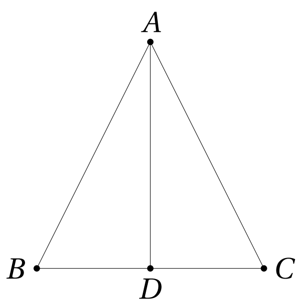
33. Kõrgus, mediaan ja nurgapoolitaja võrdhaarses kolmnurgas

33.1 Võrdhaarse kolmnurga teoreem

Teoreem 33.1 Võrdhaarses kolmnurgas langevad tipunurgast tõmmatud kõrgus, mediaan ja nurgapoolitaja kokku.

Tõestus. Vaatleme kolmnurka ABC, kus $|AB| = |AC|$, ja tõmbame tema tipust vastasküljele lõigu AD. Vaatame läbi kolm juhtu.



1. *AD on kõrgus*, st kolmnurgad ABD ja ACD on täisnurksed täisnurgaga tipu D juures. Pythagorase teoreemist saame siis

$$|BD| = \sqrt{|AB|^2 - |AD|^2} = \sqrt{|AC|^2 - |AD|^2} = |CD|,$$

järelikult on AD mediaan. Kuna kolmnurkade ABD ja ACD küljed on vastavalt võrdsed, on need kolmnurgad kongruentsed, mistõttu $\angle BAD = \angle CAD$, st AD on ka nurga BAC poolitaja.

2. *AD on mediaan*, st $|BD| = |CD|$. Kuna kolmnurk ABC on võrdhaarne, teame, et $\angle ABD = \angle ACD$. Kolmnurkades ABD ja ACD on tippude B ja C juures võrdsed nurgad ning nende tippude lähisküljed on vastavalt võrdsed. Järelikult on need kolmnurgad kongruentsed, mistõttu $\angle BAD = \angle CAD$, st AD on nurga BAC poolitaja.

   Teisest küljest $\angle BDA = \angle CDA$ ja samal ajal ka $\angle BDA + \angle CDA = 180^\circ$. Järelikult $\angle BDA = \angle CDA = 90^\circ$, st AD on kolmnurga ABC kõrgus.

3. *AD on nurgapoolitaja*, st $\angle BAD = \angle CAD$. Niisiis on kolmnurkades ABD ja ACD tipu A juures võrdsed nurgad ning nende tippude lähisküljed on vastavalt võrdsed. Järelikult on need kolmnurgad kongruentsed, mistõttu $|BD| = |CD|$, st AD on mediaan.

   Sarnaselt eelmisele juhule näeme, et $\angle BDA = \angle CDA$ ja $\angle BDA + \angle CDA = 180^\circ$. Järelikult $\angle BDA = \angle CDA = 90^\circ$, st AD on kolmnurga ABC kõrgus.

□

Teoreemi 33.1 põhjal läbib võrdhaarse kolmnurga tipunurgast tõmmatud nurgapoolitaja vastaskülje keskpunkti ja on selle küljega risti. Seega kehtib ka järgmine väide.

Järeldus 33.1 Võrdhaarse kolmnurga tipunurgast tõmmatud nurgapoolitaja on vastaskülje keskristsirge.

Ülesanded

Ülesanne 33.1 (Piirkonnavoor 2019, 9. klass) Rööpküliku $ABCD$ tipu A juures oleva nurga poolitaja läbib külje BC keskpunkti M. Tõesta, et AMD on täisnurk.

Ülesanne 33.2 (Piirkonnavoor 2017, 9. klass) Kas leidub kolmnurk ABC, mille kõrguste lõikepunkti peegeldus sirgest AB langeb kokku tipuga C?

Ülesanne 33.3 (Lõppvoor 2018, 9. klass) Kolmnurga ABC küljel BC valitakse punktid P ja Q nii, et P asub B ja Q vahel ning kiired AP ja AQ jaotavad nurga BAC kolmeks võrdseks osaks. Sirgega AQ paralleelne punkti P läbiv sirge lõikab kolmnurga külge AB punktis D, sirgega AP paralleelne punkti Q läbiv sirge lõikab kolmnurga külge AC punktis E. Kas võib juhtuda, et DE on kolmnurga ABC kesklõik?

Ülesanne 33.4 (Piirkonnavoor 2015, 10. klass) Võrdhaarse kolmnurga ABC tipunurga A poolitaja ja haaraga AC paralleelne tippu B läbiv sirge lõikuvad punktis D. Olgu E lõigu AB keskpunkt. Millises suhtes jaotab lõik DE lõigu BC?

Ülesanne 33.5 (Piirkonnavoor 2001, 11. klass) Olgu D kolmnurga ABC külje AB keskpunkt ja E selline punkt küljel BC, et $|BE| = 2 \cdot |EC|$, kusjuures $\angle ADC = \angle BAE$. Tõesta, et kolmnurk ABC on täisnurkne.

Ülesanne 33.6 (Piirkonnavoor 2020, 11. klass) Ringjoonele ω punktides A ja B tõmmatud puutujad lõikuvad punktis P. Kolmnurga ABP ümberringjoonel võetakse mingi punkt X nii, et kiir PX lõikab ringjoont ω kahes punktis C ja D. Tõesta, et punkt X poolitab lõigu CD.

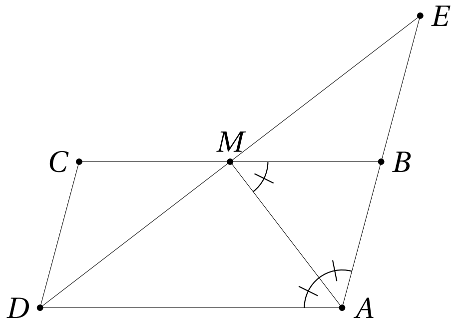
Ülesanne 33.7 (Lõppvoor 2022, 11. klass) Mittevõrdkülgse kolmnurga ABC kõrguste lõikepunkt on H ja ümberringjoone keskpunkt O. Olgu D kolmnurga ABC tipust A tõmmatud kõrguse aluspunkt. Tõesta, et $\angle AHO = 90^\circ$ parajasti siis, kui $\dfrac{|AH|}{|HD|} = 2$.

Ülesanne 33.8 (Lõppvoor 2000, 12. klass) Olgu ABC teravnurkne kolmnurk, milles $\angle ACB = 60^\circ$, ning lõikugu selle kõrgused AD ja BE punktis H. Tõesta, et kolmnurga ABC ümberringjoone keskpunkt paikneb sirgel, mis poolitab nurgad AHE ja BHD.

Vaata ka ülesandeid 28.8, 28.10, 28.11, 28.12, 28.13, 28.14 ja 35.13.

Lahendused

33.1 Otsime võrdhaarset kolmnurka, mille alus asuks sirgel DM ja mille jaoks lõik AM oleks kõrgus. Niisugust kolmnurka ülesandes otse antud ei ole, aga me võime ta ise juurde konstrueerida. Pikendame lõike DM ja AB lõikumiseni punktis E.



Ülesande tingimuste põhjal on AM kolmnurga DAE nurgapoolitaja. Selleks, et AM oleks ka kõrgus, piisab näidata, et $|AD| = |AE|$.

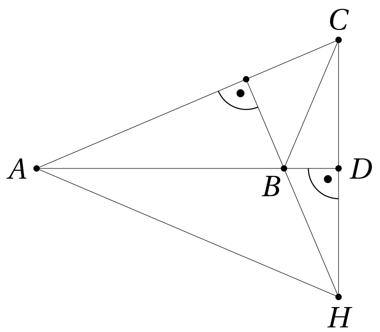
Põiknurkade võrdsusest saame $\angle DAM = \angle BMA$. Kuna $\angle DAM = \angle MAB$, on kolmnurk ABM võrdhaarne. Järelikult $|AB| = |BM| = \frac{|BC|}{2} = \frac{|AD|}{2}$. Kuna $BM \parallel AD$, saame muuhulgas, et BM on kolmnurga DAE kesklõik. Niisiis teisest küljest $|AB| = \frac{|AE|}{2}$, millest kokkuvõttes järeldubki, et $|AD| = |AE|$.

Selle ülesande teise võimaliku lahenduse annab ülesanne 28.4.

33.2 Vastus: jah.

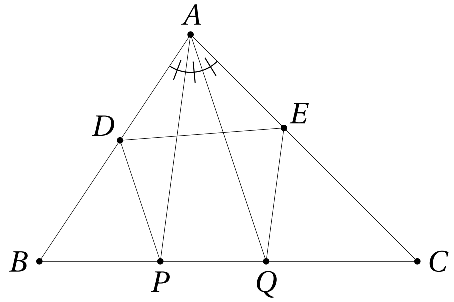
Ülesande tingimustest järeldub, et nõutud kolmnurga puhul peavad tipp C ja kõrguste lõikepunkt H asuma teine teisel pool sirgest AB, st H peab asuma väljaspool kolmnurka ABC. Niisiis tasub otsida ainult nürinurkseid kolmnurki.

Kui punktid C ja H on sümeetrilised sirge AB suhtes, siis teame, et $|AC| = |AH|$ ja $CH \perp AB$. Viimane seos tähendab juba, et H asub kolmnurga ABC tipust C tõmmatud kõrgusel. Selleks, et H oleks kolmnurga ABC kõrguste lõikepunkt, peab lisaks kehtima näiteks $BH \perp AC$. Paneme tähele, et seostest $CH \perp AB$ ja $BH \perp AC$ järeldub muuhulgas, et B on kolmnurga AHC kõrguste lõikepunkt. See tähelepanek aitab meil leida üldise konstruktsiooni.



Valime suvalise teravnurkse võrdhaarse kolmnurga AHC nii, et $|AC| = |AH|$. Olgu B tema kõrguste lõikepunkt ning D tipust A tõmmatud kõrguse aluspunkt. Kuna AD on kõrgus võrdhaarses kolmnurgas, on ta ühtlasi ka mediaan, st $|CD| = |DH|$. Järelikult on punktid C ja H sirge AB suhtes sümmeetrilised. Kuna $CH \perp AB$ ja $BH \perp AC$, on H muuhulgas kolmnurga ABC kõrguste lõikepunkt.

33.3 Vastus: ei.

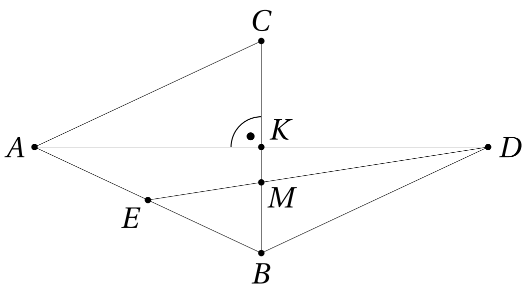


Kui DE oleks kolmnuga ABC kesklõik, peaksid D ja E olema vastavalt külgede AB ja AC keskpunktid. Kuna $AQ \parallel DP$, peab P kiirteteoreemi põhjal olema lõigu BQ keskpunkt. Järelikult on AP kolmnurgas ABQ nii nurgapoolitaja kui ka mediaan, millest teoreemi 33.1 abil järeldub, et ta on muuhulgas selle kolmnurga kõrguseks. Seega $AP \perp BC$.

Kuna teisest küljest $AP \parallel EQ$, saame sama moodi tõestada, et $AQ \perp BC$. Siit aga järelduks, et sirged AP ja AQ peaksid olema paralleelsed, mis pole võimalik, sest nad lõikuvad punktis A. Saime vastuolu eeldusega, et DE on kolmnuga ABC kesklõik.

33.4 Vastus: suhtes $1:2$.

Olgu K tipust A tõmmatud nurgapoolitaja lõikepunkt küljega BC. Kuna kolmnurk ABC on võrdhaarne tipunurgaga A, on AK ühtlasi kõrgus (st $AK \perp BC$) ja mediaan (st $|BK| = |CK|$). Olgu M lõikude DE ja BC lõikepunkt.



Ülesande tingimuste põhjal on DE kolmnurga ABD mediaan. Teisest küljest, kuna $BK \perp AD$, on BK selle kolmnurga tipust B tõmmatud kõrgus. Et osata hinnata, millises suhtes jagab punkt M lõigu BC, oleks hea, kui BK oleks samuti kolmnurga ABD mediaan. Selleks piisab, kui näitame, et $|AB| = |BD|$. Kuidas seda teha?

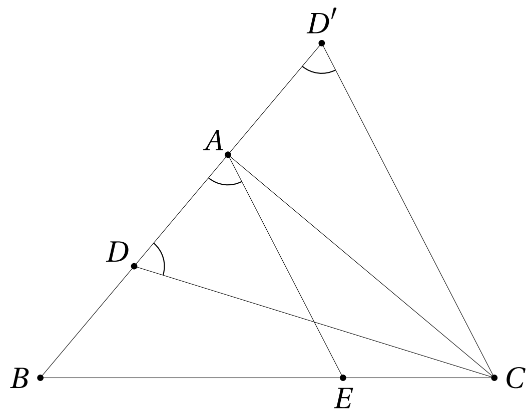
Üks standardne trikk on konstrueerida punkt $D^{(\prime)}$ veidi teistmoodi, et vajalik võrdus oleks ilmne, ja siis näidata, et saadav punkt langeb ülesandes defineerituga kokku.

Pöörame kolmnurka AKC 180° võrra ümber punkti K. Siis läheb punkt C punktiks B, sirge AK jääb iseendaks ning sirge AC läheb temaga paralleelseks punkti B läbivaks sirgeks. Järelikult läheb punkt A vaadeldava pöördega vastavate sirgete lõikepunktiks D. Seega $|AB| = |AC| = |BD|$ ja kolmnurk ABD on võrdhaarne tipunurgaga B, mistõttu tema kõrgus BK on ühtalsi ka mediaan. Järelikult on M kolmnurga ABD mediaanide lõikepunkt, mis jagab mediaani BK suhtes $2:1$, st $|BM| = 2\cdot|MK|$.

Samas $|CK| = |BK| = 3|MK|$, kust saame

$$\frac{|BM|}{|MC|} = \frac{2\cdot|MK|}{|MK|+|CK|} = \frac{2\cdot|MK|}{|MK|+3\cdot|MK|} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

33.5 Lahenduse üks võimalik idee on leida võrdhaarne kolmnurk alusega sirgel AB nii, et CA oleks selle mediaan (ja järelikult ka kõrgus). Olgu D' punkti D peegeldus punktist A. Näitame, et otsitavaks sobib kolmnurk DCD'. Vastavalt punkti D' valikule on CA selle kolmnurga mediaan; jääb veel näidata, et kolmnurk DCD' on võrdhaarne.



Vastavalt ülesande tingimustele ja punkti D' konstruktsioonile teame, et

$$\frac{|BC|}{|BE|} = \frac{3}{2} = \frac{|BD'|}{|BA|}.$$

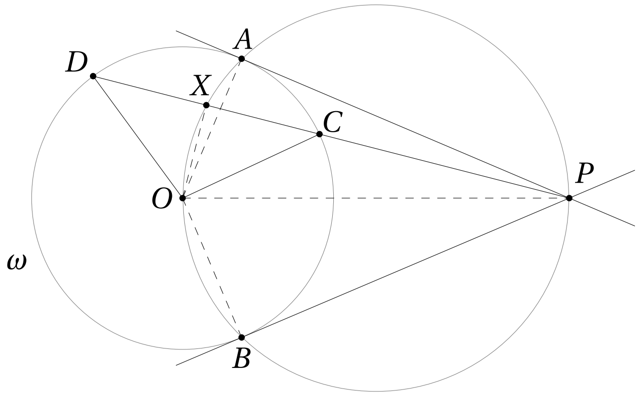
Kiirteteoreemi pöördteoreemi (vt teoreem 27.3) põhjal saame siis, et sirged AE ja $D'C$ on paralleelsed. Järelikult

$$\angle BD'C = \angle BAE = \angle ADC.$$

Niisiis on kolmnurk DCD' tõepoolest võrdhaarne ja CA on tema mediaanina ühtlasi ka kõrgus. Järelikult $\angle BAC = 90^\circ$, mida oligi tarvis tõestada.

Teise võimaliku lahenduse annab ülesanne 26.7.

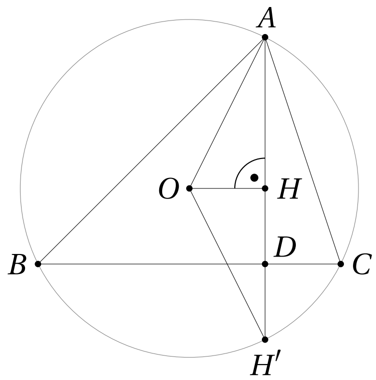
33.6 Olgu O ringjoone ω keskpunkt. Siis $\angle OAP = \angle OBP = 90^\circ$. Järelikult asuvad punktid A ja B ringjoonel diameetriga OP. Ülesande tingimuste põhjal asub samal ringjoonel ka punkt X (vt joonist).



Erijuhul kui kiir PX läbib punkti O, langevad punktid X ja O kokku ning CD on ringjoone ω diameeter, mistõttu ülesande väide kehtib.

Muul juhul paneme tähele, et $|OC| = |OD|$, st OCD on võrdhaarne kolmnurk. Me peame tõestama, et X on selle kolmnurga aluse keskpunkt. Selleks piisab, kui näitame, et OX on kolmnurga OCD kõrgus. Kuna X paikneb ringjoonel diameetriga OP, saame $OX \perp XP$, mistõttu ka $OX \perp CD$, nagu oligi vaja.

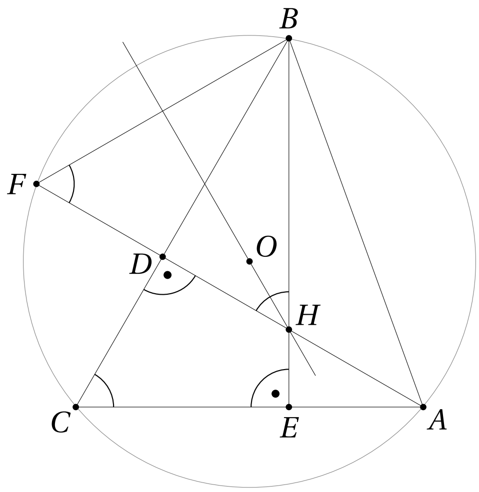
33.7 Olgu H' kõrguste lõikepunkti H peegeldus küljest BC. Teoreemi 29.3 põhjal teame, et H' asub kolmnurga ABC ümberringjoonel.



$\angle AHO = 90^\circ$ parajasti siis, kui OH on kolmnurga AOH' kõrgus. Kuna kolmnurk AOH' on võrdhaarne tipunurgaga O, on OH selle kõrguseks parajasti siis, kui ta on ka mediaan, st kui $|AH| = |HH'|$.

Kuna H ja H' on teineteise peegeldused sirge BC suhtes, kehtib võrdus $|HD| = |DH'|$ ehk $|HH'| = 2|HD|$. Kokkuvõttes $\angle AHO = 90^\circ$ parajasti siis, kui $|AH| = 2|HD|$, mida oligi tarvis tõestada.

33.8 Olgu kolmnurga ABC ümberringjoone keskpunkt O ning kõrguse AD sirge teine lõikepunkt selle ümberringjoonega F.



Kuna ACB ja AFB on samale kõõlule toetuvad piirdenurgad, saame $\angle AFB = \angle ACB = 60^\circ$. Teisest küljest nelinurgast $CEHD$

$$\angle EHD = 360^\circ - \angle HDC - \angle DCE - \angle CEH = 360^\circ - 90^\circ - 60^\circ - 90^\circ = 120^\circ .$$

Järelikult

$$\angle BHF = 180^\circ - \angle EHD = 60^\circ .$$

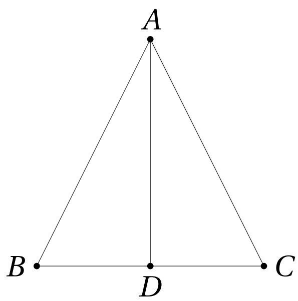
Niisiis on kolmnurk BHF võrdkülgne ja tema tipu H juures asuva nurga poolitaja on vastaskülje BF keskristsirge. Kuna BF on vaadeldava ringjoone kõõl, läbib tema keskristsirge ringjoone keskpunkti O.

Teine võimalus seda ülesannet lahendada on kasutada teoreemi 29.3 tulemust ning panna tähele, et punktid H ja F on sümmeetrilised sirge BC suhtes. Siit järeldub kohe, et $\angle BHF = \angle HFB$ ja kuna $\angle HFB = \angle ACB = 60^\circ$, on kolmnurk BHF võrdkülgne. Edasi jätkame nagu ülaltoodud lahenduses.

33.2 Võrdhaarse kolmnurga teoreemi pöördteoreem

Teoreem 33.2 Kui kolmnurga ühest tipust tõmmatud kõrgusest, nurgapoolitajast ja mediaanist kaks langevad kokku, on kolmnurk võrdhaarne tipunurgaga selles tipus.

Tõestus. Vaatleme kolmnurka ABC ja tõmbame tema tipust vastasküljele lõigu AD. Vaatame läbi kolm juhtu.



1. *AD on nurgapoolitaja ja mediaan.* Nurgapoolitaja omadusest (vt teoreem 34.1) teame, et $\dfrac{|AB|}{|AC|} = \dfrac{|BD|}{|CD|}$. Kuna D on külje BC keskpunkt, saame $\dfrac{|BD|}{|CD|} = 1$, järelikult ka $\dfrac{|AB|}{|AC|} = 1$ ehk $|AB| = |AC|$.

2. *AD on nurgapoolitaja ja kõrgus.* Siis $\angle BAD = \angle DAC$, aga ka $\angle ADB = 90^\circ = \angle CDA$. Külg AD on kolmnurkadel ADB ja ADC ühine, järelikult on nad kongruentsed tunnuse NKN alusel. Muuhulgas saame $|AB| = |AC|$.
3. *AD on kõrgus ja mediaan.* Sel juhul $|BD| = |DC|$ ja $\angle ADB = 90^\circ = \angle CDA$. Külg AD on kolmnurkadel ADB ja ADC ühine, järelikult on nad kongruentsed tunnuse KNK alusel. Kokkuvõttes saame jälle $|AB| = |AC|$.

□

Teoreemi 33.2 kasutatakse ülesannetes sageli kolmnurga võrdhaarsuse tõestamiseks.

Ülesanded

Ülesanne 33.9 (Piirkonnavoor 1999, 10. klass) Täisnurkse kolmnurga ABC hüpotenuusi AB keskpunktiga sirge BC suhtes sümmeetriline punkt D asub nurga CAB poolitajal. Leia kolmnurga ABC teravnurkade suurused.

Ülesanne 33.10 (Piirkonnavoor 2021, 10. klass) Olgu E ja F vastavalt kolmnurga ABC külgede AC ja AB keskpunktid. Lõikude BE ja CF pikkused on võrdsed. Kas võib kindlalt väita, et kolmnurk ABC on võrdhaarne?

Ülesanne 33.11 (Sügisene lahtine võistlus 2008, noorem rühm) Teravnurkse kolmnurga ABC tippudest A ja B tõmmatud kõrguste aluspunktid on vastavalt K ja L. Tõesta, et kui $|BK| = |KL|$, siis kolmnurk ABC on võrdhaarne.

Ülesanne 33.12 (Lõppvoor 2003, 9. klass) Ristkülikus $ABCD$, kus $|AB| < 2|AD|$, on E külje AB keskpunkt ning F selline punkt lõigul CE, et $\angle CFD = 90^\circ$. Tõesta, et kolmnurk FAD on võrdhaarne.

Ülesanne 33.13 (Lõppvoor 2000, 10. klass) Rööpküliku $ABCD$ külje AD keskpunkt on E ja punktist B sirgele CE tõmmatud ristlõigu aluspunkt on F. Tõesta, et kolmnurk ABF on võrdhaarne.

Ülesanne 33.14 (Lõppvoor 2012, 10. klass) Tasandil on antud kolmnurk ABC. Olgu P tipust A tõmmatud nurgapoolitaja lõikepunkt küljega BC ning M kolmnurga ABC tipust B tõmmatud mediaani aluspunkt. Sirged AB ja MP lõikuvad punktis K. Tõesta, et kui $\frac{|PC|}{|BP|} = 2$, siis AP ja CK on risti.

Ülesanne 33.15 (Sügisene lahtine võistlus 2005, noorem rühm) Rööpkülikus $ABCD$ on M külje AB keskpunkt ja N nurga ABC poolitaja lõikepunkt küljega CD. Tõesta, et lõigud CM ja BN on risti parajasti siis, kui sirge AN on nurga DAB poolitaja.

Ülesanne 33.16 (Piirkonnavoor 2013, 11. klass) Tasandil on antud kolmnurk ABC. Punktid B_1, B_2, C_1, C_2 valitakse nii, et $\overrightarrow{AB_1} = \overrightarrow{B_1B_2} = \overrightarrow{B_2B}$ ning $\overrightarrow{AC_1} = \overrightarrow{C_1C_2} = \overrightarrow{C_2C}$. Olgu D lõikude B_1C_2 ja B_2C_1 lõikepunkt. On teada, et sirged AD ja BC on risti. Tõesta, et kolmnurk ABC on võrdhaarne.

Ülesanne 33.17 (Piirkonnavoor 2017, 12. klass) Kolmnurga ABC siseringjoon puutub külgi BC ja AC vastavalt punktides A' ja B'. Punktist A' küljele AC tõmmatud ristlõigu ja kolmnurga ABC siseringjoone lõikepunkt on P. Tõesta, et punkt P poolitab kolmnurga ABC siseringjoone kaare $A'B'$ parajasti siis, kui $\angle ACB = 60^\circ$.

Ülesanne 33.18 (Piirkonnavoor 2014, 12. klass) Kolmnurga erinevatest tippudest tõmmatud nurgapoolitaja, kõrgus ja mediaan lõikuvad ühes punktis. Projektsioon sellest punktist mingile küljele poolitab selle. Tõesta, et projektsioon sellest punktist mistahes küljele poolitab selle.

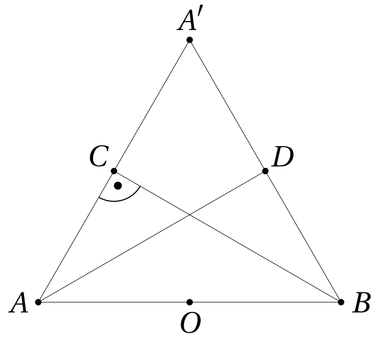
Ülesanne 33.19 (Kevadine lahtine võistlus 2006, vanem rühm) Ringjoonel valitakse neli punkti A, B, C ja D nii, et kaared AB, BC ja CD on võrdse pikkusega ning kaar DA nendest pikem. Sirge AD ja ringjoonele punktis B tõmmatud puutuja lõikuvad punktis E. Olgu F ringjoone punkt, mis asub diametraalselt punkti C vastas. Tõesta, et kolmnurk DEF on võrdhaarne.

Vaata ka ülesandeid 34.10, 28.5 ja 29.19.

Lahendused

33.9 Vastus: 30° ja 60°.

Peegeldame terve hüpotenuusi AB sirge BC suhtes; olgu peegelduseks saadud lõik $A'B$ (vt joonist).

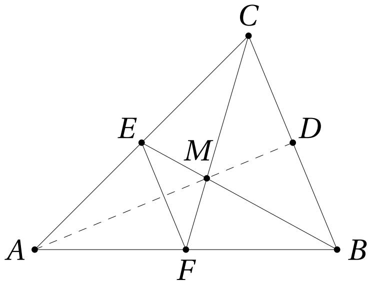


Kuna $\angle BCA = 90^\circ$, asuvad punktid A, C ja A' ühel sirgel. Ülesande tingimuste põhjal on AD siis kolmnurga ABA' nurgapoolitaja. Kuna D on samas lõigu $A'B$ keskpunkt, on AD ka kolmnurga ABA' mediaan. Järelikult $|AB| = |AA'|$. Kuna lõik $A'B$ on lõigu AB peegeldus, siis saame lisaks $|AB| = |A'B|$. Järelikult on kolmnurk ABA' võrdkülgne ning seetõttu $\angle CAB = 60^\circ$ ja $\angle ABC = 30^\circ$.

Teise võimaliku lahenduse annab ülesanne 34.9.

33.10 Vastus: jah.

Lõigud BE ja CF on kolmnurga ABC mediaanid; olgu nende lõikepunkt M. Tähistame külje BC keskpunkti D.

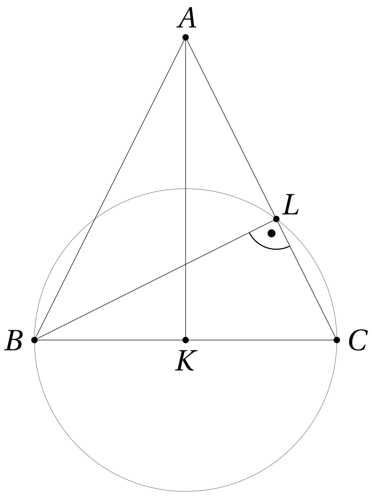


Kuna $|BE| = |CF|$, siis ka $|ME| = \frac{1}{3}|BE| = \frac{1}{3}|CF| = |MF|$ ning analoogiliselt $|MB| = |MC|$. Järelikult on kolmnurgad EFM ja CBM võrdhaarsed ning tänu ühisele tippnurgale ka sarnased. Muuhulgas on neil ühine sümmeetriatelg, mis on lõikude EF ja BC ühine keskristsirge. Sellel sirgel asuvad punktid M ja D. Kuna aga sirge MD on kolmnurga AMC kolmas mediaan, asub sellel sirgel ka tipp A. Et $\angle MDB = 90°$, on AD peale mediaaniks olemise veel ka kolmnurga ABC kõrgus, mistõttu kolmnurk ABC on võrdhaarne.

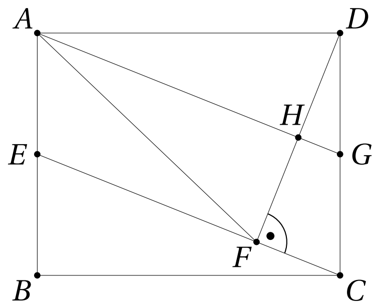
33.11 Tingimus $|BK| = |KL|$ tähendab, et ringjoon keskpunktiga K läbi punkti B läbib ka punkti L. Leiame sellele ringjoonele punktist B tõmmatud diameetri teise otspunkti.

Ühest küljest peab see otspunkt loomulikult asuma sirgel BK. Teisest küljest on lõik BL antud kolmnurga kõrguseks, mistõttu punkti L juurde tekib täisnurk. Thalese teoreemi pöördteoreemi (vt teoreem 28.3) põhjal on täisnurkse piirdenurga poolt määratud kõõl vaadeldava ringjoone diameetriks.

Niisiis peab diameetri teine otspunkt asuma sirgel AL, mis kokkuvõttes tähendab, et diameetri teiseks otspunktiks on sirgete BK ja AL lõikepunkt C. Muuhulgas osutub K lõigu BC keskpunktiks, mis tähendab, et lõik AK on ühtaegu nii kolmnurga ABC kõrgus kui ka mediaan. Teoreemi 33.2 põhjal järeldub nüüd, et kolmnurk ABC peab olema võrdhaarne.



33.12 Ülesandes pole öeldud, millised kolmnurga FAD küljed täpselt võrdsed peavad olema. Selle väljanuputamisel aitab meid korralik joonis.



Jooniselt näeme, et tasub proovida tõestada võrdust $|AD| = |AF|$. Selleks piisab, kui leiame lõigu, mis sobib kolmnurgale FAD nii tipust A tõmmatud kõrguseks kui ka mediaaniks.

Olgu G lõigu CD keskpunkt ning H lõikude AG ja DF lõikepunkt. Näitame, et AH on kolmnurga FAD kõrgus ja mediaan.

Tänu punktide E ja G valikule kehtib $AG \parallel EC$. Kuna $DF \perp EC$, siis ka $AH \perp DF$. Järelikult on AH kolmnurga FAD kõrguseks.

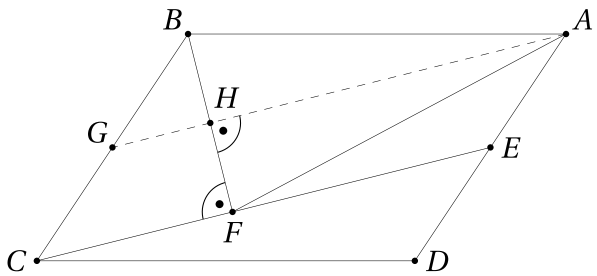
Teisest küljest järeldub sirgete AG ja EC paralleelsusest kiirteteoreemi abil, et

$$\frac{|DH|}{|DF|} = \frac{|DG|}{|DC|} = \frac{1}{2}.$$

Niisiis on H lõigu DF keskpunkt ja AH seega ka kolmnurga FAD mediaan. Teoreemi 33.2 põhjal on see kolmnurk järelikult võrdhaarne.

Tegelikult pole selles ülesandes vaja, et $ABCD$ oleks ristkülik. Sarnane väide kehtib ka rööpküliku jaoks, nagu näitab ülesande 33.13 lahendus.

33.13 Alustame jälle joonisest.



Kui joonis vähegi korralik saab, on näha, et tõestada tasub võrdust $|AB| = |AF|$. Selleks piisab, kui suudame näidata, et tipust A tõmmatud kõrgusest, mediaanist ja nurgapoolitajast kaks langevad omavahel kokku. Aga millised kaks valida?

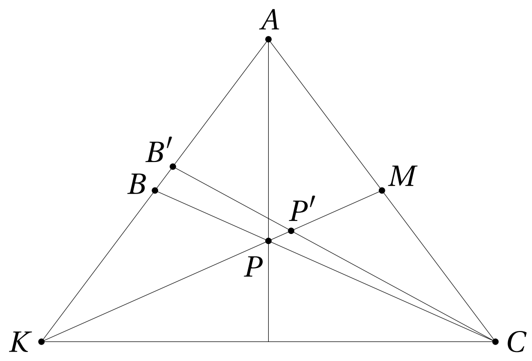
Paneme tähele, et $BF \perp CE$, niisiis saame tipust A küljele BF tõmmatud kõrguse kohta kohe väita, et see on paralleelne lõiguga CE. Teisest küljest on selge, et tipust A lõiguga CE paralleelne sirge läbib lõigu BC keskpunkti (mõtle näiteks rööpküliku pöörde peale 180° võrra ümber tema keskpunkti). Tähistame külje BC keskpunkti G ja tipust A lõigule BF tõmmatud ristsirge aluspunkti H.

Kuna $GH \parallel CF$ ning G on lõigu BC keskpunkt, on GH kolmnurga BCF kesklõik, mistõttu H on lõigu BF keskpunkt. Järelikult on AH korraga nii kolmnurga ABF kõrgus kui mediaan, mistõttu teoreemi 33.2 põhjal $|AB| = |AF|$.

33.14 Lahenduse ideeks on näidata, et AKC on võrdhaarne kolmnurk tipunurgaga tipus A. Ülesande tingimuste põhjal on AP nurga CAK poolitaja; näitame, et ta on ka mediaan.

Teame, et M on lõigu AC keskpunkt, seega on KM kolmnurga AKC üks mediaanidest. P on punkt sellel mediaanil, mis jaotab lõigu BC suhtes $1:2$. Näitame, et P peab sel juhul olema kolmnurga AKC mediaanide lõikepunkt.

Olgu vastuväiteliselt mediaanide lõikepunktiks hoopis punkt $P' \neq P$: loomulikult peab ta asuma mediaanil KM. Olgu B' sirge CP' lõikepunkt küljega AK.

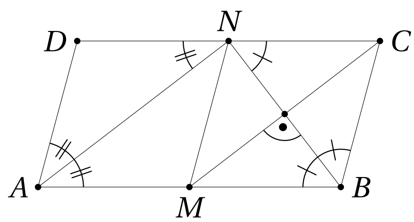


Teame, et $\dfrac{|PC|}{|BP|} = 2 = \dfrac{|P'C|}{|B'P'|}$. Kiirteteoreemi pöördteoreemi (vt teoreem 27.3) põhjal peaks siis kehtima $BB' \parallel PP'$, mis on aga võimatu, sest tegemist on punktis K lõikuvate erinevate sirgetega.

Saadud vastuolu näitab, et P peab olema kolmnurga AKC mediaanide lõikepunkt. AP on niisiis ühtaegu selle kolmnurga nurgapoolitaja kui ka mediaan, mistõttu teoreemi 33.2 põhjal $|AK| = |AC|$. Teoreemi 33.1 põhjal on AP siis ka selle kolmnurga kõrgus, mida oligi tarvis tõestada.

Selle ülesande teise lahenduse annab ülesanne 34.4.

33.15 Eeldame kõigepealt, et $CM \perp BN$. Siis on BN kolmnurgas BCM tipust B tõmmatud nurgapoolitaja ja kõrgus. Järelikult on see kolmnurk võrdhaarne, st $|BC| = |BM|$. Kuna M on lõigu AB keskpunkt, kehtib muuhulgas $|AB| = 2|BC|$.



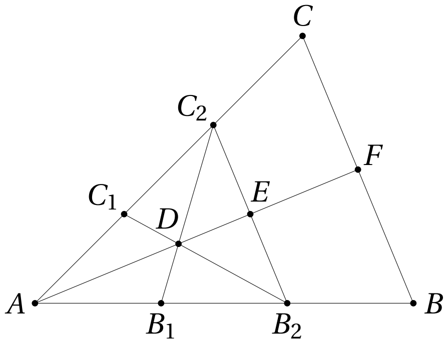
Kuivõrd BN on lõigu CM keskristsirge, on ka kolmnurk CNM võrdhaarne. Kuna $MB \parallel NC$, järeldub siit, et $MBCN$ on romb. Arvestades, et $|AB| = 2|BC|$, on ka $AMND$ romb, millest omakorda järeldub, et AN on nurga DAB poolitaja.

Teisest küljest, kui nurkade DAB ja ABC poolitajad lõikuvad küljel CD punktis N, saame põiknurkade võrdsusest $\angle NBC = \angle MBN = \angle CNB$ ja $\angle DAN = \angle NAM = \angle AND$. Niisiis on kolmnurgad BCN ja NDA võrdhaarsed. Kuna $|AD| = |BC|$, on N külje CD keskpunkt. Järelikult $|BC| = |CN| = |BM|$, mistõttu $MBCN$ peab olema romb. Siit aga järeldub omakorda $CM \perp BN$.

Võrdle seda ülesannet ka ülesandega 33.1.

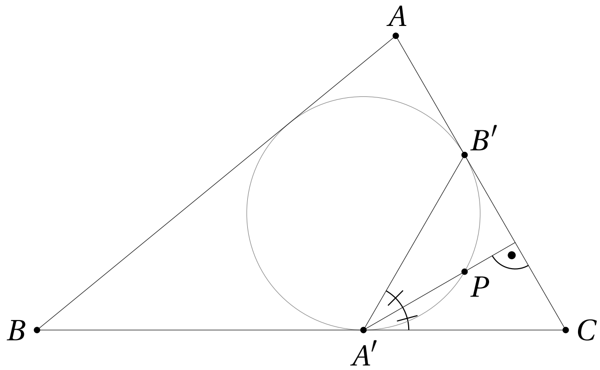
33.16 Olgu sirgete AD ja BC lõikepunkt F. Siis ülesande tingimuste põhjal on AF kolmnurga ABC kõrgus. Teoreemi 33.2 kasutamiseks tuleks lisaks tõestada, et AF on kas nurgapoolitaja või mediaan. Kuna ülesande teised tingimused on antud mitte nurkade, vaid mingite lõikude pikkuste jaoks, on loomulik proovida tõestada, et AF on kolmnurga ABC mediaan.

Tähistagu E lisaks sirgete AD ja B_2C_2 lõikepunkti.



Punktid B_1 ja C_1 on vastavalt lõikude AB_2 ja AC_2 keskpunktid, järelikult on D kolmnurga AB_2C_2 mediaanide lõikepunkt. Niisiis on ka AE selle kolmnurga mediaan ja E lõigu B_2C_2 keskpunkt. Kolmnurgad AB_2C_2 ja ABC on homoteetsed (vt jaotis 35) keskpunktiga A ja kordajaga $\frac{3}{2}$. See homoteetne teisendus viib punkti E punktiks F, mis järelikult on lõigu BC keskpunkt. Kokkuvõttes on AF kolmnurga ABC kõrgus ja mediaan, mistõttu see kolmnurk ise on võrdhaarne.

33.17 Teeme joonise.



Ülesande tingimus, et P on kaare $A'B'$ keskpunkt, tähendab, et kaared $A'P$ ja PB' on võrdsed. See aga on nii parajasti siis, kui nendele kaartele toetuvad piirdenurgad on võrdsed, st $\angle PA'C = \angle B'A'P$, ehk parajasti siis, kui $A'P$ on nurga $B'A'C$ poolitaja. ($PA'C$ on küll puutuja ja kõõlu vaheline nurk, aga teoreemist 31.1 teame, et tema suurus võrdub vastavale kõõlule/kaarele toetuva piirdenurga suurusega.)

Ülesande tingimuste põhjal on $A'P$ kolmnurga $B'A'C$ kõrgus. Niisiis on P kaare $A'B'$ keskpunkt parajasti siis, kui $|A'B'| = |A'C|$. Puutujalõikude võrdsus annab teisest küljest $|A'C| = |B'C|$. Niisiis on P kaare $A'B'$ keskpunkt parajasti siis, kui võrdhaarne kolmnurk $B'A'C$ on võrdkülgne ehk siis kui $\angle A'CB' = 60°$.

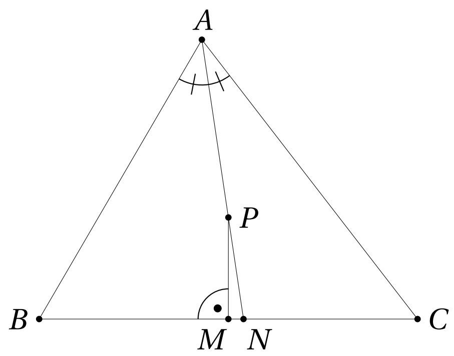
33.18 Tähistame ülesande kolmnurga tipud nii, et tipust A on tõmmatud nurgapoolitaja, tipust B kõrgus ja tipust C mediaan. Kuna ülesandes pole öeldud, millisele küljele nende sirgete lõikepunkti P projektsioon täpselt tõmmatud on, peame kõik kolm võimalikku juhtu läbi vaatama. Näitame, et kõigil juhtudel on kolmnurk ABC tegelikult võrdkülgne; ülesande väide on seejärel ilmne.

Olgu kõigepealt tegemist projektsiooniga küljele AB ja olgu külje AB keskpunkt K. Ülesande tingimustest teame, et mediaan CK läbib punkti P. Teisest küljest on K vaadeldaval juhul punkti P ristprojektsioon küljele AB, st $PK \perp AB$. Niisiis on CK ühtlasi ka kolmnurga ABC kõrguseks, millest omakorda järeldub $|BC| = |AC|$. Kuna punkt P asub nii tipust B kui ka tipust C tõmmatud kõrgusel, on ta kolmnurga ABC kõrguste lõikepunkt, millest omakorda järeldub, et nurgapoolitaja AP on ühtlasi ka kolmnurga ABC kõrgus. Kokkuvõttes, $|AB| = |AC|$, millega oleme vaadeldaval juhul näidanud kolmnurga ABC võrdkülgsuse.

Olgu nüüd punkti P ristprojektsiooniks küljele AC selle külje keskpunkt L. Siis on kolmnurga kõrgus BL ühtlasi ka tema mediaan, millest järeldub $|AB| = |BC|$. Sarnaselt eelmise juhuga saame nüüd, et P on tipust C tõmmatud mediaani ning mediaani BL lõikepunkt. Seega osutub meidaaniks ka nurgapoolitaja AP. Järelikult $|AB| = |AC|$ ning ka sellel juhul oleme tõestanud kolmnurga ABC võrdkülgsuse.

Kolmas juht, kus vaatleme punkti P ristprojektsiooni küljele BC, on veidi teistsugune. Kuna AP on nurgapoolitaja, ei saa me kohe järeldada, et punktid A ja P asuvad ühel sirgel külje BC keskpunktiga M.

Meie eesmärk on sellegipoolest tõestada, et $|AB| = |AC|$. Selleks eeldame vastuväiteliselt, et $|AB| \neq |AC|$; konkreetsuse huvides näiteks $|AB| < |AC|$ (juhtum $|AB| > |AC|$ on analoogiline). Teeme joonise.

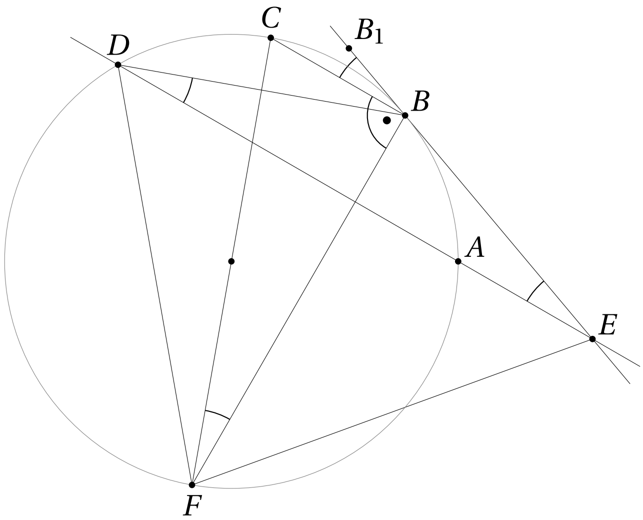


Olgu N nurgapoolitaja AP lõikepunkt küljega BC. Tänu tingimusele $|AB| < |AC|$ asub tipp A joonisel külje BC keskristsirgest PM vasakul. Punkt P kui nurgapoolitaja ja mediaani lõikepunkt asub kindlasti kolmnurga sees, seega asub punkt N sirgest PM paremal. Siit järeldub, et $|BN| > |NC|$. Nurgapoolitaja omadusest (vt jaotis 34.1) teame samas, et $\dfrac{|BN|}{|NC|} = \dfrac{|AB|}{|AC|} < 1$, vastuolu.

Teine võimalus vastuoluni jõuda on kasutada järeldust 34.1, mille põhjal mittevõrdhaarse kolmnurga nurgapoolitaja ja vastaskülje keskristsirge lõikuvad ümberringjoone kaare keskpunktis. See punkt aga asub väljaspool kolmnurka.

Niisiis on ainsaks võimaluseks $|AB| = |AC|$, mis tähendab, et AP on nii nurgapoolitaja, kõrgus kui ka mediaan. Nüüd saame eelpooltehtuga analoogiliselt, et P on tipust A ja B tõmmatud kõrguste lõikepunkt. Järelikult on CP ühtaegu nii mediaan kui ka kõrgus, mistõttu $|AC| = |BC|$. Niisiis on ABC ka sel juhul võrdkülgne kolmnurk.

33.19 Ülesandes pole otsesõnu öeldud, millised kolmnurga DEF küljed võrdsed peavad olema. Õige hüpoteesi leidmiseks tuleb teha korralik joonis.



Jooniselt saame hüpoteesi $|EF| = |DF|$. Selle hüpoteesi tõestamiseks piisab leida tipust F küljele DE tõmmatud lõik või sirge, mis rahuldaks teoreemi 33.2 tingimusi. Joonise põhjal on ilmne kandidaat sirge FB.

Kuna CF on ringjoone diameeter, saame Thalese teoreemist $\angle CBF = 90°$. Samas ülesande tingimuste põhjal $CB \parallel DA$, järelikult on risti ka sirged FB ja DE.

Tõestuse lõpetamiseks piisab näidata, et sirge FB poolitab lõigu DE. Selleks omakorda piisab näidata, et kolmnurk DBE on võrdhaarne. Olgu B_1 suvaline punkt lõigu BE pikendusel üle punkti B. Kuna $CB \parallel DE$, saame $\angle BED = \angle B_1BC$. Viimane on aga nurk ringjoonele punktis B tõmmatud puutuja ja kõõlu BC vahel, järelikult teoreemi 31.1 põhjal $\angle B_1BC = \angle BFC$. Ülesande tingimuste põhjal on kaared AB ja BC võrdsed, järelikult $\angle BFC = \angle ADB = \angle EDB$. Niisiis on kolmnurk DBE võrdhaarne tipunurgaga tipu B juures, mida oligi vaja.