# 3. Linnad ja ühendusteed (graafid)

Matemaatikavõistlustel esineb sageli ülesandeid, mille sõnastuses räägitakse linnadest ja nendevahelistest teedest või lennuühendustest. Tegu pole siiski külalistega geograafiaolümpiaadilt, vaid kõigiti matemaatilise sisuga küsimustega.

Niisugust tüüpi ülesannete puhul on tegelikult oluline vaid see, et käsitletakse teatud *objekte* ja nendevahelisi *seoseid*. Objektide nimetamine linnadeks ja nendevaheliste seoste vaatlemine transpordiühendustena on traditsioon, mis võimaldab ülesandeid konkreetsemalt sõnastada. Vahel võib matemaatikavõistluste sõnastustes objektidena kohata ka inimesi ja seostena nendevahelist tutvust.

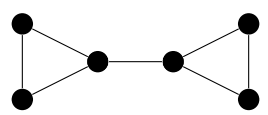
Õigust ütelda kuuluvad niisugused ülesanded *graafiteooria* valdkonda. Tegemist on kombinatoorika klassikalise haruga, milles on viimase paarisaja aastaga saadud rikkalikult tulemusi. Huvitatud lugeja leiab graafiteooria kohta põhjalikumat infot näiteks raamatutest [5, 11, 12].

Õnneks pole (vähemalt Eesti) matemaatikavõistlustel kogu seda rikast tulemustepagasit vaja. Enamasti piisab lihtsalt loogilisest mõtlemisest ja mõningasest kogemusest niisugust tüüpi ülesannetega. Küll aga aitab mõtlemisele visuaalselt palju kaasa objektide ja seoste graafiline kujutamine täppide ja nende vahele tõmmatud joontena. Graafiteooria terminites räägime sel juhul graafi *tippudest* ja *servadest*.

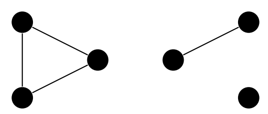
Linnade ja ühendusteede ülesannetes on sageli oluline, millistest linnadest teistesse linnadesse pääseb, olgu siis otse või muude linnade kaudu.

**Definitsioon 3.1** *Teeks* ehk *ahelaks* graafis nimetame tema tippude järjendit, kus iga kahe järjestikuse tipu vahel leidub serv. Graafi nimetame *sidusaks*, kui tema igast tipust saab igasse teise mööda mingit teed.

Näiteks graaf



on sidus, aga graaf



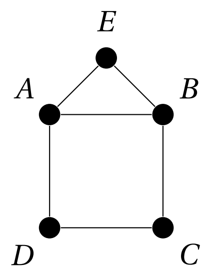
mitte. Küll aga võime öelda, et viimane graaf koosneb kolmest sidusast komponendist.

**Ülesanne 3.1** (Lõppvoor 2016, 12. klass) Riigis on mõned linnad ühendatud maanteedega. Ütleme, et linn $A$ kuulub tsüklisse pikkusega $n$, kui linnast $A$ alustades saab sõita läbi täpselt $n-1$ ülejäänud linna ja jõuda tagasi linna $A$. On teada, et riigi iga linn kuulub tsüklisse pikkusega 4 ja tsüklisse pikkusega 5. Kas võib kindlalt väita, et

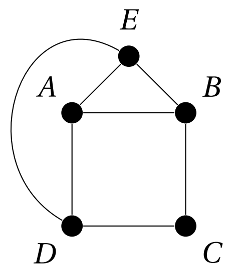
a) vähemalt üks linn kuulub tsüklisse pikkusega 3?

b) iga linn kuulub tsüklisse pikkusega 3?

*Lahendus.* Tegemist on ülesandega, kus tuleb kõigepealt mõlema osa jaoks hüpotees kujundada. Kui proovime kõigepealt neli linna tsüklisse joonistada ja siis ühe nii lisada, et ka viiene tsükkel moodustuks, juhtub nõnda:

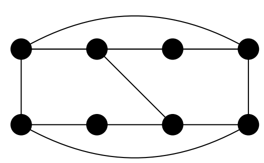



ja ilmub tsükkel pikkusega 3. Suurem probleem on aga see, et linn $E$ ei kuulu ühtegi tsüklisse pikkusega 4. Seda probleemi saab lahendada, kui ühendada omavahel teega näiteks linnad $E$ ja $D$, nii et moodustub täiendavalt tsükkel $E-B-C-D$:




Lisaks saame ka uue tsükli pikkusega 3 ($A-D-E$). Kuna aga linn $C$ ei asu ühelgi tsüklil pikkusega 3, oleme leidnud konstruktsiooni, mis annab eitava vastuse ülesande b)-osale.

Esimese osaga on rohkem pusimist. Paberile täppe ja jooni vedades võib vahepeal juba tunduda, et a)-osa vastus on jah, aga korralikku tõestust ka nagu ei õnnestu anda. Põhjus seisneb selles, et tegelikult on a)-osa vastuseks samuti ei. Sobivaid konstruktsioone on palju, vt nt järgnevat graafi.



Kui lahendamise käigus õnnestub koheselt leida konstruktsioon, mis a)-osa väite ümber lükkab, siis järeldub sellest muidugi automaatselt ka b)-osa eitav vastus.

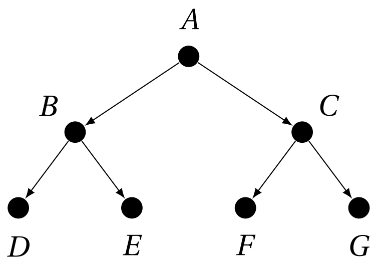
Ülesandes 3.1 on ühendusteed kahesuunalised, aga see ei pea mitte alati nii olema. Vahel vaadeldakse ühendusi ka suunatutena ja graafiliselt kujutatakse tippudevahelisi servi sel juhul tavaliselt ühte otsa lisatud noolekesega.

**Definitsioon 3.2** Kui graafi servade suund on oluline, räägime *suunatud*, muidu aga *suunamata graafist*.

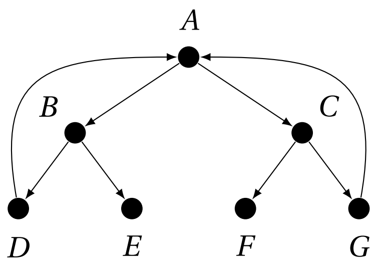
**Ülesanne 3.2** (Sügisene lahtine võistlus 2004, vanem rühm) Šeik soovib oma riigi $n$ linna ühendada ühesuunaliste lennuliinidega nii, et igast linnast väljuks täpselt kaks liini. Seejuures peab olema võimalik liikuda igast linnast igasse teise linna ülimalt ühe ümberistumisega. Leia suurim võimalik linnade arv $n$, mille korral see plaan on teostatav.

*Lahendus.* Vaatleme kõigepealt suvalist linna. Temast saab otse lennata ülimalt kahte linna ja kummastki linnast edasi saab otse omakorda veel ülimalt kahte teise. Niisiis saab šeigiriigis olla mitte rohkem kui $1+2+2\cdot 2=7$ linna.

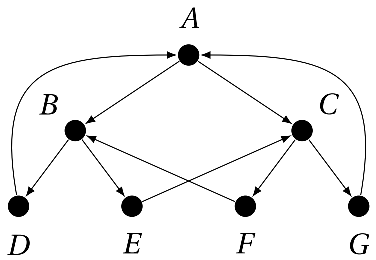
Osutub aga, et 7 linnaga pole võimalik konstruktsiooni anda. Selle näitamiseks valime suvalise linna (olgu ta $A$) ja hakkame temast lähtuvalt lennuliine paika panema. On selge, et 7 linna realiseerimiseks peab igasse teise linna ülimalt ühe ümberistumisega saama reisida ainult ühel moel, sest vastasel juhul jääks linnast $A$ "kättesaadavate" linnade arv väiksemaks kui 7. Järelikult peavad lennuühendused alates linnast $A$ välja nägema põhimõtteliselt niisugused:




Linnast $B$ peab olema võimalik sõita linna $A$. Otse sinna ei saa, sest otselennud lähevad ainult linnadesse $D$ ja $E$. Järelikult tuleb $B$-st $A$-sse sõitmiseks ühes neist ümber istuda; olgu selleks vahepealseks linnaks üldisust kitsendamata $D$. Sama moodi saame arutleda $C$-st $A$-sse viiva teekonna üle; olgu sel teekonnal vahemaandumislinnaks üldisust kitsendamata $G$. Niisiis saame graafi täiendada järgmiselt:

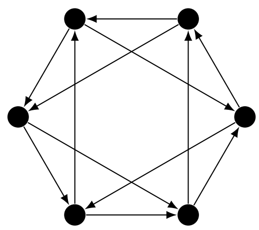



Linnast $B$ peab saama ka linna $C$ ning seda ilmselt ümberistumisega. Ümberistumine linnas $D$ ei tule kõne alla, sest siis saaks linnast $D$ linna $C$ kahel erineval moel ($D \to A \to C$ ja $D \to C$). See aga pole 7 linna puhul võimalik, nagu eespool nägime. Niisiis peab $B$-st $C$-sse lendama läbi linna $E$. Analoogiliselt näeme, et linnast $C$ saab linna $B$ ainult läbi linna $F$. Täiendame jälle graafi:




Kuidas pääseb linnast $E$ linna $A$? Otse lennata ei saa, sest siis tekiks $E$-st $C$-sse kaks teed ($E \to C$ ja $E \to A \to C$). $B$ ega $C$ kaudu pole mõtet, sest neil linnadel on väljuvate liinide maksimaalne arv juba täis. $D$ kaudu lennata ei saa, sest siis tekiks $B$ ja $D$ vahele kaks teed ($B \to D$ ja $B \to E \to D$). $F$-i ja $G$ kaudu samuti ei saa, sest nendesse linnadesse saab $E$-st juba $C$ kaudu, järelikult otseliine enam lisada ei tohi. Kokkuvõttes oleme näidanud, et nõutud konstruktsiooni 7 linnaga ei eksisteeri.

Konstruktsioone 6 linnaga on mitu, ühe võimaluse esitab alljärgnev graaf:



**Definitsioon 3.3** Vaatleme (suunamata) graafis tippu $v$. Nende servade arvu, mille üheks otspunktiks $v$ on, nimetame tipu $v$ *astmeks* ja tähistame $deg(v)$.

Tippude astmete kohta käivate väidete tõestamisel on sageli kasu topeltloendamisest (vt jaotis 8).

**Teoreem 3.1** (Suunamata) graafis on paarituarvulise astmega tippe paarisarv.

*Tõestus.* Olgu vaadeldava graafi tippude hulk $V$ ja servade hulk $E$.[1] Loendame paare

$$\{(v, e) : \text{tipp } v \in V \text{ on serva } e \in E \text{ otspunkt}\}.$$

Ühest küljest on igal serval kaks otspunkti, seega on loendatavaid paare $2|E|$. Teisest küljest panustab iga tipp $v$ loendatavasse paaride hulka oma astme $deg(v)$ võrra. Järelikult

$$\sum_{v \in V} deg(v) = 2|E|.$$

Kuna saadud võrduse parem pool on paarisarv, peab vasaku poole summas paarituid arve olema paarisarvul. □

[1] Tegemist on standardsete graafiteoorias kasutatavate tähistega, mis tulenevad tipu ja serva ingliskeelsetest nimedest *vertex* ja *edge*.

Vaata näitena selle teoreemi rakendamisest ka ülesannet 8.6.

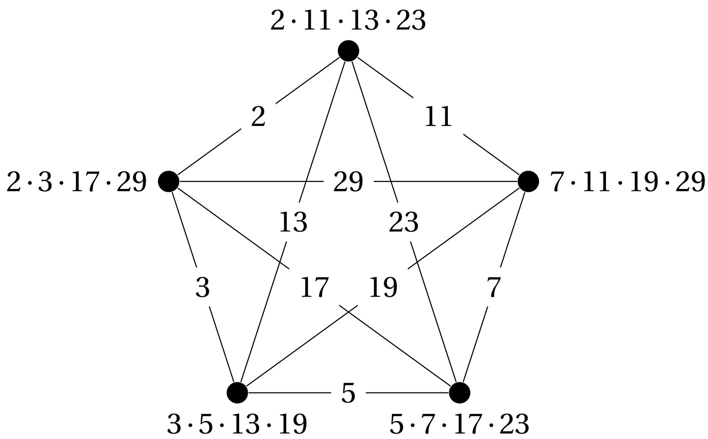
Erinevad objektid ja nendevahelise seosed esinevad muidugi paljudes ülesannetes. Seetõttu võib graafide keeles mõtlemisest olla kasu ka teistes valdkondades peale kombinatoorika.

**Ülesanne 3.3** (Piirkonnavoor 2004, 11. klass) Kas leiduvad sellised viis positiivset täisarvu, millest mistahes kahel on olemas 1-st suurem ühistegur, mistahes kolm on aga ühistegurita?

*Lahendus. Vastus:* jah.

Vaatleme otsitavaid täisarve graafi tippudena ja kirjutame tippe ühendavatele servadele vastavate arvude suurima ühise teguri. Ülesande tingimused oleksid täidetud, kui igal serval oleks 1-st suurem arv, aga samas oleksid kõik servadele kirjutatud arvud paarikaupa ühistegurita.

Kas selline arvude valik on võimalik? On küll! Me võime toimida nii, et valime alguses graafi servadele (mida on kokku 10 tükki) paarikaupa ühistegurita 1-st suuremad täisarvud ja kirjutame seejärel igasse tippu tema juurde koonduvate servade arvude korrutise. Servadele algsete arvude valimiseks on palju erinevaid võimalusi, näiteks võime võtta 10 esimest algarvu mingis järjekorras. Üks võimalik tulemuseks saadav konstruktsioon on näidatud joonisel.




## Ülesanded

**Ülesanne 3.4** (Lõppvoor 2005, 11. klass) Riigi postiteenistus kasutab postisaadetiste transpordiks kullereid, kellest igaühe ülesandeks on toimetada posti mingist linnast selle mingisse naaberlinna. On teada, et igast linnast on võimalik posti saata pealinna $P$. Suvalise kahe linna $A$ ja $B$ korral nimetame linna $B$ *tähtsamaks* linnast $A$, kui saadetise iga võimalik tee linnast $A$ pealinna $P$ läbib kindlasti linna $B$.

a) Tõesta, et alati, kui mingi kolme erineva linna $A$, $B$ ja $C$ korral on $B$ tähtsam $A$-st ja $C$ tähtsam $B$-st, siis on ka $C$ tähtsam $A$-st.

b) Tõesta, et alati, kui mingi kolme erineva linna $A$, $B$ ja $C$ korral on $B$ ja $C$ mõlemad tähtsamad $A$-st, siis on $C$ tähtsam $B$-st või $B$ tähtsam $C$-st.

**Ülesanne 3.5** (Lõppvoor 2019, 12. klass) Riigis on lõplik arv linnu. Mõningaid linnu ühendavad omavahel kahesuunalised lennuliinid. Otsustatakse iga lennuliin asendada ühesuunalise lennuliiniga samade linnade vahel ühes või teises suunas. Kas seda on alati võimalik teha nii, et iga linna korral erinevad temasse saabuvate ja temast väljuvate lennuliinide arvud ülimalt 1 võrra?

**Ülesanne 3.6** (Talvine lahtine võistlus 2009, vanem rühm) Riigi linnu ühendavad vahemaandumisteta mõlemasuunalised lennuliinid, mis rahuldavad järgmisi tingimusi.

1) Igal pealinnast erineval linnal on otseühendus täpselt 10 teise linnaga.
2) Igast linnast on võimalik lennata (võib-olla ümberistumistega) kõikidesse teistesse linnadesse.

Kulude kärpimiseks on vaja osa lennuliine sulgeda. Tõesta, et saab sulgeda vähemalt pooled pealinnast algavad lennuliinid nii, et võimalus igast linnast igasse teise linna lennata jääb alles.

**Ülesanne 3.7** (Piirkonnavoor 2005, 10. klass) Klassi õpilastest igale poisile meeldib vähemalt üks klassiõde ja igale tüdrukule vähemalt üks klassivend. On teada, et kui mingite õpilaste $A, B, C, D$ korral $A$-le meeldib $B$, $B$-le $C$ ja $C$-le $D$, siis meeldib $A$-le ka $D$.

a) Tõesta, et klassis leiduvad poiss ja tüdruk, kes meeldivad teineteisele.
b) Kas võib väita, et klassis leidub tüdruk, kes meeldib kõigile poistele?

**Ülesanne 3.8** (Piirkonnavoor 1998, 11. klass) Sünnipäevapeol on $n$ inimest. Nimetame peolviibijat *häbelikuks*, kui ta vestleb peo jooksul mitte rohkem kui kolme erineva partneriga. On teada, et iga peolviibija vestluspartnerite hulgas on vähemalt kolm häbelikku inimest.

a) Tõesta, et kõik peolviibijad on häbelikud.
b) Leia $n$ kõik võimalikud väärtused.

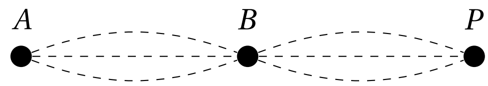
**Ülesanne 3.9** (Lõppvoor 2012, 11. klass) Ruudustikule asetatakse hulk kaarte mõõtmetega $1 \times 2$ nii, et kaartide servad ühtivad ruudustiku joontega, ükski kaart ei ulatu üle ruudustiku ääre ja iga lahtrit katab täpselt kaks kaarti. Tõesta, et saab eemaldada osa kaarte nii, et ruudustiku iga lahtrit jääb katma täpselt üks kaart.

## Lahendused

3.4 a) Vaatleme suvalise saadetise $x$ teekonda linnast $A$ pealinna. Kuna $B$ on tähtsam kui $A$, peab see saadetis läbima ka linna $B$. Kuna aga $C$ on omakorda tähtsam kui $B$, siis peab $x$ järelikult liikuma ka läbi linna $C$. Kokkuvõttes oleme näidanud, et suvaline saadetis linnast $A$ pealinna peab läbima linna $C$, mistõttu $C$ on tähtsam kui $A$.

b) Olgu $B$ tähtsam $A$-st, aga oletame vastuväiteliselt, et $B$ pole tähtsam $C$-st ega $C$ tähtsam $B$-st. Näitame, et sel juhul pole $C$ tähtsam $A$-st. Selleks piisab, kui konstrueerime linnast $A$ saadetise teekonna pealinna nii, et see ei läbi linna $C$.

Olukorda, kus iga teekond $A$-st pealinna $P$ peab minema läbi $B$, saame graafiliselt kujutada nii:



Paneme tähele, et $A$-st $B$-sse peab leiduma teekond, mis ei läbi $C$-d sest muidu oleks $B$ tähtsam kui $C$. Sama moodi peab $B$-st $P$-sse leiduma teekond, mis ei läbi $C$-d sest muidu oleks $C$ tähtsam kui $B$. Nendest kahest teekonnast saab aga kokku panna saadetise marsruudi $A$-st $P$-sse, mis ei läbi $C$-d. Järelikult pole $C$ tähtsam kui $A$; vastolu.

3.5 Vastus: jah.

Ilmselt võime ülesande lahendada iga sidusas komponendis eraldi. Seega võime lahenduses eeldada, et vaadeldav graaf on sidus.

Määrame lennuliinidele suunad esialgu suvaliselt. Leiame iga linna jaoks temasse saabuvate ja temast väljuvate liinide arvu vahe. Kui kõik need vahed kuuluvad hulka $\{-1, 0, 1\}$, siis on ülesanne lahendatud. Jääb üle vaadelda juhtu, kui mõne linna $L_1$ korral rahuldab vahe $d_1$ võrratust $|d_1| \geqslant 2$. Olgu $d_1$ näiteks negatiivne, st $d_1 \leqslant -2$; positiivse $d_1$ korral on arutlus järgnevaga analoogiline.

Lahenduse idee on leida suunatud tee linnast $L_1$ mingisse linna $L_k$, mille korral vastav vahe $d_k$ on positiivne. Paneme kõigepealt tähele, et kõigi linnade jaoks leitud vahede summa on 0, sest iga suunatud serv annab ühte vahesse panuse $+1$, mingisse teise aga panuse $-1$ (sisuliselt kasutame siinkohal topeltloendamist; vt jaotist 8). Kuna vähemalt üks vahe (näiteks $d_1$) on negatiivne, peab vaadeldavas graafis järelikult leiduma ka mõni positiivse vahega tipp.

Et $d_1 < 0$, peab leiduma linnast $L_1$ väljuv lennuliin; maandugu see linnas $L_2$. Kui vastav vahe $d_2 > 0$, oleme leidnud otsitava linna. Kui aga $d_2 \leqslant 0$, peab sellest linnast leiduma mõni väljuv liin (sest vähemalt üks liin tuleb sinna ka sisse!). Maandugu see liin linnas $L_3$ ja kordame selle linna puhul sama arutelu.

Nii saame jätkata, kuni juhtub üks kahest – kas satume tagasi linna, kus oleme juba olnud, või maandume mingisse linna $L_k$, mille korral vaadeldav vahe $d_k$ on positiivne. Esimene võimalus tähendab, et graafis on suunatud tsükkel, mille panus kõigisse läbitavate linnade vahedesse on 0. Märgime tsüklisse kuuluvad servad ära, edaspidises protsessis me neid enam ei vali ning jätkame oma teekonda.

Kuna graafi tippe ja servi on lõplik arv, peame lõpuks jõudma linna $L_k$, mille vahe $d_k > 0$. Niisiis oleme konstrueerinud suunatud tee $L_1 \to L_2 \to \ldots \to L_k$, kusjuures $d_1 \leqslant -2$ ja $d_k \geqslant 1$.

Nüüd pöörame sellel teel kõik lennuliinide suunad ümber ja saame tee $L_1 \leftarrow L_2 \leftarrow \ldots \leftarrow L_k$. Selle tulemusena linnades $L_2, \ldots, L_{k-1}$ vahed ei muutu, aga $d_1$ suureneb 2 võrra ja $d_k$ väheneb 2 võrra. Järelikult $|d_1|$ väheneb 2 võrra ja $|d_k|$ ei kasva (ta võib jääda samaks, kui tema väärtus enne muutust oli 1 ning pärast muutust $-1$).

Niisiis kahaneb kõigi linnade vahede $d_i$ absoluutväärtuste summa kirjeldatud protsessis rangelt. Kuna vahede absoluutväärtuste summa on mittenegatiivne täisarv, peab see protsess languse printsiibi põhjal (vt jaotist 2) ühel hetkel lõppema. Ülaltoodud arutelust nähtub aga, et ta saab lõppeda ainult siis, kui kõigi linnade vahed kuuluvad hulka $\{-1, 0, 1\}$.

Teine võimalus seda ülesannet lahendada on alustada tsüklite leidmisest. Kui graafis leidub mõni tsükkel, saame tema servad orienteerida piki tsüklit. Seejärel võime tsükli servad graafist välja jätta, sest tsükli panus kõigi läbitavate tippude vahedesse on 0. Jätkame seda protsessi kuni hetkeni, mil tsükleid enam ole (niisugune hetk peab saabuma, sest graafis on lõplik arv servi).

Vaatleme jälle allesjäänud graafi ühte sidusaid komponente eraldi. Sidusat tsükliteta graafi nimetatakse ka *puuks*; puude kohta saad rohkem lugeda õpikutest [5, 11, 12]. Tõestame ülesande väite puude jaoks, kasutades matemaatilist induktsiooni tippude arvu järgi.

Kui puus on üks tipp (ja seega mitte ühtegi serva), kehtib ülesande väide (st induktsiooni baas) triviaalselt.

Induktsiooni sammu tegemiseks vaatleme suvalist $n \geqslant 2$ tipuga puud. Tänu sidususele leidub seal kindlasti serv, aga lisaks peab leiduma ka tipp astmega 1. Tõepoolest, kui kõigi tippude astmed oleksid vähemalt 2, saaksime moodustada tsükli. Hakkame mingist tipust liikuma ja valime edasi liikumiseks alati servi, mida me veel pole kasutanud (tänu eeldusele on see esimest koda läbitavates tippudes alati võimaik). Kuna meil on lõplik arv tippe, peaksime mingil sammul jõudma tagasi juba läbitud tippu, st moodustuks tsükkel.

Valime siis vaadeldavas puus tipu $u$ astmega 1 ning temaga seotud ainsa serva $(u, v)$. Seda tippu ja serva välja jättes jääb alles $n-1$ tipuga puu, mis on induktsiooni eelduse põhjal ülesande tingimustele vastavalt orienteeritav. Paneme äravõetud tipu ja serva tagasi. Lihtne on mõista, et tagasipandavale servale saab valida sellise orientatsiooni, et ülesande tingimus jääb täidetuks nii tipus $u$ kui tema naabertipus $v$. Kui tipust $v$ väljub $n-1$ tipuga orienteeritud puus (ühe võrra rohkem) servi kui sinna siseneb, orienteerime serva $(u, v)$ nii, et ta siseneks tippu $v$. Vastasel juhul võime serva $(u, v)$ orienteerida nii, et ta väljuks tipust $v$.

3.6 Moodustame graafi, mille tippudeks on riigi linnad ja servadeks lennuliinid nende vahel. Olgu pealinnale vastav graafi tipp $P$. Kuna kõigi teiste tippude aste peale $P$ on paarisarv, peab teoreemi 3.1 järgi ka $P$ aste olema paarisarv.

Kustutame graafist tipu $P$ koos kõigi temaga seotud servadega; graaf laguneb seepeale võib-olla mitmeks sidusaks komponendiks. Paneme tähele, et saadud graafis on paaritu astmega tipud parajasti kõik $P$ endised naabrid. Teoreemi 3.1 järgi ei saa aga sidusas komponendis olla ainult ühte paaritu astmega tippu, neid peab seal olema vähemalt kaks.

Paneme nüüd tipu $P$ tagasi ja ühendame ta igas sidusas komponendis ainult ühega tema endistest naabritest. Nii oleme ühest küljest tastanud graafi sidususe, teisest küljest aga oleme kokkuvõttes kustutanud vähemalt pooled tipuga $P$ seotud algsetest servadest.

3.7 Vastus: b) ei.

a) Moodustame suunatud graafi, mille tippudeks on klassi õpilased ning tipust $A$ läheb serv tippu $B$ parajasti siis, kui õpilasele $A$ meeldib õpilane $B$. Valime alustuseks suvalise õpilase ning hakkame talle vastavast tipust liikuma mööda servi pärisuunas. Kuna igale õpilasele meeldib ülesande tingimuste põhjal mõni teine õpilane, saame igas tipus teekonda jätkata. Kuivõrd klassis on ilmselt lõplik arv õpilasi, peame oma teel jõudma õpilaseni, kelle juures me korra juba olnud oleme.

Niisiis moodustub suunatud tsükkel. Kuna poisid ja tüdrukud esinevad selles tsüklis vaheldumisi, peab tsüklisse kuuluma paariarv tippe. Kui tsüklis on ainult 2 tippu, on a)-osa lahendatud. Vaatleme juhtu, kui tsükli moodustavad tipud $A_1 \to A_2 \to A_3 \to A_4 \to \ldots \to A_{2n-1} \to A_{2n} \to A_1$, kus $n \geqslant 2$. Ülesande tingimuste põhjal peab leiduma suunatud serv tipust $A_1$ tippu $A_4$, mis tähendab, et graafis leidub ka tsükkel $A_1 \to A_4 \to \ldots \to A_{2n-1} \to A_{2n} \to A_1$ pikkusega $2n-2$. Nüüd saame sellele tsüklile rakendada sama arutelu ning teda omakorda 2 võrra lühendada. Nõnda jätkates jõuame lõpuks tsüklini pikkusega 2. (Sisuliselt kasutame siinkohal languse printsiipi, vt jaotis 2).

b) Ülesande tingimused on täidetud näiteks järgmise neljatipulise graafi puhul, aga tüdruk $T_1$ ei meeldi poisile $P_2$ ega tüdruk $T_2$ poisile $P_1$:


3.8 Vastus: b) Sobivad kõik paarisarvud $n \geqslant 4$.

a) Vaatleme suvalist häbelikku peolviibijat. Ühest küljest peab tal ülesande tingimuste põhjal olema vähemalt kolm häbelikku vestluspartnerit, teisest küljest aga vestleb ta tänu häbelikkusele peol kokku üldse mitte rohkem kui kolme erineva inimesega. Niisiis vestleb iga häbelik peolviibija täpselt kolme partneriga, kes on ka ise kõik häbelikud. Järelikult ei saa peol mittehäbelikke külalisi olla, sest neile ei jätku häbelikke vestluskaaslasi.

b) Vaatleme graafi, mille tippudeks on peokülalised, ja tõmbame serva kahe tipu vahele parajasti siis, kui vastavad inimesed omavahel vestlesid. Selle graafi iga tipu aste on 3 ning kuna 3 on paaritu arv, peab teoreemi 3.1 järgi tippe olema paarisarv. $n = 2$ ilmselt ei sobi, aga paarisarvude $n \geqslant 4$ korral saab anda järgneva konstruktsiooni. Asetame peokülalised korrapärase $n$-nurga tippudesse ning laseme igaühel vestelda oma kahe naabriga ja selle külalisega, kes asub $n$-nurga vastastipus.

3.9 Moodustame graafi, mille tippudeks valime ruudustiku ruudud, ning ühendame kaks tippu servaga, kui neile vastavaid ruute katab üks kaart. (Erijuhul kui kaks kaarti katab samu ruute, tõmbame graafi vastavate tippude vahele kaks serva.) Ülesande tingimuste põhjal on selle graafi iga tipu aste 2.

Hakkame moodustatud graafi läbi käima. Alustuseks valime graafi suvalise tipu, millest väljub mõni serv, ning liigume mööda seda serva naabertipuni. Kuna naabertipu aste on 2, peab sealt väljuma veel mõni serv – selle valimegi järgmiseks. Igas tipus saame niimoodi edasiliikumiseks valida serva, mida mööda me tippu ei saabunud.

Kuna ruudustikus on lõplik arv ruute[2], peame oma teel mingil hetkel jõudma tagasi tippu, kus oleme juba olnud. Kuna ka selle tipu aste on 2, saab tegemist olla ainult tipuga, millest lähtuvatest servadest oleme ära kasutanud täpselt ühe. Niisugust tingimust rahuldab ainult lähtetipp. Järelikult peame oma teel algusesse tagasi jõudma nii, et läbitud servadest tekib kinnine tsükkel.

[2] Rangelt võttes pole ruudustiku lõplikkuse nõuet ülesande tekstis kirjas. Nõutakse küll, et ükski kaart ei ulatuks üle ruudustiku ääre, aga see nõue on triviaalselt täidetud ka siis, kui ruudustikul äärt üldse polegi. Ilmselt on ülesande autorid lähtunud vaikivast eeldusest, et eraldi tuleks ära märkida olukord, kui vaadeldav ruudustik oleks *lõpmatu*. Lõpmatutes graafides pole matemaatika seisukohast midagi imelikku ja ülesande väide kehtib tegelikult ka lõpmatu ruudustiku jaoks, lihtsalt tõestuses tuleb vastava juhuga eraldi tegeleda. Proovi, kas saad sellega iseseisvalt hakkama!

Väidame, et sellises tsüklis peab olema paarisarv servi. Värvides ruudud malekorras mustaks ja valgeks näeme, et igal sammul astume mustalt ruudult valgele või vastupidi[3]. Tagasi algruudule jõudes peab värvivahetusi olema toimunud paarisarvul, niisiis peab paaris olema ka tsüklisse kuuluvate servade arv. Nüüd võime selles tsüklis valida iga teise serva ning neile vastavad kaardid ruudustikult eemaldada. Tulemusena jääb iga tsüklis läbitud ruut kaetuks täpselt ühe kaardiga.

Kui pärast ühe tsükli läbivaatamist jääb ruudustikku veel kahekordselt kaetud ruute, valime neist mõne uueks algtipuks ja kordame sama arutelu. Niimoodi jätkame, kuni topelt kaetud ruudud lõpuks otsa saavad. Kuna ruudustik on lõplik, peab selline olukord ühel hetkel kindlasti tekkima.

[3] Värvimiste meetodi kohta saab pikemalt lugeda jaotisest 6.