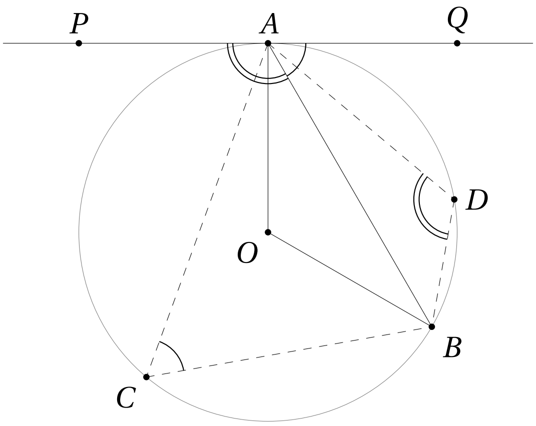
29. Puutuja ja kõõlu teoreem

Ringjoones tekkivate nurkade uurimisel on sageli kasu järgmisest tulemusest (mida tuntakse ka *puutuja ja lõikaja teoreemi* nime all).

> **Teoreem 29.1** (Puutuja ja kõõlu teoreem) Ringjoone kõõlu ühte otspunkti läbiv sirge on selle ringjoone puutujaks parajasti siis, kui nurk kõõlu ja sirge vahel võrdub kõõlule toetuva piirdenurga suurusega.

Tõestus. Olgu ringjoonel keskpunktiga O antud kõõl AB. Vaatleme kõigepealt ringjoonele punktis A tõmmatud puutujat PQ, vt joonist.

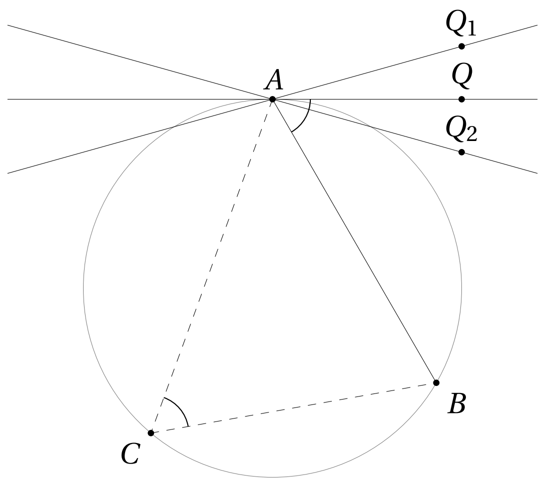


Paneme tähele, et sirge PQ ja kõõlu AB vahele moodustub tegelikult kaks nurka ja sama moodi toetub kõõlule AB kaks piirdenurka, üks neist mitte rohkem kui 90° ja teine mitte vähem kui 90°. Olgu C punkt pikemal ning D punkt lühemal kaarel AB. Näitame joonise tähistustes, et $\angle BAQ = \angle BCA$; siis järeldub teise paari nurkade jaoks siit muuhulgas, et $\angle PAB = 180^\circ - \angle BAQ = 180^\circ - \angle BCA = \angle ADB$.

Kuna puutepunktist tõmmatud raadius on puutujaga risti, kehtib $\angle OAQ = 90^\circ$. Järelikult $\angle BAQ = 90^\circ - \angle OAB$. Kolmnurk OAB on võrdhaarne, seega $\angle BOA = 180^\circ - 2\angle OAB$. Piirdenurk moodustab aga poole vastavast kesknurgast, järelikult $\angle BCA = \frac{1}{2}\angle BOA = 90^\circ - \angle OAB = \angle BAQ$, mida oligi tarvis tõestada.

Oletame nüüd vastupidi, et $\angle BCA = \angle BAQ$, ja näitame, et sirge AQ on ringjoone puutujaks punktis A.

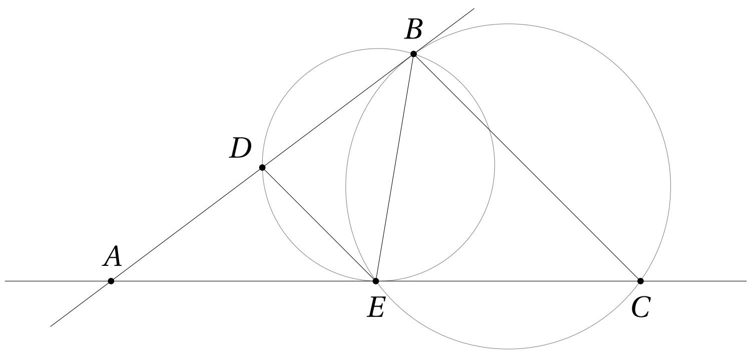
Teoreemi esimese poole tõestuse põhjal teame, et kui AQ on puutuja, siis $\angle BAQ = \angle BCA$ (vt joonist). Vaadeldes mõnda teist punkti A läbivat sirge AQ_*, mis ei ole puutuja, saame $\angle BAQ \neq \angle BAQ_*$ ja järelikult ka $\angle BCA \neq \angle BAQ_*$. Kokkuvõtteks saab võrdus $\angle BAQ = \angle BCA$ kehtida ainult siis, kui AQ on antud ringjoone puutuja punktis A.



□

Ülesanne 29.1 (Lõppvoor 2021, 10. klass) Kolmnurgas ABC on D ja E vastavalt külgede AB ja AC keskpunktid. Tõesta, et sirge AB puutub kolmnurga BEC ümberringjoont parajasti siis, kui sirge AC puutub kolmnurga BED ümberringjoont.

Lahendus. Vastavalt puutuja ja kõõlu teoreemile puutub sirge AB kolmnurega BEC ümberringjoont punktis B parajasti siis, kui $\angle ABE = \angle BCA$. Sama moodi puutub sirge AC kolmnurga BED ümberringjoont punktis E parajasti siis, kui $\angle ABE = \angle DEA$. Kuna DE on kolmnurga ABC kesklõik, siis $DE \parallel BC$ ja $\angle BCA = \angle DEA$. Järelikult kehtivad võrdused $\angle ABE = \angle BCA$ ja $\angle ABE = \angle DEA$ samaaegselt, mis põhjendab ülesande väite.



Selle ülesande väite teise võimaliku tõestuse annab ülesanne 30.3.

Ülesanded

Ülesanne 29.2 (Piirkonnavoor 2004, 9. klass) Kaks ringjoont läbivad teineteise keskpunkte O_1 ja O_2 ning lõikuvad punktides A ja B. Tõesta, et sirge O_1B on kolmnurga O_1O_2A ümberringjoone puutuja.

Ülesanne 29.3 (Sügisene lahtine võistlus 2013, vanem rühm) Tasandil on antud kolmnurk ABC. Ringjoon c_A puutub sirget AC punktis C ja läbib punkti B. Ringjoon c_B puutub sirget BC punktis C ja läbib punkti A. Ringjoonte c_A ja c_B teine lõikepunkt S on kolmnurga ABC siseringjoone keskpunkt. Tõesta, et kolmnurk ABC on võrdkülgne.

Ülesanne 29.4 (Sügisene lahtine võistlus 2015, vanem rühm) Kolmnurga ABC tipust A tõmmatud nurgapoolitaja lõikab külge BC punktis D. Punkti A läbiv ringjoon c puutub lõiku BC punktis D. Tõesta, et kolmnurga ABC ümberringjoon puutub ringjoont c punktis A.

Ülesanne 29.5 (Talvine lahtine võistlus 2020, vanem rühm) Kolmnurga ABC ümberringjoone puutujad punktides B ja C lõikuvad punktis D. Kolmnurga BCD ümberringjoon lõikab sirgeid AB ja AC teistkordselt vastavalt punktides K ja L. Tõesta, et sirge AD poolitab lõigu KL.

Ülesanne 29.6 (Lõppvoor 2007, 10. klass) Ringjoonele c keskpunktiga O on tõmmatud ristuvad raadiused OA ja OB. Nende raadiustega piiratud sektori sisse joonestatakse ringjoon, mis puutub raadiusi vastavalt punktides C ja D ning ringjoont c punktis Q. Leia nurga AQC suurus.

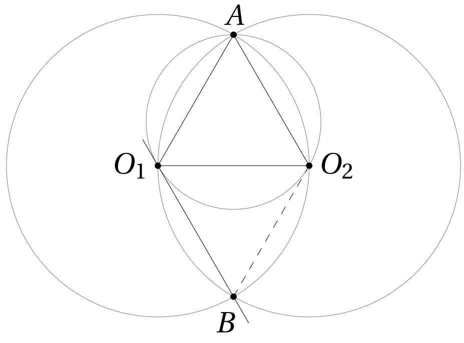
Ülesanne 29.7 (Lõppvoor 2021, 11. klass) Kolmnurga ABC tipu A juures oleva nurga poolitaja lõikub küljega BC punktis D. Kolmnurga ABC ümberringjoonele punktis A tõmmatud puutuja lõikub sirgega BC punktis K. Tõesta, et $|KA| = |KD|$.

Ülesanne 29.8 (Sügisene lahtine võistlus 2009, vanem rühm) Ringjoon c läbib võrdhaarse kolmnurga ABC tippe A ja B ning puutub sirget AC. Tõesta, et ringjoon c läbib kolmnurga ABC ümberringjoone keskpunkti, siseringjoone keskpunkti või kõrguste lõikepunkti.

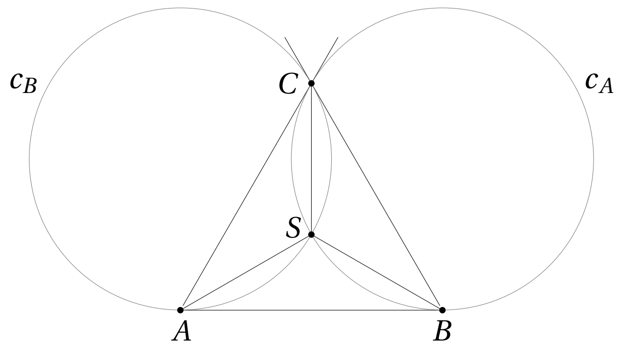
Vaata ka ülesandeid 26.11, 31.15, 30.9 ja 30.11.

Lahendused

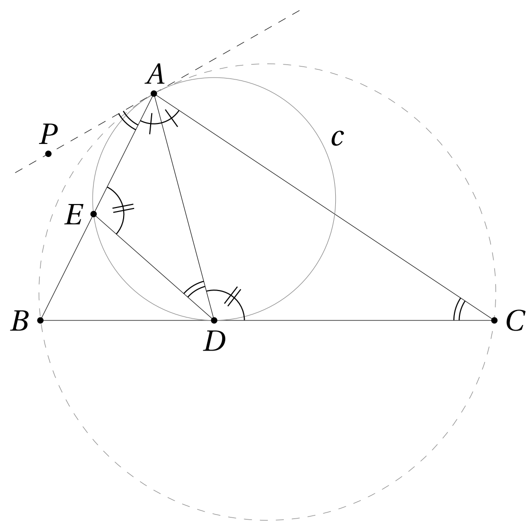
29.2 Kolmnurgad O_1O_2A ja O_1O_2B on võrdkülgsed, järelikult $\angle BO_1O_2 = 60^\circ = \angle O_1AO_2$. Puutuja ja kõõlu teoreemi põhjal järeldub sellest, et BO_1 on kolmnurga O_1O_2A ümberringjoone puutuja.



29.3 Kuna ringjoon c_A läbib punkte S ja B ning puutub sirget AC punktis C, saame puutuja ja kõõlu teoreemist $\angle ACS = \angle CBS$. Sama moodi tuleb ringjoonest c_B ja puutujast BC võrdus $\angle SCB = \angle SAC$. Kuna CS on kolmnurga ABC nurgapoolitaja, siis $\angle ACS = \angle SBC$. Järelikult on nurgad ACS, SAC, SCB ja CBS kõik võrdsed. Kuna ka AS ja BC on kolmnurga ABC nurgapoolitajad, siis on nendega võrdsed ka nurgad SBA ja BAS. Kokkuvõttes on kolmnurga ABC kõik nurgad võrdsed, millest järeldub ülesande väide.

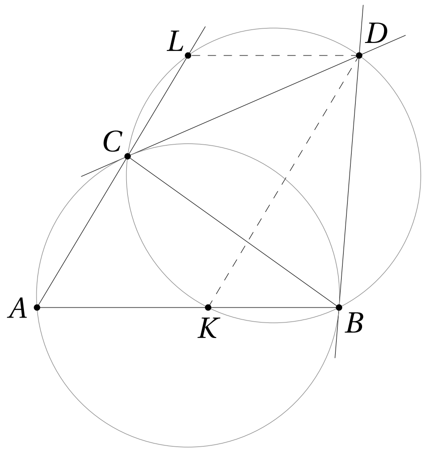


29.4 Peame tõestama, et ringjoonele c punktis A tõmmatud puutuja PA on ühtlasi ka kolmnurga ABC ümberringjoone puutuja (vt joonist).



Olgu E külje AB teine lõikepunkt ringjoonega c (st $E \neq A$). Kuna sirge BC on ringjoone c puutuja punktis D, saame puutuja ja kõõlu teoreemist $\angle AED = \angle ADC$. Kuna AD on nurga BAC poolitaja, siis saame ka $\angle EAD = \angle DAC$. Järelikult on kolmnurgad AED ja ADC sarnased, millest omakorda saame $\angle ADE = \angle ACD = \angle ACB$. Et sirge PA on ringjoone c puutuja punktis A, kehtib puutuja ja kõõlu teoreemi tõttu ka võrdus $\angle PAE = \angle ADE$. Kokkuvõttes saame $\angle PAB = \angle PAE = \angle ACB$, millest järeldubki, et PA on ka kolmnurga ABC ümberringjoone puutuja.

29.5 Katse vaadelda lõikude AD ja KL lõikepunkti M ning tõestada otse, et $|KM| = |ML|$, ei vii eriti kaugele. Tuleb kasutada kaudseid meetodeid. Näiteks aitab lahenduseni jõuda hea joonis, mille pealt saab teha hüpoteesi, et $AKDL$ on rööpkülik. Ühest küljest järelduks sellest ülesande väide, teisest küljest aga piisab rööpkülikuks olemise tõestamiseks vastavate lõikude paralleelsuse tõestamisest. Paralleelsust omakorda saab tõestada nurkade abil, nurkade kohta aga on lootust kasulikke seoseid leida, sest ülesandes on antud kaks ringjoont.



Kolmnurga BCD ümberringjoon võib sirgeid AB ja AC lõigata vastavate lõikude sisepiirkonnas või sellest väljas. Joonisel on kujutatud olukord, kus realiseeruvad mõlemad võimalused ja tõestus erineb neil juhtudel veidi.

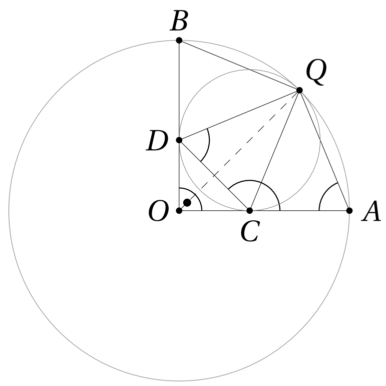
Vaatleme kõigepealt juhtu, kus punkt K asub lõigul AB. Puutuja ja kõõlu teoreemist teame, et $\angle BAC = \angle BCD$. Kuna punktid B, K, C, D asuvad ühel ringjoonel, saame lisaks $\angle BCD = \angle BKD$. Järelikult $\angle BAC = \angle BKD$, mistõttu $AC \parallel KD$.

Teiseks vaatleme juhtu, kus punkt L asub kiirel AC, aga väljaspool lõiku AC. Puutuja ja kõõlu teoreemist saame $\angle CAB = \angle CBD$. Nüüd aga järeldub punktide C, B, D, L ühel ringjoonel asumisest võrdus $\angle CBD + \angle CLD = 180°$. Järelikult ka $\angle CAB + \angle CLD = 180°$, mistõttu $AB \parallel LD$.

Tõestus on analoogiline, kui lõikepunktid K ja L asuvad mõlemad vastavate külgede sisepiirkonnas või mõlemad külgede pikendustel.

29.6 Vastus: 45°.

Teeme joonise.



Ülesandepüstitus on ilmselt sümmeetriline nurga AOB poolitaja suhtes. Muuhulgas asub sellel poolitajal ka punkt Q, st $\angle QOA = \frac{90°}{2} = 45°$. Kolmnurk QOA on võrdhaarne, niisiis $\angle CAQ = \angle OAQ = \frac{180° - 45°}{2} = 67{,}5°$.

Uurime nurka QCA. Puutuja ja kõõlu teoreemi põhjal teame, et $\angle QCA = \angle QDC$. Teisest küljest tänu sümmeetriale $\angle QDC = \angle DCQ$, mistõttu $\angle DCQ = \angle QCA$.

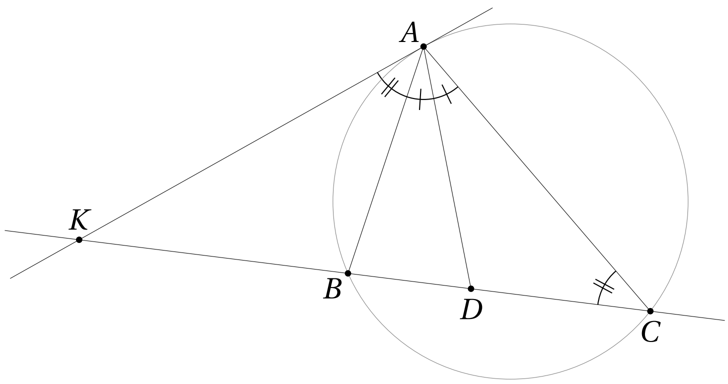
Kuna OCD on täisnurkne võrdhaarne kolmnurk, saame $\angle OCD = 45°$ ja

$$\angle QCA = \frac{\angle DCA}{2} = \frac{180° - \angle OCD}{2} = \frac{180° - 45°}{2} = 67{,}5°\,.$$

Kokkuvõttes

$$\angle AQC = 180^\circ - \angle QCA - \angle CAQ = 180^\circ - 67,5^\circ - 67,5^\circ = 45^\circ .$$

29.7 Eeldame üldisust kitsendamata, et punkt B jääb punktide K ja C vahele (vt joonist). Vastasel juhul võime punktid B ja C omavahel ära vahetada.



Tõestame, et $\angle KAD = \angle ADK$.

Kuna AD on nurga BAC poolitaja, siis $\angle BAD = \angle DAC$. Lisaks teame puutuja ja kõõlu teoreemist, et $\angle KAB = \angle ACB = \angle ACD$. Järelikult

$$\angle KAD = \angle KAB + \angle BAD = \angle ACD + \angle DAC .$$

Kolmnurgast ACD saame

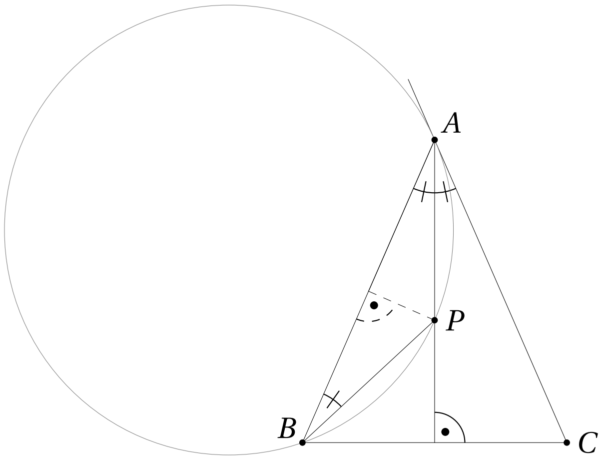
$$\angle ACD + \angle DAC = 180^\circ - \angle CDA = \angle ADK .$$

Niisiis $\angle KAD = \angle ADK$, millest omakorda järeldub $|KA| = |KD|$.

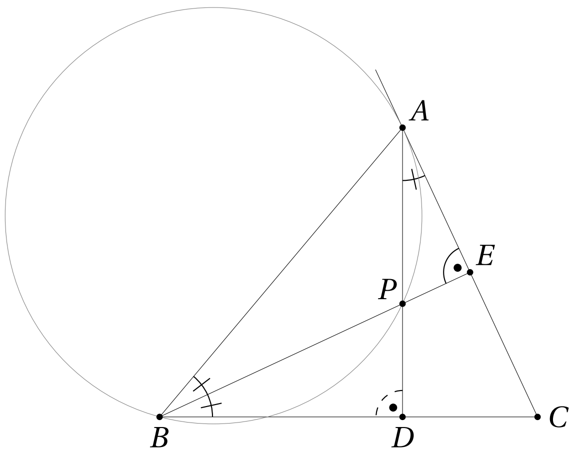
29.8 Kuna ülesande tekst ei määra ära, millised kaks antud kolmnurga külge täpselt võrdsed on, tuleb lahenduses kõik võimalikud juhud eraldi läbi vaadata. Saame kolm sisuliselt sõltumatut alamülesannet, mis sobib selles mõttes hästi, et ka ülesande väide annab kolm erinevat võimalust, mida tõestada.

Lahendusstrateegia on kõigil kolmel juhul sama. Võrdhaarse kolmnurga tipunurgast tõmmatud kõrgus on ühtlasi selle nurga poolitaja ja vastaskülje keskristsirge. Leiame selle sirge lõikepunkti ülesande ringjoonega ning tõestame, et lõikepunkt asub vastavalt veel mõnel kõrgusel, nurgapoolitajal või külje keskristsirgel. Sellest omakorda järeldub vastava alamülesande väide.

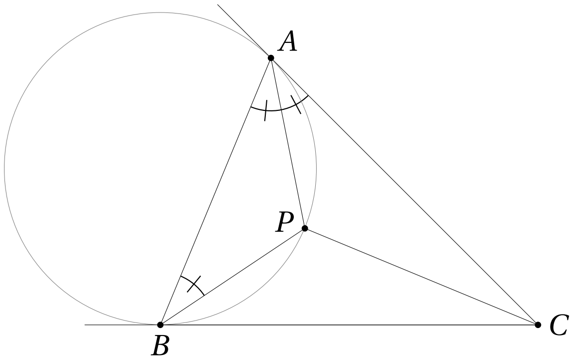
Olgu kõigepealt $|AB| = |AC|$ ning olgu P tipust A tõmmatud kõrguse/nurgapoolitaja teine lõikepunkt antud ringjoonega. Siis $\angle BAP = \angle PAC$. Teisest küljest on PAC nurk kõõlu AP ja punktist A ringjoonele tõmmatud puutuja vahel. Puutuja ja kõõlu teoreemi põhjal saame $\angle PAC = \angle PBA$, järelikult $\angle BAP = \angle PBA$ ja kolmnurk ABP on võrdhaarne. Niisiis läbib lõigu AB keskristsirge punkti P, mistõttu P on kolmnurga ABC ümberringjoone keskpunkt.



Teiseks vaatleme juhtu $|AB| = |BC|$ ja olgu P tipust B tõmmatud kõrguse/nurgapoolitaja teine lõikepunkt antud ringjoonega. Olgu E selle kõrguse aluspunkt ning lõikugu sirged AP ja BC punktis D. Kuna BP on nurgapoolitaja, siis $\angle DBP = \angle PBA$. Puutuja ja kõõlu teoreemist saame lisaks $\angle PBA = \angle PAE$, seega $\angle DBP = \angle PAE$. Nurgad EPA ja BPD on tippnurkadena võrdsed, järelikult on kolmnurgad AEP ja BDP tunnuse NN alusel sarnased. Niisiis ka $\angle BDP = 90°$, mistõttu P on kolmnurga ABC kõrguste lõikepunkt.



Kolmandaks vaatleme juhtu $|AC| = |BC|$ ja olgu P tipust C tõmmatud kõrguse/nurgapoolitaja niisugune lõikepunkt antud ringjoonega, et punktid C ja P asuvad sirgest AB samal pool. Paneme tähele, et ka CB on ülesande ringjoone puutujalõiguks, ehk teisisõnu see ringjoon puutub sirget BC punktis B. Järelikult on punktid A ja B sirge CP suhtes sümmeetrilised ja kolmnurk ABP on võrdhaarne nii, et $\angle PBA = \angle BAP$. Puutuja ja kõõlu teoreemist saame lisaks $\angle PBA = \angle PAC$, seega $\angle BAP = \angle PAC$. Niisiis on P kolmnurga ABC nurgapoolitajate lõikepunkt ehk siseringjoone keskpunkt.


A
P
B
C