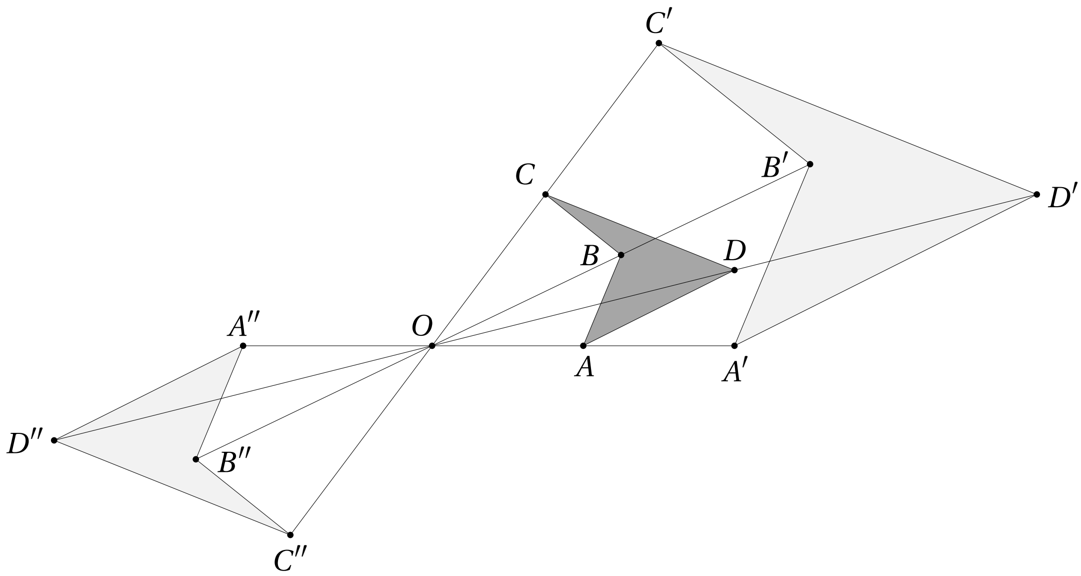
33. Homoteetia

Homoteetiast võib mõelda kui kujundite sarnasuse realiseerimisest konkreetse teisenduse abil.

Definitsioon 33.1 Olgu antud tasandi punkt O ja nullist erinev reaalarv k. *Homoteetseks teisenduseks* ehk *homoteetiaks* keskpunktiga O ja teguriga (kordajaga) k nimetatakse tasandi niisugust teisendust, mis kujutab tasandi mistahes punkti A punktiks A' nii, et kehtib seos

$$\overrightarrow{OA'} = k \cdot \overrightarrow{OA}\,.$$

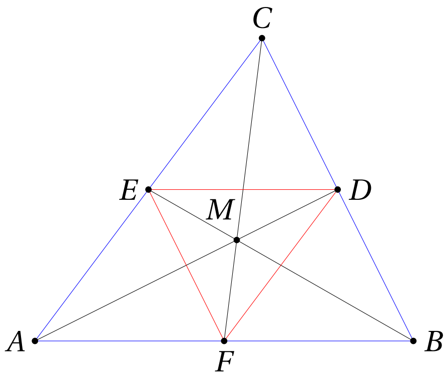
Ühe punkti kujutamine pole muidugi ülearu huvitav. Homoteetse teisenduse mõte selgub aga kohe, kui vaadelda tervete punktihulkade, näiteks tasandiliste kujundite teisendusi. Joonisel on näitena toodud hulknurga $ABCD$ homoteetsed kujutised keskpunkti O suhtes teguritega 2 ja $-1{,}25$.



Homoteetsete teisenduste kohta kehtivad järgmised reeglid.

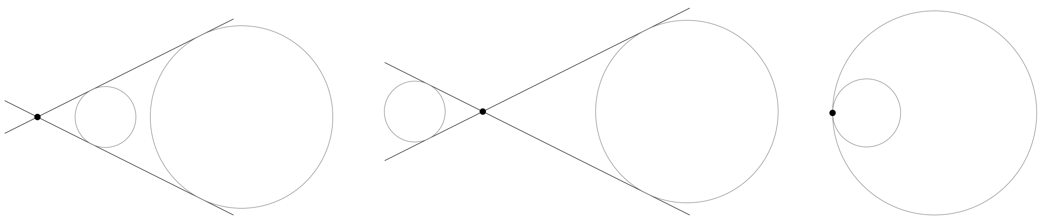
- Homoteetse teisenduse abil saadavad kujundid on algsega sarnased, kusjuures sarnasusteguriks on $|k|$. Teisendusel saadava ja algse kujundi pindalade suhteks on järelikult k^2.
- Homoteetne teisendus viib sirge algsega paralleelseks sirgeks.
- Homoteetia teguriga 1 on samasusteisendus, homoteetia teguriga -1 on aga peegeldus keskpunkti O suhtes (mis on sama kui pööre 180° võrra sellesama keskpunkti ümber).
- Teguriga k homoteetse teisenduse pöördteisenduseks on homoteetia sama keskpunkti suhtes, aga teguriga $\frac{1}{k}$.

▪ **Näide 33.1** Kolmnurga ABC kesklõikudest moodustatud kolmnurk on kolmnurgaga ABC homoteetne, kusjuures homoteetiakeskpunktiks on nende kolmnurkade ühine mediaanide lõikepunkt ja homoteetsusteguriks on $-\frac{1}{2}$ (või -2).



▪

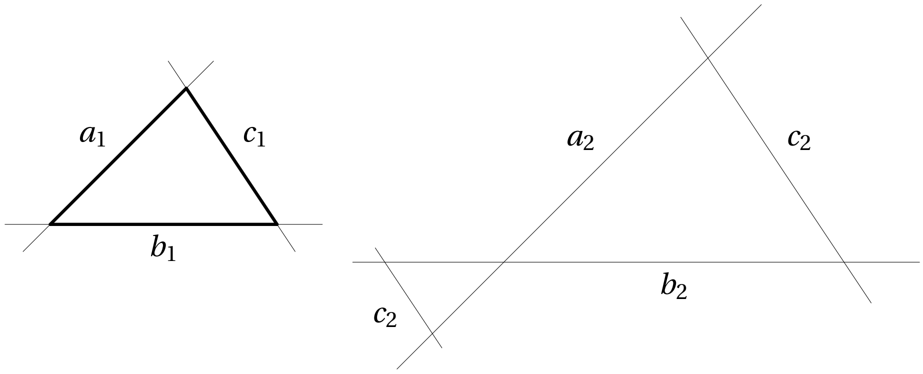
▪ **Näide 33.2** Kaks ringjoont (või ringi) raadiustega r_1 ja r_2 on alati homoteetsed, kusjuures homoteetsusteguriks on $\frac{r_1}{r_2}$ või $-\frac{r_1}{r_2}$ $\left(\text{või } \frac{r_2}{r_1} \text{ või } -\frac{r_2}{r_1}\right)$.



▪

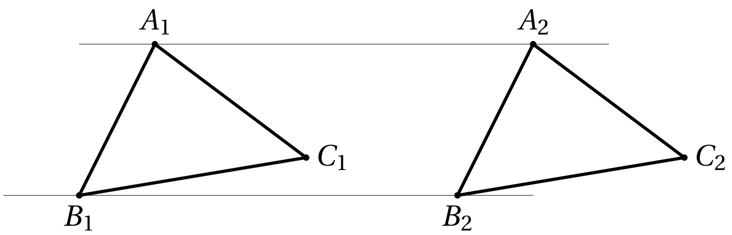
Teoreem 33.1 Vastavalt paralleelsete külgedega kolmnurgad on ühteiseks teisendatavad kas tasandi lükke või homoteetse teisenduse abil.

Tõestus. Näitame kõigepealt, et vastavalt paralleelsete külgedega kolmnurgad on sarnased. Olgu esimese kolmnurga külgedega määratud sirged vastavalt a_1, b_1 ja c_1. Fikseerime teise kolmnurga kahe küljega määratud vastavad sirged a_2 ja b_2 ($a_1 \parallel a_2$ ja $b_1 \parallel b_2$) ning uurime, kuidas saab asetseda sirge c_2, mis rahuldab tingimust $c_2 \parallel c_1$. Teeme joonise.



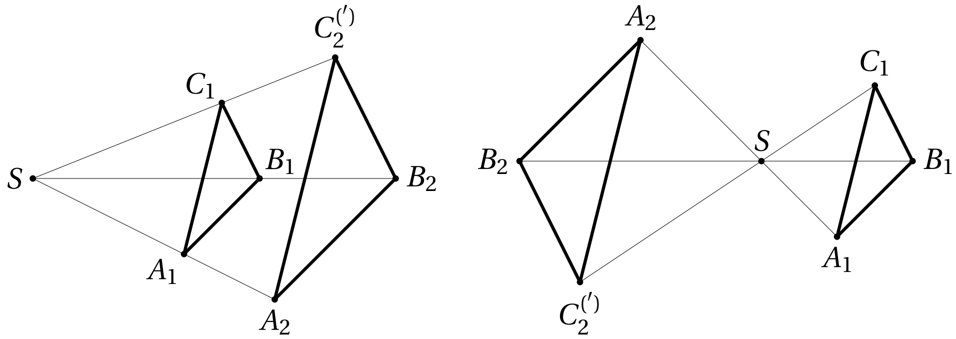
Näeme, et c_2 võib sirgeid a_2 ja b_2 lõigata ühel või teisel pool nende lõikepunkti, aga mõlemal juhul on tekkiv kolmnurk algsega sarnane. Seejuures võib tekkiva kolmnurga külgede orientatsioon olla algsega sama või vastupidine (st algse suhtes 180° võrra pööratud).

Olgu meil nüüd antud vastavalt paralleelsete külgedega (ning järelikult sarnased) kolmnurgad $A_1B_1C_1$ ja $A_2B_2C_2$. Vaatleme sirgeid A_1A_2 ja B_1B_2. Kui need sirged on paralleelsed, on nelinurk $A_1B_1B_2A_2$ rööpkülik, sest tema vastasküljed on paralleelsed. Järelikult $|A_1B_1| = |A_2B_2|$ ning lisaks on lõigud A_1B_1 ja A_2B_2 samasuunalised. Seega peavad ka $A_1B_1C_1$ ja $A_2B_2C_2$ olema orienteeritud sama pidi. Kuna need kolmnurgad on sarnased ja üks paar nende vastavaid külgi on võrdsed, peavad nad olema kongruentsed ja üksteiseks viidavad tasandi lükke abil (vt joonist).



Kui sirged A_1A_2 ja B_1B_2 lõikuvad, siis olgu S nende lõikepunkt. Näitame, et sel juhul on kolmnurgad $A_1B_1C_1$ ja $A_2B_2C_2$ homoteetsed keskpunktiga S.

Kuna $A_1B_1 \parallel A_2B_2$, on kolmnurgad SA_1B_1 ja SA_2B_2 sarnased teguriga $\dfrac{|A_2B_2|}{|A_1B_1|}$. Vaatleme homoteetset teisendust keskpunktiga S ja teguriga $\dfrac{|A_2B_2|}{|A_1B_1|}$, kui lõigud A_1B_1 ja A_2B_2 on samasuunalised, või teguriga $-\dfrac{|A_2B_2|}{|A_1B_1|}$, kui lõigud A_1B_1 ja A_2B_2 on erisuunalised. See teisendus viib punktid A_1 ja B_1 vastavalt punktideks A_2 ja B_2 (vt joonist, kus on kujutatud kaks võimalikku olukorda).



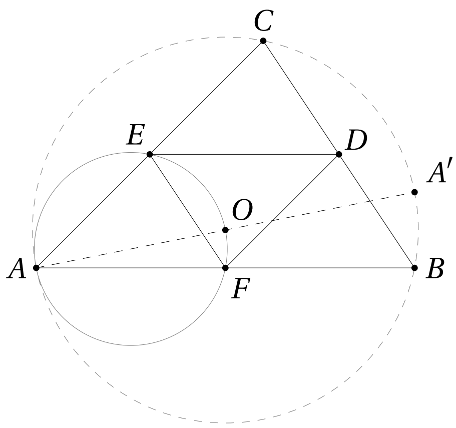
Olgu punkti C_1 kujutis selle teisenduse abil C_2'. Siis $\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle A_2B_2C_2'$, sest need kolmnurgad on konstruktsiooni järgi homomorfsed. Samas nägime ka, et $\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle A_2B_2C_2$, kusjuures mõlemal juhul on sarnasusteguriks $\frac{|A_2B_2|}{|A_1B_1|}$. Seega on kolmnurgad $A_2B_2C_2'$ ja $A_2B_2C_2$ kongruentsed ning lisaks sama pidi orienteeritud külgedega. Järelikult langevad punktid C_2 ja C_2' kokku, millest järeldub kolmnurkade $A_1B_1C_1$ ja $A_2B_2C_2$ homoteetsus. □

Teoreem 33.1 võimaldab tõestada kolme sirge lõikumist ühes punktis, kui need sirged on tõmmatud läbi vastavalt paralleelsete külgedega kolmnurkade tippude.

Homoteetse teisenduse abil saab tõestada ka kolme ringjoone lõikumist ühes punktis, kui punkt õigesti ära arvata.

Ülesanne 33.1 (Sügisene lahtine võistlus 2013, noorem rühm) Kolmnurga ABC külgede BC, CA ja AB keskpunktid on vastavalt D, E ja F. Tõesta, et kolmnurkade AEF, BFD ja CDE ümberringjoontel leidub ühine punkt.

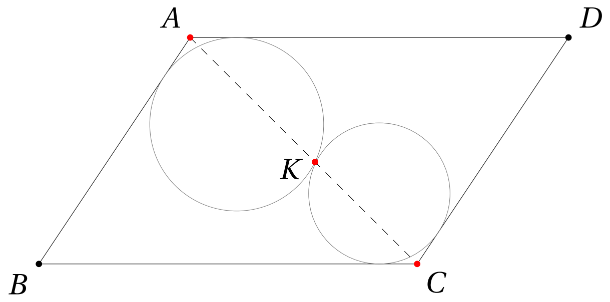
Lahendus. Homoteetia keskpunktiga A ja teguriga $\frac{1}{2}$ viib punktid B ja C vastavalt punktideks F ja E ning järelikult ka kolmnurga ABC ümberringjoone kolmnurga AEF ümberringjooneks. Sama teisendus viib diameetri AA' otspunkti A' kolmnurga ABC ümberringjoone keskpunktiks O. Järelikult asub punkt O kolmnurga AEF ümberringjoonel. Sama moodi tõestame, et punkt O asub ka kolmnurkade BFD ja CDE ümberringjoontel.



Samuti võimaldab homoteetia tõestada kolme punkti asumist ühel sirgel, kui üks neist punktidest on teisest saadav homoteetse teisenduse abil, mille keskpunkt on kolmandas antud punktis.

Ülesanne 33.2 (Talvine lahtine võistlus 2007, vanem rühm) Rööpkülikusse $ABCD$ on joonestatud kaks ringjoont nii, et esimene ringjoon puutub külgi AB ja AD ning teine ringjoon puutub külgi CB ja CD. Ringjooned puutuvad teineteist väliselt punktis K. Tõesta, et punkt K asub rööpküliku diagonaalil AC.

Lahendus. See on sama ülesanne kui 28.4, millele anname siinkohal teise lahenduse.



Olgu ringjoonte raadiused vastavalt r_1 ja r_2. Vaatleme homoteetset teisendust keskpunktiga K ja kordajaga $-\frac{r_1}{r_2}$. See teisendus viib teise ringjoone esimeseks ja teise ringjoone puutujad esimese ringjoone vastavateks paralleelseteks puutujateks. Teisisõnu, sirge BC läheb sirgeks AD ja sirge CD läheb sirgeks AB. Järelikult läheb teise ringjoone vaadeldavate puutujate lõikepunkt C esimese ringjoonte vastavate puutujate lõikepunktiks A. Kuna homoteetia keskpunkt oli K, asuvadki punktid A, K ja C ühel sirgel.

Ülesanded

Ülesanne 33.3 (Lõppvoor 2004, 9. klass) Kolm erinevat võrdse raadiusega ringjoont lõikuvad punktis Q. Ringjoon $\mathscr{C}$ puutub neid kõiki. Tõesta, et Q on ringjoone $\mathscr{C}$ keskpunkt.

Ülesanne 33.4 (Piirkonnavoor 2018, 10. klass) Kolmnurga ABC külgede BC, CA ja AB keskpunktid on vastavalt D, E ja F. Tasandil vabalt valitud punkti P peegeldused punktidest D, E ja F on vastavalt X, Y ja Z. Tõesta, et kolmnurgad ABC ja XYZ on võrdsed (st sarnased teguriga 1).

Ülesanne 33.5 (Lõppvoor 1998, 11. klass) Olgu A_1, B_1 ja C_1 vastavalt kolmnurga ABC külgede BC, CA ja AB keskpunktid ning A_2, B_2 ja C_2 vastavalt lõikude B_1C_1, C_1A_1 ja A_1B_1 keskpunktid. Kolmnurkade B_1AC_1, C_1BA_1 ja A_1CB_1 siseringjoonte keskpunktid olgu vastavalt A_3, B_3 ja C_3. Tõesta, et sirged A_2A_3, B_2B_3 ja C_2C_3 lõikuvad ühes punktis.

Ülesanne 33.6 (Lõppvoor 2010, 11. klass) Kolmnurga ABC külje BC keskpunkt on D. Tõesta, et kolmnurkade ABD ja ACD mediaanide lõikepunktid paiknevad sirgest AD võrdsel kaugusel.

Ülesanne 33.7 (Piirkonnavoor 1998, 12. klass) Koonusekujulises suletud klaasanumas kõrgusega 1m on teatud hulk vett. Hoides anumat vertikaalselt tipuga allapoole, tegi Juku anuma seinale vee taset näitava märgi. Pööranud anuma ümber, s.t. tipuga ülespoole, nägi Juku, et vesi ulatub ka nüüd täpselt märgini. Leia vee sügavus anumas (veetaseme kaugus anuma tipust) enne ümberpööramist.

Ülesanne 33.8 (Sügisene lahtine võistlus 2012, vanem rühm) Tasandil on antud ringjoon c. Ringjooned c_1, c_2 ja c_3 ringjoone c sees puutuvad ringjoont c vastavalt punktides A, B ja C, mis kõik on erinevad. Ringjoontel c_2 ja c_3 on ühine punkt K lõigul

BC, ringjoontel c_3 ja c_1 on ühine punkt L lõigul CA ning ringjoontel c_1 ja c_2 on ühine punkt M lõigul AB. Tõesta, et ringjooned c_1, c_2 ja c_3 lõikuvad ringjoone c keskpunktis.

Ülesanne 33.9 (Lõppvoor 2002, 12. klass) Kumera nelinurga $ABCD$ kõik tipud paiknevad ringjoonel ω. Kiired AD ja BC lõikuvad punktis K ning kiired AB ja DC lõikuvad punktis L. Tõesta, et kolmnurga AKL ümberringjoon puutub ringjoont ω siis ja ainult siis, kui kolmnurga CKL ümberringjoon puutub ringjoont ω.

Ülesanne 33.10 (Sügisene lahtine võistlus 2017, vanem rühm) Kolmnurga ABC külgede BC, CA ja AB keskpunktid on vastavalt D, E ja F. Kolmnurga ABC mediaanide lõikepunkti M peegeldused punktidest D, E ja F on vastavalt X, Y ja Z. Lõigud XZ ja YZ lõikavad külge AB vastavalt punktides K ja L. Tõesta, et $|AL| = |BK|$.

Ülesanne 33.11 (Sügisene lahtine võistlus 2020, vanem rühm) Kolmnurga ABC siseringjoon puutub külgi AB ja AC vastavalt punktides K ja L. Sirge BL lõikab kolmnurga ABC siseringjoont punktis M ($M \neq L$). Punkti M läbiv ringjoon puutub sirgeid AB ja BC vastavalt punktides P ja Q ning lõikab kolmnurga ABC siseringjoont punktis N ($N \neq M$). Tõesta, et kui $KM \parallel AC$, siis punktid P, N ja L on ühel sirgel.

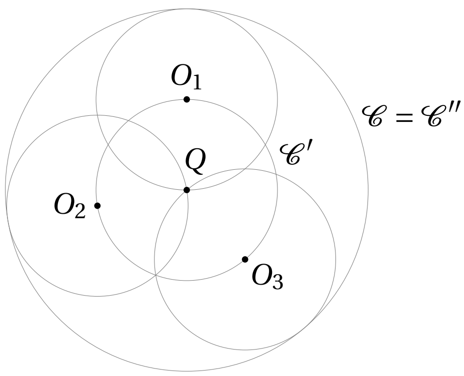
Ülesanne 33.12 (Lõppvoor 2006, 11. klass) Kolmnurga ABC ümberringjoone keskpunkt on O ja mediaanide lõikepunkt M, kusjuures sirge OM on risti sirgega AM. Olgu A' sirge AM teine lõikepunkt kolmnurga ABC ümberringjoonega. Sirged BA' ja AC lõikuvad punktis D ning sirged CA' ja AB lõikuvad punktis E. Tõesta, et kolmnurga ADE ümberringjoone keskpunkt asub kolmnurga ABC ümberringjoonel.

Vaata ka ülesandeid 24.8, 27.11, 31.14, 34.4 ja 34.5.

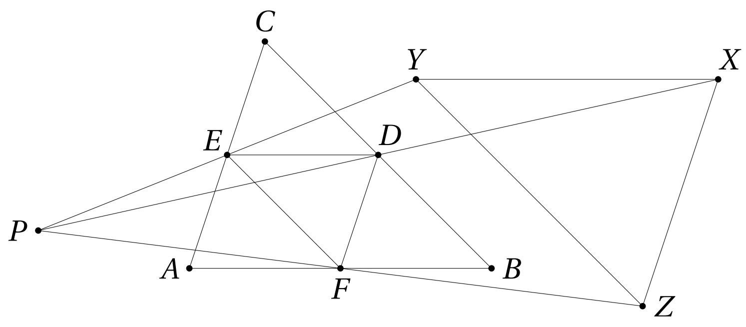
Lahendused

33.3 Olgu kolme ülesandes antud ringjoone ühine raadius r ning keskpunktid vastavalt O_1, O_2 ja O_3. Siis asuvad need punktid ühel ringjoonel $\mathscr{C}'$ keskpunktiga Q ning raadiusega r.

Vaatleme ringjoone $\mathscr{C}'$ homoteetset teisendust $\mathscr{C}''$ keskpunktiga Q ja teguriga 2. Saadava ringjoone keskpunkt on samuti Q ning raadius $2r$, mis on teisest küljest võrdne ülesandes antud ringjoonte diameetritega. Kuivõrd need kolm ringjoont läbivad punkti Q, puutuvad nad järelikult sisemiselt ringjoont $\mathscr{C}''$. Kuna niisuguse omadusega ringjoon on ilmselt üheselt määratud, langevad ringjooned $\mathscr{C}$ ja $\mathscr{C}''$ kokku. Muuhulgas on Q ka ringjoone $\mathscr{C}$ keskpunktiks.



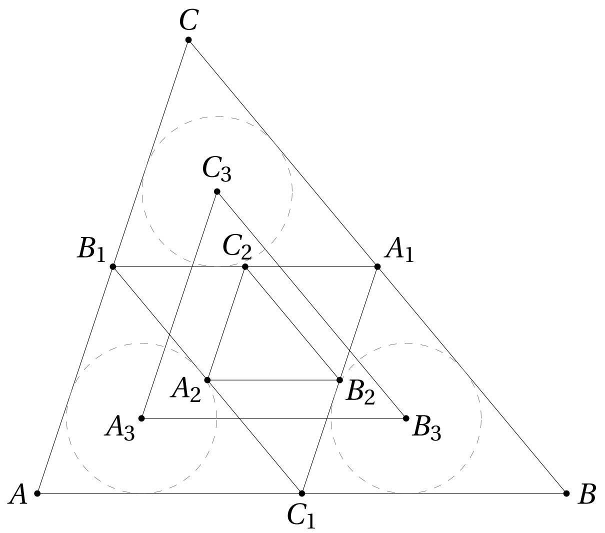
33.4 Kolmnurk XYZ on homoteetne kolmnurgaga DEF keskpunktiga P ja kordajaga 2, millest järeldub, et need kolmnurgad on sarnased sama kordajaga. Teisest küljest on kordajaga 2 sarnased ka kolmurgad DEF ja ABC. Järelikult on kolmnurgad ABC ja XYZ sarnased kordajaga 1.



33.5 Kuna A_1B_1 on kolmnurga ABC kesklõik ja A_2B_2 on kolmnurga $A_1B_1C_1$ kesklõik, siis $AB \parallel A_1B_1 \parallel A_2B_2$. Sama moodi tõestame, et $BC \parallel B_2C_2$ ja $CA \parallel C_2A_2$.

Kuna kolmnurgad AB_1C_1, A_1B_1C ja A_1BC_1 on homoteetsed kolmnurgaga ABC kordajaga $\frac{1}{2}$, siis on need kolm kolmnurka omavahel kongruentsed ja nende siseringjoonte raadiused on võrdsed. Sellest järeldub, et $AB \parallel A_3B_3$, $BC \parallel B_3C_3$ ja $CA \parallel C_3A_3$.

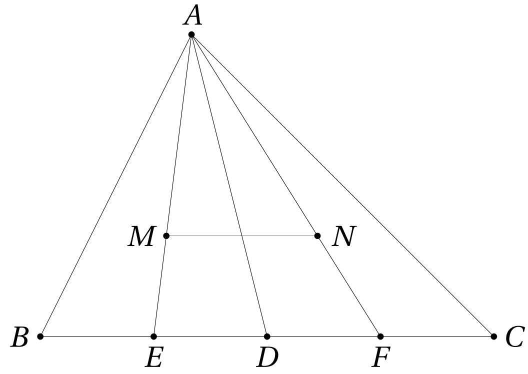
Kokkuvõttes on $A_2B_2C_2$ ja $A_3B_3C_3$ vastavalt parallelsete külgedega kolmnurgad, millest järeldub teoreemi 33.1 abil, et nad on homoteetsed. Niisiis lõikivad sirged A_2A_3, B_2B_3 ja C_2C_3 vastava homoteetse teisenduse keskpunktis.



33.6 Olgu E ja F vastavalt lõikude BD ja CD keskpunktid. Kolmnurkade ABD ja ACD mediaanide lõikepunktid M ja N asuvad siis vastavalt lõikudel AE ja AF, kusjuures

$$\frac{|AM|}{|AE|} = \frac{|AN|}{|AF|} = \frac{2}{3}.$$

Järelikult on kolmnurgad AEF ja AMN homoteetsed keskpunktiga A ning kordajaga $\frac{2}{3}$.

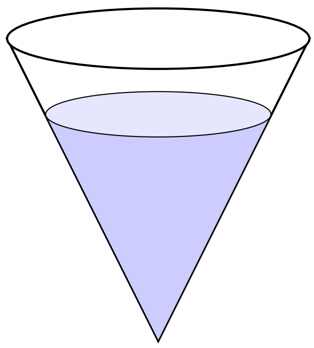


Kuna

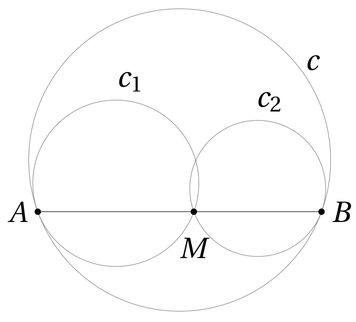
$$|ED| = \frac{1}{4} \cdot |BC| = |DF|,$$

poolitab sirge AD lõigu EF. Tänu homoteetiale poolitab sirge AD siis ka lõigu MN, millest omakorda järeldub, et punktid M ja N asuvad sellest sirgest samal kaugusel.

33.7 Olgu koonuse ruumala V. Veehulga kuju enne koonuse ümberpööramist on homoteetne kogu koonuse kujuga (vt joonist). Olgu homoteetsusteguriks k, siis on veehulga ruumalaks k^3V. Teisest küljest teame, et alguses oli koonuse ruumalast veega täidetud pool, seega oli vett $\frac{1}{2}V$ ruumalaühikut. Järelikult $k^3V = \frac{1}{2}V$, millest $k = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$. Et koonuse kõrgus oli 1m, oli veetaseme kõrgus enne ümberpööramist $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$m.



33.8 Ringjooned c_1, c_2 ja c_3 on homoteetsed ringjoonega c homoteetiakeskpunktidega vastavalt A, B ja C. Olgu homoteetsustegurid vastavalt k_1, k_2 ja k_3 (kusjuures $0 < k_1, k_2, k_3 < 1$).



Kuna

$$k_1 = \frac{|AM|}{|AB|} \quad \text{ja} \quad k_2 = \frac{|MB|}{|AB|}\,,$$

saame

$$k_1 + k_2 = \frac{|AM|}{|AB|} + \frac{|MB|}{|AB|} = \frac{|AM| + |MB|}{|AB|} = 1\,.$$

Sama moodi näitame ka, et $k_2 + k_3 = 1$ ja $k_3 + k_1 = 1$. Neid kolme võrdust liites saame

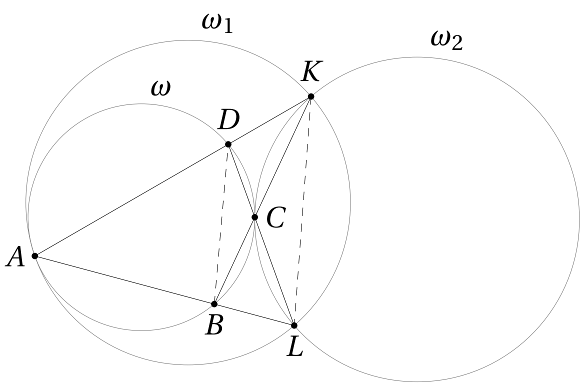
$$2(k_1 + k_2 + k_3) = 3\,,$$
$$k_1 + k_2 + k_3 = 1{,}5\,.$$

Järelikult $k_1 = k_2 = k_3 = 0{,}5$, mistõttu punktid K, L ja M on vastavalt külgede BC, CA ja AB keskpunktid. Ülesande 33.1 tulemuse põhjal lõikuvad ringjooned c_1, c_2 ja c_3 siis ringjoone c keskpunktis.

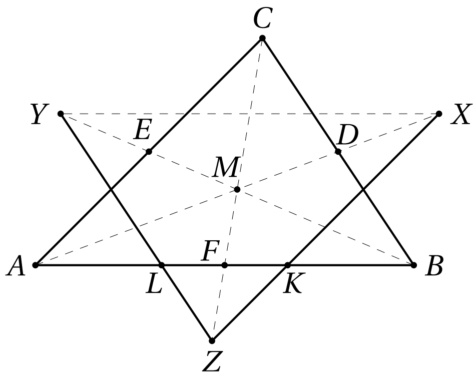
33.9 Olgu kolmnurkade AKL ja CKL ümberringjooned vastavalt ω_1 ja ω_2.

Kui ringjooned ω ja ω_1 puutuvad, on nad homoteetsed keskpunktiga A. See homoteetia viib kõõlu BD kõõluks LK, järelikult $BD \parallel LK$. Seega on BDC ja KLC vastavalt paralleelsete külgedega kolmnurgad, mis on teoreemi 33.1 põhjal homoteetsed, kusjuures homoteetsuskeskpunkt on ilmselt C. Vastav homoteetne teisendus viib ka kolmnurga BDC ümberringjoone ω kolmnurga KLC ümberringjooneks ω_2. Järelikult ringjooned ω ja ω_2 puutuvad punktis C.

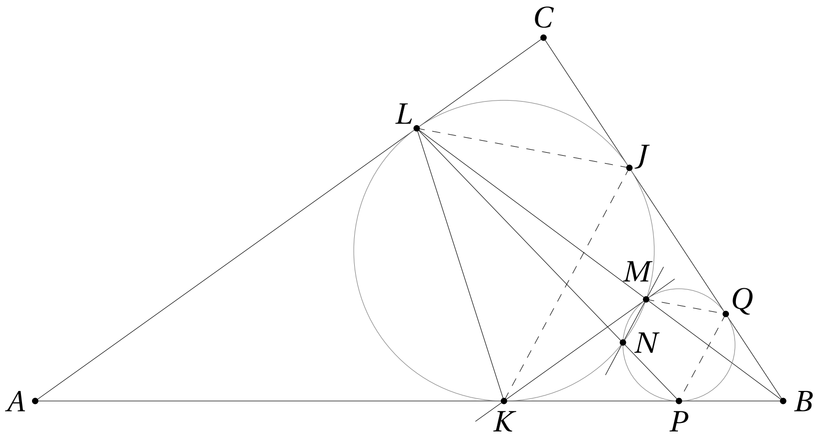
Kogu eelneva arutelu saab ümber pöörata. Kui ringjooned ω ja ω_2 puutuvad punktis C, on nad ka homoteetsed homoteetsuskeskpunktiga C. See homoteetia säilitab sirged DL ja BK, järelikult viib ta ka kõõlu BD kõõluks LK, kust saame jälle $BD \parallel LK$. Seega on ABD ja ALK vastavalt paralleelsete külgedega kolmnurgad ja sellistena homoteetsed. Homoteetsuskeskpunkt on A ja see homoteetne teisendus viib kolmnurga ABD ümberringjoone ω kolmnurga ALK ümberringjooneks ω_2. Järelikult need kaks ringjoont puutuvad punktis A.



33.10 Kuna AD on kolmnurga ABC mediaan, teame, et $|AM| = 2|MD| = |MX|$. Sama moodi saame $|BM| = |MY|$ ja $|CM| = |MZ|$. Järelikult on kolmnurgad ABC ja XYZ homoteetsed keskpunktiga M ja kordajaga -1. Kuna sirge CZ jääb selle teisendusega samaks, on ta ka kolmnurga XYZ mediaansirge. Et $KL \parallel XY$, poolitab sirge CZ lõigu KL. Järelkult $|AL| = |AF| - |LF| = |FB| - |FK| = |KB|$.



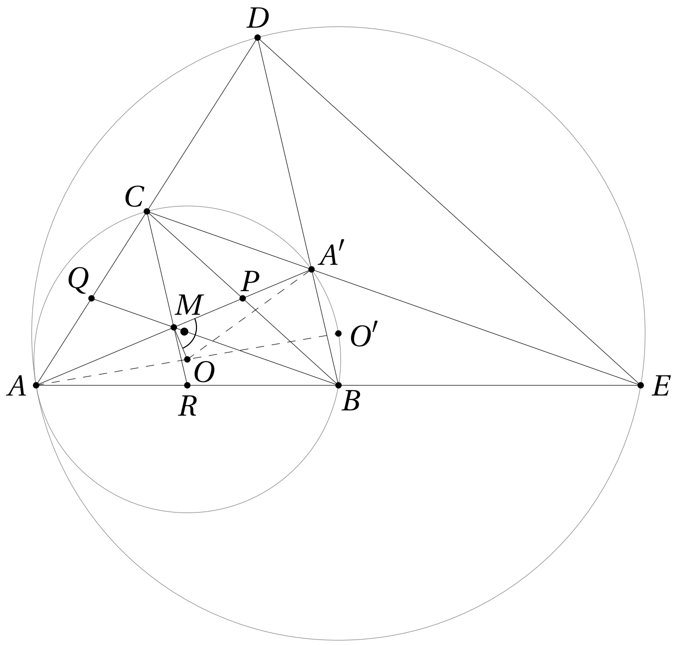
33.11 Teeme joonise.



Valime tugisirgeks MN ja näitame, et $\angle MNP + \angle MNL = 180^\circ$. Kuna $MNKL$ on kõõlnelinurk, siis $\angle MNL = \angle MKL$. Et $MK \parallel AC$, siis $\angle MKL = \angle ALK$. Puutuja ja kõõlu teoreemist saame lisaks, et $\angle ALK = \angle LMK$. Olgu J kolmnurga ABC siseringjoone puutepunkt küljega BC; siis $\angle LMK = \angle LJK$ ja kokkuvõttes $\angle MNL = \angle LJK$.

Kaks vaadeldavat ringjoont on homoteetsed keskpunktiga B. See homoteetia viib punktid P, Q ja M vastavalt punktideks K, J ja L. Järelikult $\angle LJK = \angle MQP$ ja $\angle MNL = \angle MQP$. Kuna $MNPQ$ on kõõlnelinurk, siis $\angle MNP + \angle MQP = 180^\circ$, millest järeldubki, et $\angle MNP + \angle MNL = 180^\circ$.

33.12 Olgu P, Q ja R vastavalt tippudest A, B ja C tõmmatud mediaanide aluspunktid (st külgede BC, CA ja AB keskpunktid). Teeme joonise.



Vaatleme homoteetset teisendust keskpunktiga A ja teguriga 2. See teisendus viib punktid R ja Q vastavalt punktideks B ja C. Kuna punktid A ja A' asuvad samal ringjoonel keskpunktiga O, kehtib $|AO| = |A'O|$, st kolmnurk AOA' on võrdhaarne. Lõik OM on ülesande tingimuste põhjal selle kolmnurga kõrgus ja järelikult ka mediaan (vt teoreem 31.1). Niisiis viib vaadeldav homoteetne teisendus punkti M punktiks A' ning seega ka sirged MR ja MQ vastavalt sirgeteks $A'B$ ja $A'C$.

Järelikult viib homoteetne teisendus keskpunktiga A ja teguriga 2 punktid B ja C vastavalt punktideks E ja D ning kolmnurga ABC kolmnurgaks AED. Kolmnurga AED ümberringjoone keskpunkt O' peab siis muuhulgas olema kolmnurga ABC ümberringjoone keskpunkti O kujutis selle teisenduse abil. Järelikult $|AO'| = 2|AO|$, niisiis on O' tipust A kolmnurga ABC ümberringjoonele tõmmatud diameetri teine otspunkt.