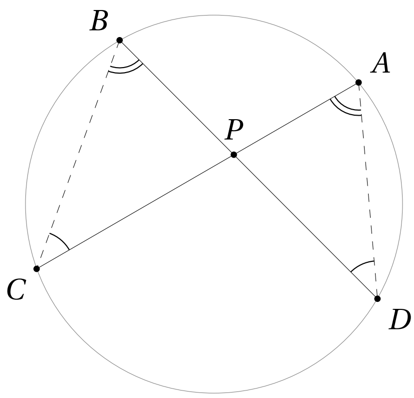
31. Punkti potents ringjoone suhtes

28. jaotises nägime, kuidas tõestada, et nelinurk on kõõlnelinurk, uurides lõikude vahel tekkivaid nurki. Tingimuse nelja punkti asumiseks ühel ringjoonel saab anda ka sobivate lõikude pikkuste kaudu.

Teoreem 31.1 Olgu lõikude AC ja BD lõikepunkt P. $ABCD$ on kõõlnelinurk parajasti siis, kui kehib võrdus

$$|AP| \cdot |CP| = |BP| \cdot |DP|\,.$$

Tõestus. Oletame kõigepealt, et $ABCD$ on kõõlnelinurk (vt joonist).



Teoreemi 28.2 põhjal teame, et $\angle BCA = \angle BDA$ ja $\angle CBD = \angle CAD$. Järelikult on kolmnurgad PCB ja PDA sarnased tunnuse NN põhjal. Sarnaste kolmnurkade vastavad küljed on võrdelised, seega kehtib võrdus

$$\frac{|AP|}{|BP|} = \frac{|DP|}{|CP|}\,, \tag{31.1}$$

mis on samaväärne teoreemi võrdusega.

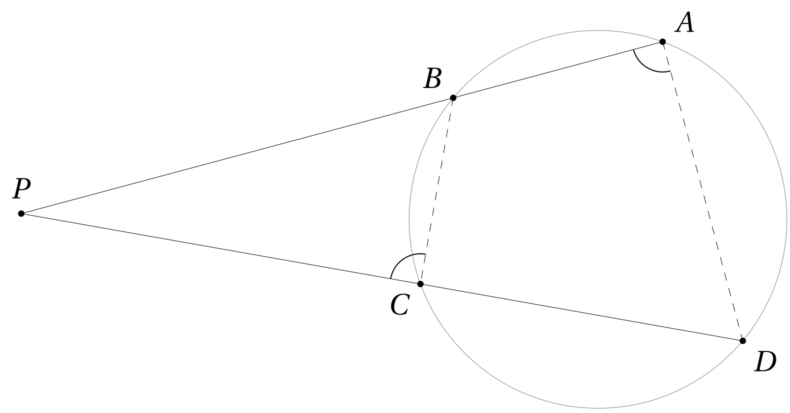
Eeldame nüüd, et kehtib teoreemis antud võrdus, millest omakorda järeldub võrdus (31.1). Nurgad APD ja BPC on tipunurkadena võrdsed, järelikult on kolmnurgad PCB ja PDA tunnuse KNK põhjal sarnased. Kuna sarnaste kolmnurkade vastavad nurgad on võrdsed, saame $\angle BCA = \angle BDA$, millest teoreemi 28.2 abil järeldubki, et $ABCD$ on kõõlnelinurk. □

Väga sarnane teoreem kehtib ka siis, kui sirged AC ja BD lõikuvad lõikude AC ja BD pikendustel.

Teoreem 31.2 Lõikugu sirged AB ja CD punktis P, mis ise jääb väljapoole lõike AB ja CD. $ABCD$ on kõõlnelinurk parajasti siis, kui kehib võrdus

$$|AP| \cdot |BP| = |CP| \cdot |DP|.$$

Tõestus. Oletame kõigepealt, et $ABCD$ on kõõlnelinurk (vt joonist).



Teoreemi 28.2 põhjal teame, et $\angle PAD = \angle BAD = 180^\circ - \angle BCD = \angle PCB$. Nurk tipu P juures on kolmnurkadel PAD ja PCB ühine, järelikult on kolmnurgad PAD ja PCB sarnased tunnuse NN põhjal. Sarnaste kolmnurkade vastavad küljed on võrdelised, seega kehtib võrdus

$$\frac{|AP|}{|CP|} = \frac{|DP|}{|BP|}, \tag{31.2}$$

mis on samaväärne teoreemi võrdusega.

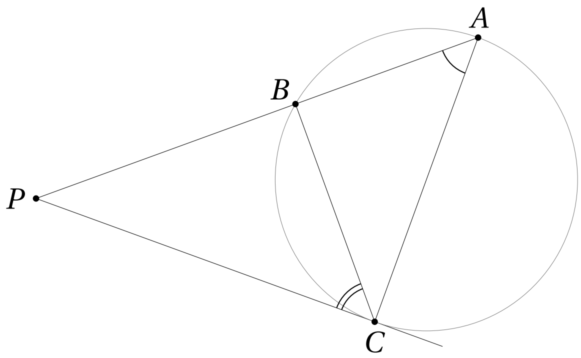
Eeldame nüüd, et kehtib teoreemis antud võrdus, millest omakorda järeldub võrdus (31.2). Kolmnurkadel PAD ja PCB on ühine nuirk tipu P juures, järelikult on kolmnurgad PAD ja PCB tunnuse KNK põhjal sarnased. Kuna sarnaste kolmnurkade vastavad nurgad on võrdsed, saame $\angle BAD = \angle PAD = \angle PCB = 180^\circ - \angle BCD$, millest teoreemi 28.2 abil järeldubki, et $ABCD$ on kõõlnelinurk. □

Teoreemiga 31.2 on lähedalt seotud ka järgmine tulemus, kus üks lõikamine on asendunud puutega.

Teoreem 31.3 Olgu väljaspool ringjoon asuvast punktist P tõmmatud kaks sirget, millest üks lõikab antud ringjoont punktides A ja B, teine aga omab ringjoonega ühist punkti C. Sirge CP on ringjoone puutuja parajasti siis, kui kehib võrdus

$$|AP| \cdot |BP| = |CP|^2.$$

Tõestus. Teeme joonise.



Vastavalt puutuja ja kõõlu teoreemile (vt teoreem 30.1) on sirge CP antud ringjoone puutujaks parajasti siis, kui $\angle PCB = \angle PAC$. Kuna nurk tipu P juures on kolmnurkadel PCA ja PBC ühine, kehtib viimane võrdus parajasti siis, kui need kolmnurgad on sarnased. See on nii aga parajasti siis, kui kehtib võrdus

$$\frac{|AP|}{|CP|} = \frac{|CP|}{|BP|},$$

mis on samaväärne teoreemi võrdusega. □

Teoreemidest 31.1 ja 31.2 saab teha huvitava järelduse.

Kui tasandil antud punktist P tõmmata sirge, mis lõikab antud ringjoont punktides A ja B, sõltub suurus $|AP| \cdot |BP|$ ainult ringjoonest ja punktist P, aga mitte tõmmatud sirge asendist.

See tähelepanek põhjendab järgmise definitsiooni korrektsuse.

Definitsioon 31.1 Olgu tasandil antud ringjoon c ja punkt P. Vaatleme suvalist sirget, mis läbib punkti P ning lõikab ringjoont punktides A ja B. Punkti P *potentsiks* ringjoone c suhtes nimetatakse suurust

$$\begin{cases} |AP| \cdot |BP|, & \text{kui } P \text{ asub ringjoonest väljaspool,} \\ 0, & \text{kui } P \text{ asub ringjoone peal,} \\ -|AP| \cdot |BP|, & \text{kui } P \text{ asub ringjoone sees.} \end{cases}$$

Lisaks näeme teoreemi 31.3 põhjal, et ringjoonest väljaspool asuva punkti potents on võrdne sellest punktist ringjoonele tõmmatud puutujalõigu pikkuse ruuduga.

Punkti potentsi arvutamiseks ringjoone suhtes on olemas ka kompaktne valem.

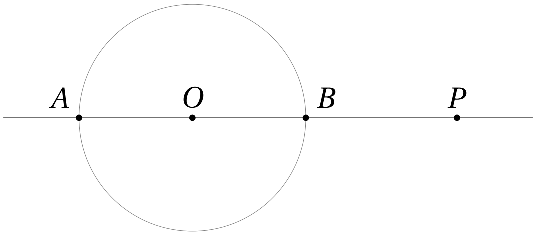
Teoreem 31.4 Olgu tasandil antud punkt P ning ringjoon keskpunktiga O ja raadiusega r. Punkti P potents vaadeldava ringjoone suhtes avaldub kujul

$$|OP|^2 - r^2.$$

Tõestus. Tõmbame sirge OP (kui $O = P$, sobib suvaline seda punkti läbiv sirge). Olgu tema lõikepunktid vaadeldava ringjoonega A ja B. Vaatame läbi kolm juhtu, mis vastavad definitsioonile 31.1.

Kui punkt P asub ringjoonest väljaspool, saame tema potentsiks vaadeldava ringjoone suhtes

$$|AP| \cdot |BP| = (|OP| + r) \cdot (|OP| - r) = |OP|^2 - r^2.$$

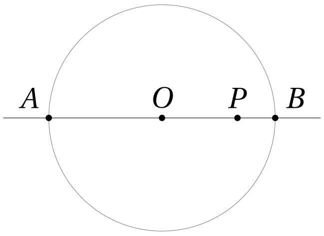


Kui punkt P asub ringjoone peal, langeb ta kokku ühega punktidest A ja B. Lisaks $|OP| = r$, järelikult

$$|AP| \cdot |BP| = 0 = |OP|^2 - r^2 .$$

Kui punkt P asub ringjoone sees, saame tema potentsiks vaadeldava ringjoone suhtes

$$-|AP| \cdot |BP| = -(r + |OP|) \cdot (r - |OP|) = |OP|^2 - r^2 .$$



Kokkuvõttes oleme vajaliku võrduse tõestanud kõigil kolmel juhul. □

Teoreeme 31.1, 31.2, 31.3 ja 31.4 nimetatakse ühiselt *potentsiteoreemideks*.

Punkti potentsiga on tihedalt seotud radikaaltelje mõiste, mille kohta saab pikemalt lugeda lisapeatükist 31.1.

Ülesanded

Ülesanne 31.1 (Kevadine lahtine võistlus 2006, noorem rühm) Tasandile on joonestatud kaks mittelõikuvat ringjoont, mis ei asu teineteise sees. Läbi punkti P, mis jääb kummastki ringjoonest väljapoole, on tõmmatud kaks sirget. Esimene sirge lõikab esimest ringjoont punktides A ja A' ning teist ringjoont punktides B ja B'; seejuures on A ja B punktile P lähemad lõikepunktid, A' ja B' kaugemad lõikepunktid ning punkt P asub lõigul AB. Täpselt analoogilisel viisil lõikab teine sirge esimest ringjoont punktides C ja C' ning teist ringjoont punktides D ja D'. Tõesta, et punktid A, B, C, D asuvad ühel ringjoonel parajasti siis, kui punktid A', B', C', D' asuvad ühel ringjoonel.

Ülesanne 31.2 (Lõppvoor 2023, 9. klass) Ringjoone c keskpunkt on O ja üks diameeter on AB. Olgu M lõigu AO keskpunkt ja CD ringjoone c mingi kõõl, mis läbib punkti M. Kõõlul CD valitakse punktist D erinev punkt H nii, et $|DM| = |MH|$. Tõsta, et $\angle BHD = 2\angle ABC$.

Ülesanne 31.3 (Lõppvoor 2021, 10. klass) Kolmnurgas ABC on D ja E vastavalt külgede AB ja AC keskpunktid. Tõesta, et sirge AB puutub kolmnurga BEC ümberringjoont parajasti siis, kui sirge AC puutub kolmnurga BED ümberringjoont.

Ülesanne 31.4 (Lõppvoor 2003, 11. klass) Kolmnurga ABC külgedel BC, CA ja AB võetakse vastavalt punktid A_1, B_1 ja C_1 nii, et lõigud AA_1, BB_1 ja CC_1 lõikuvad ühes punktis. On teada, et punktid A, B_1, A_1 ja B paiknevad ühel ringjoonel ning punktid B, C_1, B_1 ja C paiknevad ühel ringjoonel. Tõesta, et

a) punktid C, A_1, C_1 ja A paiknevad ühel ringjoonel;

b) lõigud AA_1, BB_1 ja CC_1 on kolmnurga ABC kõrgused.

Ülesanne 31.5 (Piirkonnavoor 2016, 11. klass) Olgu u ja v positiivsed reaalarvud, $u > v$. Tasandil valitakse punktid O, A, B, P ja Q nii, et lõigud OA ja OB on võrdse pikkusega u ning nelinurk $APBQ$ on romb küljepikkusega v. Tõesta, et $|OP| \cdot |OQ| = u^2 - v^2$.

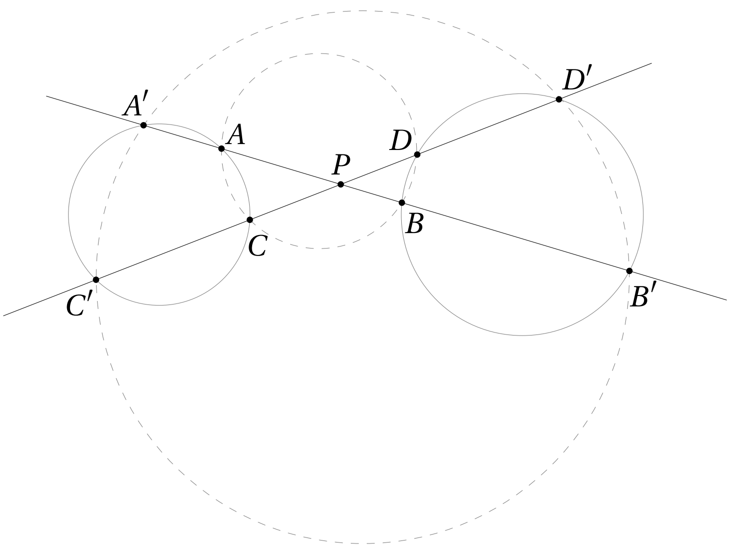
Ülesanne 31.6 (Talvine lahtine võistlus 2023, noorem rühm) Kolmnurga ABC mediaanil AD valitakse punkt X. Kolmnurga ABX ümberringjoon lõikab kolmnurga ABC mediaani BE punktis Y $(Y \neq B)$. Kolmnurga EXY ümberringjoon lõikab sirget DE punktis K $(K \neq E)$. Tõesta, et punkti K asukoht ei sõltu punkti X valikust.

Ülesanne 31.7 (Lõppvoor 1995, 12. klass) Olgu D kolmnurga ABC külje BC keskpunkt ja E sirge BC suvaline punkt, mis erineb punktidest B ja D. Punkte A, E, D läbiv ringjoon lõikab sirget AB teistkordselt punktis F. Sirgel AB võetakse punkt G $(G \neq B)$ nii, et $|BF| = |FG|$. Tõesta, et kolmnurgad EBG ja ABC on sarnased.

Ülesanne 31.8 (Talvine lahtine võistlus 2021, vanem rühm) Kolmnurgas ABC on $|AB| = |AC|$. Mediaanid AD ja BE lõikuvad punktis G. Olgu P lõigu GE keskpunkt. Tõesta, et $|GP| = |GD|$ parajasti siis, $CEPD$ on kõõlnelinurk.

Lahendused

31.1 Paneme tähele, et ülesannde tingimuste põhjal asub punkt P lõikude $AB, CD, A'B'$ ja $C'D'$ sisepiirkonnas. Teeme joonise.



Teoreemi 31.2 põjal teame, et

$$|PA| \cdot |PA'| = |PC| \cdot |PC'| \quad \text{ja} \quad |PB| \cdot |PB'| = |PD| \cdot |PD'|. \tag{31.3}$$

Kui punktid A, B, C ja D asuvad ühel ringjoonel, saame teoreemist 31.1 lisaks võrduse

$$|PA| \cdot |PB| = |PC| \cdot |PD| \quad \text{ehk} \quad \frac{|PA| \cdot |PB|}{|PC| \cdot |PD|} = 1\,.$$

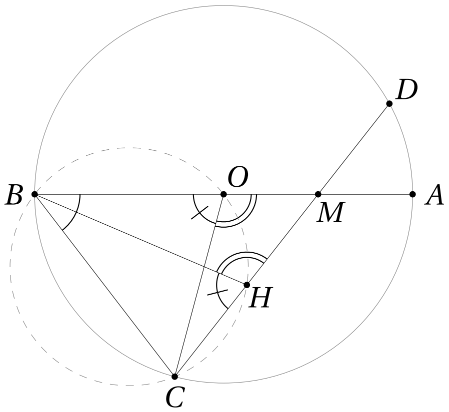
Avaldame nüüd võrduste (31.3) põhjal suuruse $|PA'| \cdot |PB'|$:

$$|PA'| \cdot |PB'| = \frac{|PC| \cdot |PC'|}{|PA|} \cdot \frac{|PD| \cdot |PD'|}{|PB|} = \frac{|PC| \cdot |PD|}{|PA| \cdot |PB|} \cdot |PC'| \cdot |PD'| = \\ = |PC'| \cdot |PD'|\,.$$

Teoreemi 31.1 põhjal on $A'B'C'D'$ seega kõõlnelinurk.

Täpselt analoogiliselt saame tõestada ka vastupidise järelduse, kus eeldusest, et $A'B'C'D$ on kõõlnelinurk, järeldub sama väide ka $ABCD$ jaoks.

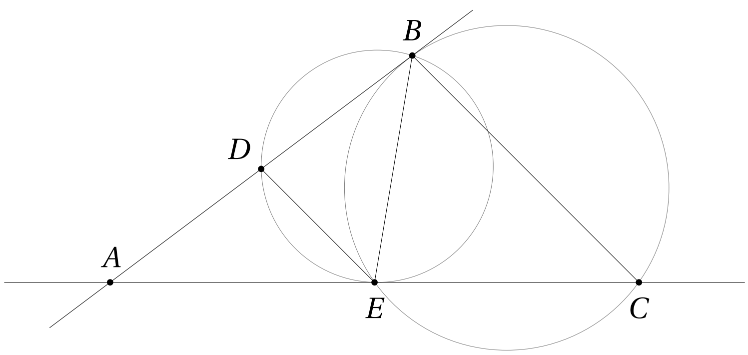
31.2 Ülesande algses tekstis oli antud, et $\angle BHD = 90°$, ning küsiti nurga ABC suurust. Siinkohal tõestame üldise võrduse $\angle BHD = 2\angle ABC$, millest juhul $\angle BHD = 90°$ järeldub $\angle ABC = 45°$.



Kuna AOC on piirdenurgale ABC vastav kesknurk, siis $2\angle ABC = \angle AOC$. Niisiis on tõestatav võrdus $\angle BHD = 2\angle ABC$ samaväärne võrdusega $\angle BHD = \angle AOC$, mis tänu kõrvuburkade omadusele on omakorda samaväärne võrdusega $\angle COB = \angle CHB$. Viimane võrdus kehtib aga parajasti siis, kui punktid B, C, H ja O asuvad ühel ringjoonel.

Kuna $ADBC$ on kõõlnelinurk, siis teoreemi 31.1 järgi kehtib võrdus $|MA| \cdot |MB| = |MC| \cdot |MD|$. Ülesande tingimuste põhjal teame, et $|MA| = |MO|$ ja $|MD| = |MH|$. Järelikult kehtib ka võrdus $|MO| \cdot |MB| = |MC| \cdot |MH|$, mis teoreemi 31.2 alusel tähendab, ka $BCHO$ on kõõlnelinurk. Seda aga oligi tarvis tõestada.

31.3 Teeme joonise.



Vastavalt teoreemile 31.3 on sirge AB kolmnurga BEC ümberringjoone puutujaks parajasti siis kui

$$|AE| \cdot |AC| = |AB|^2 . \tag{31.4}$$

Ülesande tingimuste põhjal $|AC| = 2 \cdot |AE|$ ja $|AB| = 2 \cdot |AD|$. Niisiis on võrdus (31.4) samaväärne võrdustega

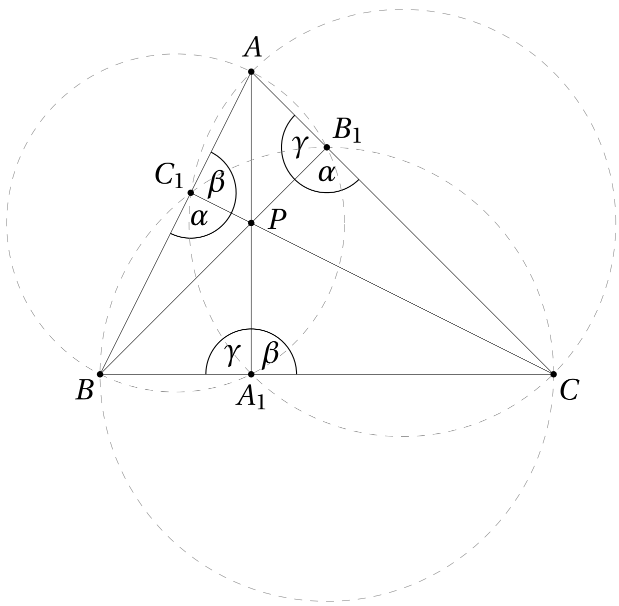
$$|AE| \cdot 2 \cdot |AE| = |AB| \cdot 2 \cdot |AD| ,$$
$$|AE|^2 = |AB| \cdot |AD| .$$

Viimane võrdus on aga teoreemi 31.3 põhjal samaväärne väitega, et sirge AC puutub kolmnurga BED ümberringjoont.

Selle ülesande väite teise tõestuse annab ülesanne 30.1.

31.4 a) Olgu P lõikude AA_1, BB_1 ja CC_1 lõikepunkt. Punkti P potents nelinurga AB_1A_1B ümberringjoone suhtes on $|AP| \cdot |A_1P| = |BP| \cdot |B_1P|$ ning nelinurga BC_1B_1C ümberringjoone suhtes $|BP| \cdot |B_1P| = |CP| \cdot |C_1P|$. Järelikult $|AP| \cdot |A_1P| = |CP| \cdot |C_1P|$, millest teoreemi 31.1 põhjal järeldub, et ka CA_1C_1A on kõõlnelinurk.

b) Teeme joonise.



Kuna punktid B, C_1, B_1 ja C asuvad ühel ringjoonel, kehtib võrdus $\angle CB_1B = \angle CC_1B$; tähistame seda nurka α. Analoogiliselt tähistame $\angle AA_1C = \angle AC_1C = \beta$ ja $\angle BA_1A = \angle BB_1A = \gamma$. Saame võrdused

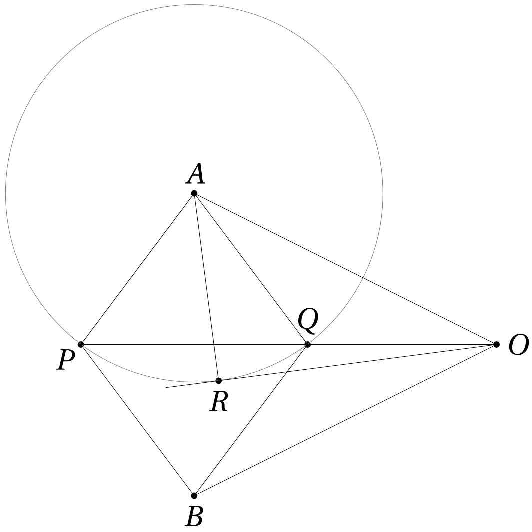
$$\alpha + \beta = \angle CC_1B + \angle AC_1C = 180^\circ ,$$
$$\beta + \gamma = \angle AA_1C + \angle BA_1A = 180^\circ ,$$
$$\gamma + \alpha = \angle BB_1A + \angle CB_1B = 180^\circ .$$

Nende võrduste liitmine annab $2(\alpha + \beta + \gamma) = 540^\circ$ ehk $\alpha + \beta + \gamma = 270^\circ$. Lahutades viimasest võrdusest järgemööda kolm ülaltoodut, saame $\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$. Niisiis on lõigud AA_1, BB_1 ja CC_1 tõepoolest kolmnurga ABC kõrgusteks.

31.5 Kuna $|OA| = |OB|$, asub punkt O lõigu AB keskristsirgel koos punktidega P ja Q, st punktid O, P ja Q asuvad ühel sirgel.

Ülesandes uuritav avaldis $|OP| \cdot |OQ|$ väljendab niisiis punkti O potentsi mingi ringjoone suhtes, mis läbib punkte P ja Q. Ülesande tekstis küll ühtegi ringjoont mainitud ei ole, aga on romb $APBQ$, millest saame, et $|AP| = v = |AQ|$. Järelikult leidub ringjoon keskpunktiga A, mis läbib vajalikke punkte P ja Q, kusjuures selle ringjoone raadiuseks on v. Teoreemi 31.4 põhjal teame, et punkti O potentsiks vaadeldava ringjoone suhtes on $|OA|^2 - v^2 = u^2 - v^2$, mida oligi tarvis tõestada.

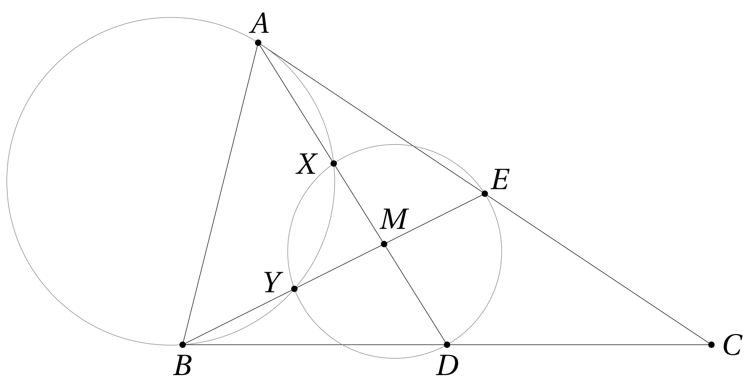
Vajaliku võrduse saab tõestada ka teoreemi 31.3 abil. Teeme joonise.



Tõmbame punktist O ringjoonele puutuja OR. Teoreemist 31.3 teame siis, et $|OP| \cdot |OQ| = |OR|^2$. Teisest küljest on ARO täisnurkne kolmnurk, milles $|AR| = v$ ja $|OA| = u$. Pythagorase teoreemi põhjal saame $|OR|^2 = u^2 - v^2$, millest järeldubki vajalik väide.

31.6 Näitame, et punkt K langeb kokku punktiga D. Selleks piisab näidata, et punktid E, D, X ja Y asuvad ühel ringjoonel.

Joonise jaoks tekib kaks võimalust sõltuvalt sellest, kas punkt X valitakse lõigul AM või lõigul MD, kus M on kolmnurga ABC mediaanide lõikepunkt.



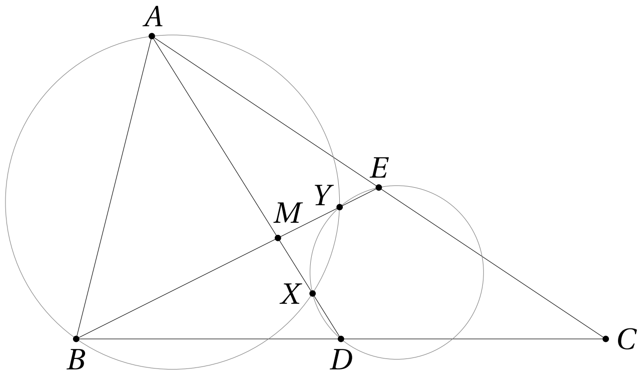
Esimesel juhul jääb punkt M kolmnurga ABX ümberringjoonest välja; muuhulgas tähendab see, et punkt Y asub lõigul BM. Kuna $ABYX$ on kõõlnelinurk, saame teoreemist 31.2 võrduse

$$|AM| \cdot |XM| = |BM| \cdot |YM|.$$

Mediaanide omadusest teame samas, et $|AB| = 2|MD|$ ja $|BM| = 2|ME|$. Järelikult kehtib ka võrdus

$$|MD| \cdot |XM| = |ME| \cdot |YM|,$$

millest teoreemi 31.1 põhjal järeldub, et $EXYD$ on kõõlnelinurk.

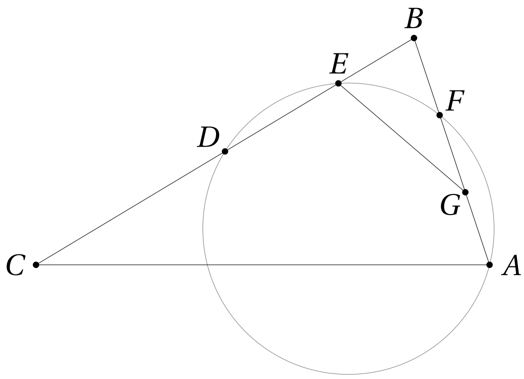


Teisel juhul on tõestus analoogiline, ainult teoreeme 31.1 ja 31.2 tuleb kasutada teises järjekorras, sest punkt M asub nüüd lõikudel AX ja BY.

31.7 Ülesande algses tekstis oli lisatingimus, et E on nurga CAB poolitaja lõikepunkt küljega BC, aga seda eeldust pole tegelikult üldse vaja.

Küll aga on oluline aru saada, et ülesande tekstile vastab kaks erinevat olukorda – üks, kus punkt E asub sirgel BC punkti B suhtes punktiga D samal pool, ning teine, kus punkt B jääb punktide D ja E vahele.

Vaatleme kõigepealt esimest olukorda.

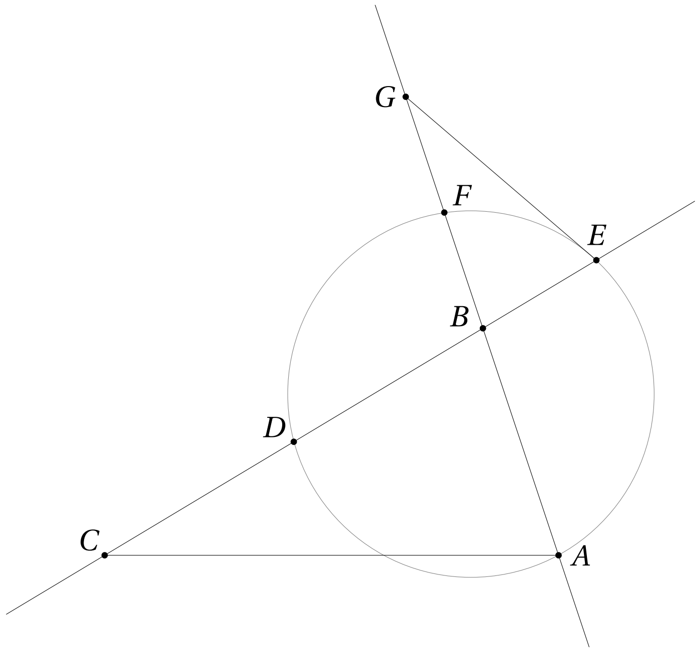


Kuna punktid D, E, F, A asuvad ühel ringjoonel, saame potentsiteoreemist 31.2 võrduse $|BE| \cdot |BD| = |BF| \cdot |BA|$. Arvestades lisaks, et $|BF| = \frac{1}{2}|BG|$ ja $|BD| = \frac{1}{2}|BC|$, kehtivad võrdused

$$\frac{|BE|}{|BA|} = \frac{|BF|}{|BD|} = \frac{|BG|}{|BC|}.$$

Kuna nurk tipu B juures on kolmnurkadel EBG ja ABC ühine ning selle nurga juures asuvad küljed on vastavalt võrdelised, oleme tõestanud nende kolmnurkade sarnasuse.

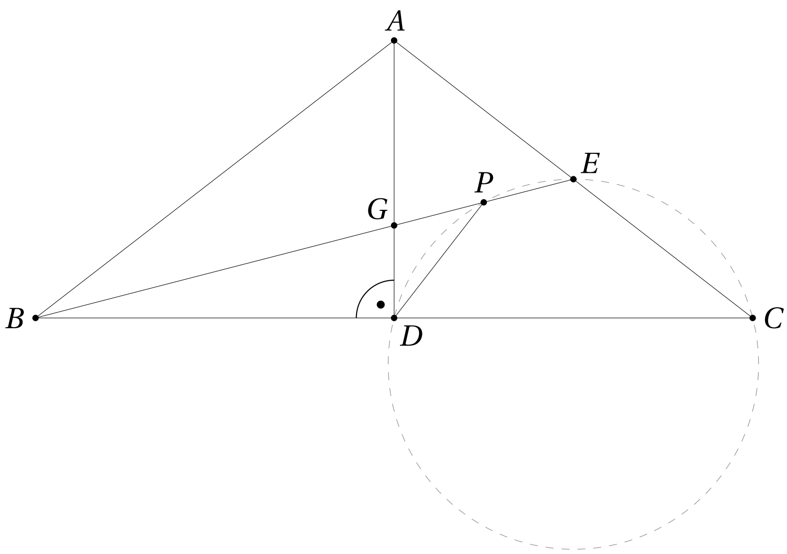
Vaatleme nüüd teist võimalikku olukorda, kus punkt B asub sirgel BC punktide D ja E vahel. Siis asub B ka sirgel AB punktide A ja F vahel.



Sel juhul saame võrduse $|BE| \cdot |BD| = |BF| \cdot |BA|$ potentsiteoreemist 31.1; kogu ülejäänud tõestus on esimese käsitletud juhuga analoogiline.

Harjutus 31.1 Tegelikult saab täiendavalt loobuda nõudest, et sirgel AB on punkte A, D ja E läbiva ringjoonega kaks erinevat lõikepunkti. Ülesande väide kehtib ka siis, kui sirge AB puutub seda ringjoont punktis A. Mõtle see juhtum iseseisvalt läbi. Millist potentsiteoreemi nüüd vaja läheb?

31.8 Teeme joonise.



Teoreemi 31.2 põhjal on $CEPD$ kõõlnelinurk parajasti siis, kui $|BP| \cdot |BE| = |BD| \cdot |BC|$. Kuna G on kolmnurga ABC mediaanide lõikepunkt ja $|GP| = |PE|$, saame

$$|BP| \cdot |BE| = 5 \cdot |GP| \cdot 6 \cdot |GP| = 30 \cdot |GP|^2.$$

Et AD on mediaan, kehtib ka $|BC| = 2 \cdot |BD|$ ja järelikult $|BD| \cdot |BC| = 2 \cdot |BD|^2$.

Niisiis on $CEPD$ kõõlnelinurk parajasti siis, kui kehtib võrdus $30 \cdot |GP|^2 = 2 \cdot |BD|^2$ ehk $15 \cdot |GP|^2 = |BD|^2$.

Kuivõrd kolmnurk ABC on võrdhaarne, osutub mediaan AD ühtlasi tema kõrguseks, järelikult $\angle GDB = 90°$. Pythagorase teoreemist saame seega $|BG|^2 = |BD|^2 + |GD|^2$. Kuna G on kolmnurga ABC mediaanide lõikepunkt ja $|GP| = |PE|$, kehtib $|BG| = 4 \cdot |GP|$.

Nüüd näeme, et võrdus $|GP| = |GD|$ kehtib parajasti siis, kui $|BG|^2 = |BD|^2 + |GP|^2$ ehk

$$16 \cdot |GP|^2 = |BD|^2 + |GP|^2 .$$

See võrdus on aga on samaväärne tingimusega $15 \cdot |GP|^2 = |BD|^2$, mis omakorda kehtib ülaltõestatu põhjal parajasti siis, kui $CEPD$ on kõõlnelinurk.

31.1 Radikaaltelg ja radikaalkese

Teoreem 31.5 Olgu tasandil antud kaks mittekontsentrilist ringjoont (st sellist ringjoont, mille keskpunktid ei lange kokku). Niisuguste punktide hulk tasandil, mille potents nende ringjoonte suhtes on võrdne, moodustab sirge, mis on risti nende ringjoonte keskpunkte ühendava sirgega. Seda punktihulka (sirget) nimetatakse antud ringjoonte *radikaalteljeks.*

Tõestus. Olgu antud ringjoonte keskpunktid ja raadiused vastavalt O_1 ja O_2 ning r_1 ja r_2. Teoreemi 31.4 põhjal otsime tasandil niisuguseid punkte P, mille korral kehtib võrdus

$$|O_1P|^2 - r_1^2 = |O_2P|^2 - r_2^2$$

ehk

$$|O_1P|^2 - |O_2P|^2 = r_1^2 - r_2^2 . \tag{31.5}$$

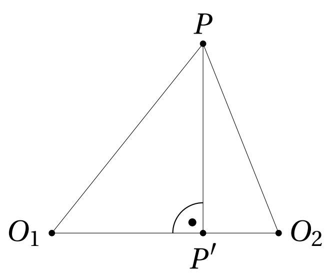
Selles võrduses võime suurust $r_1^2 - r_2^2$ vaadelda lihtsalt mingi reaalarvulise konstandina, mille määravad ära antud ringjooned.

Näitame kõigepealt, et sirgel O_1O_2 leidub täpselt üks punkt P, mis rahuldab võrdust (31.5). Valime tasandil koordinaatteljestiku nii, et punktide O_1 ja O_2 koordinaadid on vastavalt $(0,0)$ ja $(1,0)$, ning olgu x-teljel muutuva punkti P koordinaadid $(x,0)$. Siis

$$|O_1P|^2 - |O_2P|^2 = x^2 + (1-x)^2 = 2x - 1 .$$

Võrrandil $2x - 1 = r_1^2 - r_2^2$ on aga täpselt üks lahend $x = \dfrac{r_1^2 - r_2^2 + 1}{2}$ iga reaalarvu $r_1^2 - r_2^2$ korral.

Olgu P nüüd vaba punkt tasandil ning olgu P' tema ristprojektsioon sirgele O_1O_2.



Pythagorase teoreemist saame

$$|O_1P|^2 - |O_2P|^2 = (|O_1P'|^2 + |PP'|^2) - (|O_2P'|^2 + |PP'|^2) = |O_1P'|^2 - |O_2P'|^2 .$$

Niisiis kehtib võrdus (31.5) parajasti siis, kui

$$|O_1P'|^2 - |O_2P'|^2 = r_1^2 - r_2^2 .$$

Eelpooltõestatu põhjal on punkt P' sirgel O_1O_2 üheselt määratud. Võrdust (31.5) rahuldavad niisiis parajasti kõik need punktid P, mille ristprojektsioon sirgele O_1O_2 on P'. Need punktid aga moodustavad sirge, mis on risti sirgega O_1O_2, nagu oligi tarvis tõestada. □

Teoreemist 31.5 saame kaks lihtsat, aga võistlusülesannete lahendamisel väga kasulikku järeldust.

Teoreem 31.6 Olgu tasandil antud kolm paarikaupa mittekontsentrilist ringjoont. Nende paarikaupa radikaalteljed on kas paralleelsed või lõikuvad ühes punktis. Seda punkti nimetatakse antud ringjoonte *radikaalkeskmeks.*

Tõestus. Kui antud ringjoonte keskpunktid asuvad ühel sirgel, on vastavad radikaalteljed teoreemi 31.5 põhjal selle sirgega risti ja järelikult omavahel paralleelsed.

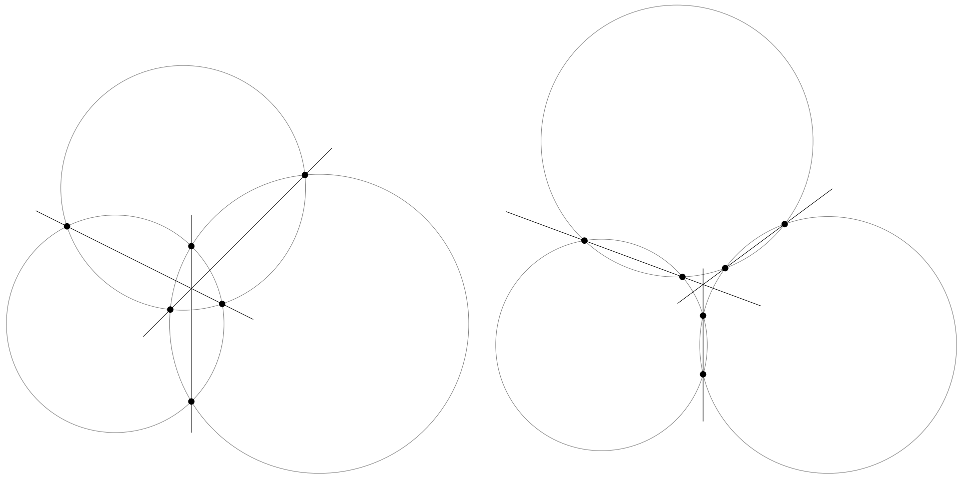
Vaatleme nüüd juhtu, kui antud ringjoonte keskpunktid ei asu ühel sirgel. See tähendab, et vaadeldavad radikaalteljed ei ole paralleelsed ning peavad lõikuma. Tähistame antud ringjooni c_1, c_2 ja c_3 ning olgu ringjoonte c_1 ja c_2 radikaaltelg s ja ringjoonte c_2 ja c_3 radikaaltelg t. Olgu sirgete s ja t lõikepunkt P.

Kuna ühest küljest asub punkt P sirgel s, on tema potents ringjoonte c_1 ja c_2 suhtes sama. Kuna teisest küljest asub punkt P sirgel t, on sama ka tema potents ringjoonte c_2 ja c_3 suhtes. Järelikult peab punkti P potents ringjoonte c_1 ja c_3 suhtes samuti sama olema, mistõttu P asub nende ringjoonte radikaalteljel. Seda aga oligi tarvis tõestada. □

Teoreem 31.7 Kui kaks ringjoont lõikuvad kahes punktis, on nende radikaalteljeks lõikepunkte läbiv sirge.

Tõestus. Definitsiooni 31.1 põhjal on ringjoonel asuva punkti potents selle ringjoone enda suhtes 0. Niisiis on ringjoonte lõikepunktide potents 0 mõlema vaadeldava ringjoone suhtes. Muuhulgas on nende lõikepunktide potentsid mõlema ringjoone suhtes võrdsed, järelikult asuvad nad antud ringjoonte radikaalteljel. See radikaaltelg on teoreemi 31.5 põhjal sirge, kaks punkti aga määravad neid läbiva sirge üheselt ära. □

Võistlusülesannetes esineb sageli olukord, kus kolm ringjoont lõikuvad paarikaupa kahes punktis. Teoreemidest 31.6 ja 31.7 järeldub, et vastavate lõikepunktide poolt määratud sirged lõikuvad ühes punktis. See tähelepanek annab meile ühe võimaliku viisi kolme sirge ühes punktis lõikumise tõestamiseks.



Ülesanded

Ülesanne 31.9 (Sügisene lahtine võistlus 2020, noorem rühm) Kolmnurga ABC tipust A tõmmatud nurgapoolitaja lõikab kolmnurga ABC ümberringjoont punktis F ($F \neq A$). Küljel AB valitakse punkt D ja küljel AC punkt E nii, et sirged DE ja BC on paralleelsed. Olgu G ja H vastavalt kiirte FD ja FE lõikepunktid kolmnurga ABC ümberringjoonega ($G \neq F$, $H \neq F$). Kolmnurkade AGD ja AHE ümberringjooned lõikuvad punktis P ($P \neq A$). Tõesta, et punkt P asub sirgel AF.

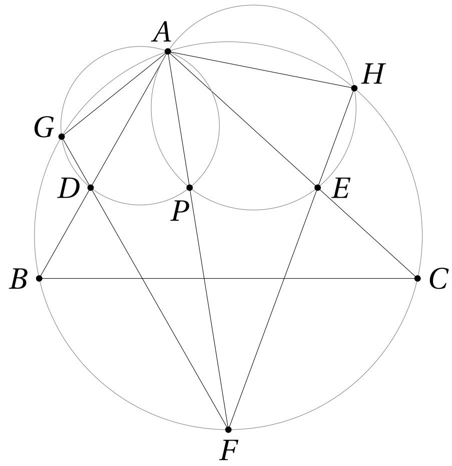
Ülesanne 31.10 (Lõppvoor 2016, 12. klass) Tasandil on ringjooned c_1, c_2, c_3 ja c_4. Ringjooned c_1 ja c_2 lõikuvad omavahel kahes punktis ja ringjoon c_4 läbib samuti neid lõikepunkte. Ringjoon c_3 lõikub ringjoontega c_1 ja c_2 täisnurga all. Tõesta, et ringjoon c_3 lõikub ka ringjoonega c_4 täisnurga all.

Märkus. Ütleme, et kaks ringjoont lõikuvad täisnurga all, kui nende puutujad lõikepunktis on risti.

Ülesanne 31.11 (Sügisene lahtine võistlus 2023, vanem rühm) Teravnurkses kolmnurgas ABC, kus $|AB| < |AC|$, lõikuvad kõrgused BE ja CF punktis H. Kolmnurga ABC ümberringjoone puutuja punktis A lõikab kolmnurga AEF ümberringjoont punktis T ($T \neq A$). Kolmnurkade TBE ja TCF ümberringjooned lõikuvad punktis K ($K \neq T$). Tõesta, et $\angle KHB = \angle ABC$.

Lahendused

31.9 Teeme joonise.



Näeme, et AP on kolmnurkade AGD ja AHE ümberringjoonte (tähistame neid vastavalt c_{AGD} ja c_{AHE}) radikaaltelg. Proovime leida ringjoone c nii, et F oleks ringjoonte c_{AGD}, c_{AHE} ja c radikaalkese; muuhulgas tõestame me sellega, et punktid A, P ja F asuvad ühel sirgel.

Niisiis oleks vaja, et sirge GD oleks ringjoonte c_{AGD} ja c radikaaltelg ning et sirge HE oleks ringjoonte c_{AHE} ja c radikaaltelg. Selleks piisaks, kui ringjoon c läbiks punkte G, D, E, H. Teisisõnu, ülesande väite tõestamiseks piisab tõestada, et punktid G, D, E, H asuvad ühel ringjoonel.

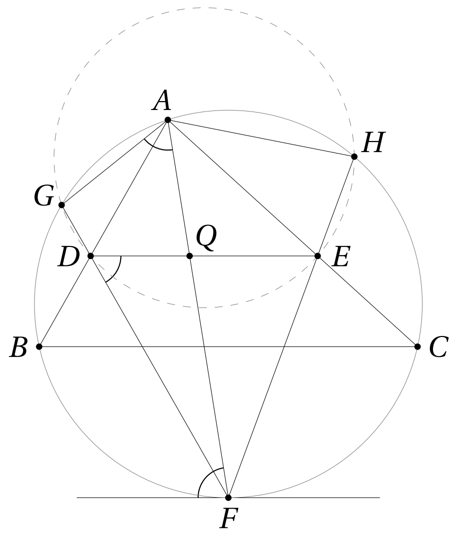
Selleks võime kasutada teoreemi 31.2 ning näidata, et kehtib võrdus

$$|FD| \cdot |FG| = |FE| \cdot |FH|\,.$$

Selleks omakorda piisab, kui leiame lõigul FA punkti Q nii, et

$$|FD| \cdot |FG| = |FQ| \cdot |FA| \quad \text{ja} \quad |FQ| \cdot |FA| = |FE| \cdot |FH|\,.$$

Osutub, et punktiks Q sobib sirgete DE ja AF lõikepunkt. Teeme uue joonise, kuhu märgime ka kolmnurga ABC ümberringjoonele punktis F tõmmatud puutuja. Nurgapoolitaja teise omaduse põhjal (vt teoreem 33.5) on F kaare BC keskpunkt, mistõttu vaadeldav puutuja on paralleelne sirgega BC ning ülesande tingimuste põhjal seega ka sirgega DE.



Puutuja ja kõõlu teoreemi (vt teoreem 30.1) põhjal on nurk vaadeldava puutuja ja kõõlu FG vahel võrdne nurgaga AFG. Selle kõõlu paralleelsusest sirgega DE saame järelikult $\angle FAG = \angle QDF$. Kuna kolmnurkadel AGF ja DQF on tipu F juures sama nurk, on need kolmnurgad tunnuse NN põhjal sarnased. Järelikult

$$\frac{|FA|}{|FD|} = \frac{|FQ|}{|FG|},$$

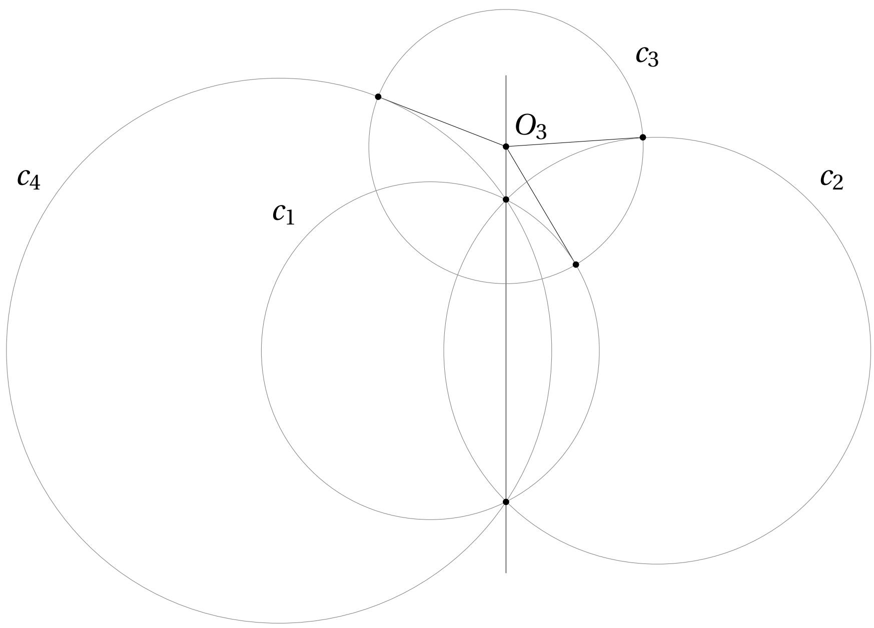
millest omakorda saamegi vajaliku võrduse $|FD| \cdot |FG| = |FQ| \cdot |FA|$. Võrduse $|FQ| \cdot |FA| = |FE| \cdot |FH|$ põhjendus on analoogiline ja see lõpetab ülesande väite tõestuse.

Muuhulgas järeldub võrdusest $\angle FAG = \angle QDF$, et $\angle QAD + \angle GDQ = 180^\circ$, st punkt Q asub kolmnurga AGD ümberringjoonel. Sama moodi saame, et Q asub ka kolmnurga AHE ümberringjoonel; niisiis tegelikult $P = Q$. Hüpoteesile, et P on sirgete AF ja DE lõikepunkt, saab tulla ka korraliku joonise abil, aga selle hüpoteesi tõestamiseks on ikkagi vaja siinse lahenduse arutelu sisuliselt läbi teha.

31.10 Ülesande tekstis antud definitsiooni põhjal tähendab ringjoonte ristumine neile lõikepunktis tõmmatud puutujate ristumist. Kuna teisest küljest ristub ringjoone puutuja puutepunktist tõmmatud raadiusega, on ringjoonte ristumine samaväärne nendele ringjoontele lõikepunktist tõmmatud raadiuste ristumisega.

Olgu O_3 ringjoone c_3 keskpunkt. Tõmbame punktist O_3 raadiused ringjoone c_3 lõikepunktidesse vastavalt ringjoontega c_1 ja c_2. Ülaltehtud tähelepaneku põhjal on need raadiused puutujalõigud punktist O_3 ringjoontele c_1 ja c_2. Kuivõrd mõlemad lõigud on võrdsed ringjoone c_3 raadiusega r_3, on nad ka omavahel võrdsed. Niisiis on punkti O_3 potents ringjooonte c_1 ja c_2 suhtes sama (täpsemalt r_3^2), mistõttu O_3 asub nende ringjoonte radikaalteljel.

Kuna ringjooned c_1, c_2 ja c_4 lõikuvad paarikaupa samades punktides, langevad teoreemi 31.7 alusel kokku ka nende paarikaupa radikaalteljed (milleks on tekkivaid lõikepunkte läbiv sirge). See omakorda tähendab, et ka punktist O_3 ringjoonele c_4 tõmmatud puutujalõigu pikkus on r_3. Kuna aga see puutuja on risti ringjoone c_4 vastava raadiusega, on lahenduse alguses tehtud tähelepaneku järgi risti ka ringjooned c_3 ja c_4.



31.11 Tähistame kolmnurga XYZ ümberringjoont c_{XYZ}.

Lahenduse võtmeideeks on näidata, et punktid K, H ja T asuvad ühel sirgel. Kuna sirge KT on ringjoonte c_{TBE} ja c_{TFC} radikaaltelg, piisab näidata, et punkt H asub samal teljel. Selleks omakorda piisab, kui leiame niisuguse ringjoone c, et H oleks ringjoonte c, c_{TBE} ja c_{TFC} radikaalkese.

Paneme tähele, et H on defineeritud kui kõrguste BE ja CF lõikepunkt. Kuna $\angle CEB = \angle CFB = 90^\circ$, asuvad punktid B, C, E, F ühel ringjoonel. See ringjoon sobibki otsitavaks ringjooneks c. Tõepoolest, BE on ringjoonte c ja c_{TBE} radikaaltelg ning CF on ringjoonte c ja c_{TCF} radikaaltelg.

Kokkuvõttes olemegi näidanud, et punkt H asub sirgel KT. Järelikult

$$\angle KHB = 180^\circ - \angle BHF - \angle FHT.$$

Kuna punktid A, F, H, E asuvad ühel ringjoonel, saame

$$\angle BHF = \angle EAF = \angle CAB.$$

Teisest küljest, kuna punktid F, H, A, T asuvad samal ringjoonel, saame ka

$$\angle FHT = \angle FAT = \angle BAT.$$

Puutuja ja kõõlu teoreemist (vt teoreem 30.1) kolmnurga ABC ümberringjoone jaoks saame $\angle BAT = \angle BCA$. Kokkuvõttes

$$\angle KHB = 180^\circ - \angle BHF - \angle FHT = 180^\circ - \angle CAB - \angle BCA = \angle ABC,$$

mida oligi tarvis tõestada.