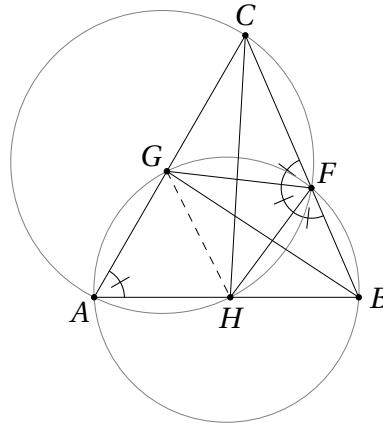
kust omakorda $\angle CAB = 60^\circ$ ja järelikut ka $\angle ABC = 30^\circ$.

Teise võimaliku lahenduse annab ülesanne 32.9.

33.9 Kolmnurga külgede keskristsirgete lõikepunkt on tema ümberringjoone keskpunkt. See tähendab, et kolmnurga mingist tipust tõmmatud nurgapoolitaja on

sirge, mis läbib nii ümberringjoone keskpunkti kui ka vastaskaare keskpunkti. Nii-
siis on see nurgapoolitaja ühtlasi vastaskülje keskristsirge. Teoreemi 32.2 põhjal
on kolmnurk ABC järelikult võrdhaarne.

- 33.10 Olgu kolmnurkade ABG ja ACH ümberringjoonte teine lõikepunkt F . Teeme
joonise.



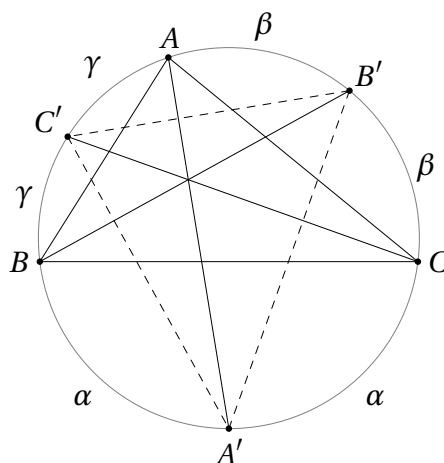
Kuna BG ja CH on vastavalt nurkade ABC ja BCA poolitajad, poolitavad punktid
 G ja H vastavad kaared AF . See tähendab, et punktid A ja F on sümmeetrilised
sirge GH suhtes ning järelikult $\angle GAH = \angle HFG$.

$AHFC$ on kõõnelinurk, seega $\angle CAH = 180^\circ - \angle HFC = \angle BFH$. Analoogiliselt
järeldeb $ABFG$ kõõnelinurksusest, et $\angle GAB = \angle GFC$. Kokkuvõttes saame

$$180^\circ = \angle BFH + \angle HFG + \angle GFC = 3\angle CAB,$$

millest järeldebki, et $\angle CAB = 60^\circ$.

- 33.11 Olgu kolmnurga ABC nurkade suurused vastavalt α, β ja γ ning lõigaku nende
nurkade poolitajad ümberringjoont vastavalt punktides A', B' ja C' .



Mõtleme kaarte suuruste peale, milledeks vaadeldavad punktid ringjoone
jagavad. Kuna $\angle CAB = \alpha$, siis on kaare BC suurus võrdne vastava kesk-
nurraga ehk 2α . Kuna A' poolitab selle kaare, saame $\widehat{BA'} = \widehat{A'C} = \alpha$. Analoogiliselt
ka $\widehat{CB'} = \widehat{B'A} = \beta$ ja $\widehat{AC'} = \widehat{C'B} = \gamma$.

Kaarele $B'C'$ vastava kesknurga suurus on järelikult $\beta + \gamma$, mistõttu $\angle C'A'B' = \frac{\beta + \gamma}{2}$. Sama moodi näitame, et $\angle A'B'C' = \frac{\alpha + \gamma}{2}$ ja $\angle B'C'A' = \frac{\alpha + \beta}{2}$. Et kolmnurgad ABC ja $A'B'C'$ on sarnased (võib-olla mingi tippude ümberjärjestusega), peavad nurgad $\frac{\beta + \gamma}{2}$, $\frac{\alpha + \gamma}{2}$ ja $\frac{\alpha + \beta}{2}$ olema mingis järjekorras samad kui α , β ja γ .

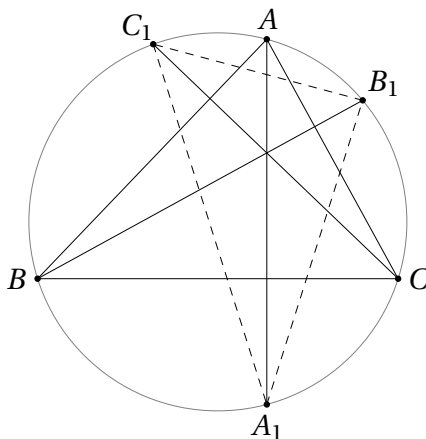
Oletame vastuväiteliselt, et ABC ei ole võrdkülgne kolmnurk. Siis peab tema nurkade seas leiduma kaks mittevõrdset. Olgu üldisust kitsendamata suurim nurk α ning vähim γ , seega $\alpha > \gamma$ ning $\alpha \geq \beta \geq \gamma$. Vaatame läbi kaks võimalust.

Kui $\alpha > \beta \geq \gamma$, ei saa ükski nurkadest $\frac{\beta + \gamma}{2}$, $\frac{\alpha + \gamma}{2}$ ja $\frac{\alpha + \beta}{2}$ olla võrdne nurgaga α .

Kui aga $\alpha \geq \beta > \gamma$, ei saa ükski nurkadest $\frac{\beta + \gamma}{2}$, $\frac{\alpha + \gamma}{2}$ ja $\frac{\alpha + \beta}{2}$ olla võrdne nurgaga γ .

Mõlemal juhul saime vastuolu, mistõttu ABC peab olema võrdkülgne kolmnurk.

33.12 Teeme joonise.



Kuna võrdsetele kõõludele vastavad võrdse suurusega kaared, on A kaare B_1C_1 keskpunkt. Teoreemi 33.5 põhjal on sirge AA_1 järelikult nurga $C_1A_1B_1$ poolitaja. Analoogiliselt saame, et sirged BB_1 ja CC_1 on vastavalt nurkade $A_1B_1C_1$ ja $B_1C_1A_1$ poolitajad. Teisisõnu on AA_1 , BB_1 ja CC_1 kolmnurga $A_1B_1C_1$ nurgapoolitajad, mis lõikuvad ühes punktis.