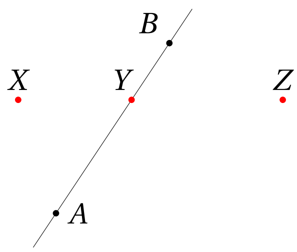
29. Kolm punkti ühel sirgel

Sugugi mitte suvalised kolm tasandi punkti ei asu ühel sirgel, seega on tegemist huvitava omadusega, mida tasub eraldi uurida.

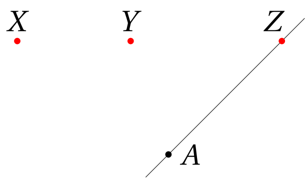
Väga sagedane meetod kolme punkti ühel sirgel asumise tõestamiseks on leida antud geomeetrilisest konstruktsioonist üks n-ö tugisirge ning uurida moodustuvaid nurki.

Näiteks kui konstruktsioonis



on teada, et punkt Y asub sirgel AB, saame AB valida tugisirgeks. Kui meil siis õnnestub näidata, et $\angle AYX = \angle BYZ$, olemegi tõestanud, et punktid X, Y ja Z asuvad ühel sirgel. Samuti piisab, kui näitame, et $\angle AYX + \angle AYZ = 180^\circ$.

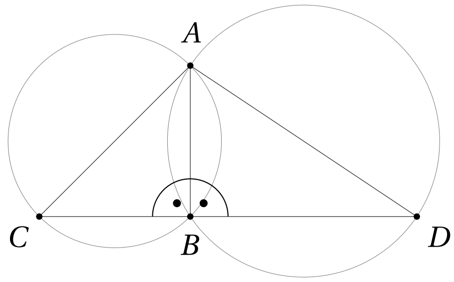
Võttes konstruktsioonis

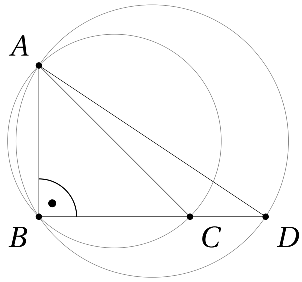


tugisirgeks AZ ja tõestades, et $\angle AZX = \angle AZY$, saame sama moodi järeldada, et punktid X, Y ja Z asuvad ühel sirgel.

Ülesanne 29.1 (Piirkonnavoor 1996, 10. klass) Kaks ringjoont lõikuvad punktides A ja B. Olgu punktist A neile ringjoontele tõmmatud diameetrid vastavalt AC ja AD. Tõesta, et punktid B, C ja D asuvad ühel sirgel.

Lahendus. Selle ülesande “konks” on aru saada, et tekstile vastab kaks erinevat pilti ning et tõestus tuleb anda mõlema jaoks.





Mõlemal juhul sobib tugisirgeks AB.

Kuna AC ja AD on diameetrid, siis Thalese teoreemi põhjal teame, et $\angle ABC = \angle ABD = 90^\circ$. Vasakpoolsel joonisel asuvad punktid B, C ja D ühel sirgel tänu sellele, et $\angle ABC + \angle ABD = 180^\circ$, parempoolsel joonisel aga tänu sellele, et $\angle ABC = \angle ABD$.

Ülesanded

Ülesanne 29.2 (Lõppvoor 1998, 10. klass) Olgu C ja D kaks erinevat punkti poolringjoonel diameetriga AB. Olgu E sirgete AC ja BD lõikepunkt, F sirgete AD ja BC lõikepunkt ning X, Y ja Z vastavalt lõikude AB, CD ja EF keskpunktid. Tõesta, et punktid X, Y ja Z paiknevad ühel sirgel.

Ülesanne 29.3 (Piirkonnavoor 2008, 12. klass) Rööpküliku $ABCD$ tipust A tõmmatakse kaks kiirt, mis jaotavad rööpküliku diagonaali BD kolmeks võrdseks osaks. Tõesta, et need kiired poolitavad rööpküliku küljed BC ja CD.

Ülesanne 29.4 (Talvine lahtine võistlus 2007, vanem rühm) Rööpkülikusse $ABCD$ on joonestatud kaks ringjoont nii, et esimene ringjoon puutub külgi AB ja AD ning teine ringjoon puutub külgi CB ja CD. Ringjooned puutuvad teineteist väliselt punktis K. Tõesta, et punkt K asub rööpküliku diagonaalil AC.

Ülesanne 29.5 (2000 lõppvoor, 11. klass) Olgu $PQRS$ kõõlnelinurk, milles $\angle PSR = 90^\circ$, ning olgu punktist Q sirgetele PR ja PS tõmmatud ristlõikude aluspunktid vastavalt H ja K. Tõesta, et sirge HK läbib lõigu SQ keskpunkti.

Ülesanne 29.6 (Talvine lahtine võistlus 2021, noorem rühm) Kolmnurga ABC suurim nurk on tipu C juures. Olgu ρ ringjoon keskpunktiga A ja raadiusega AC ning σ ringjoon keskpunktiga B ja raadiusega BC. Ringjoon σ lõikab kolmnurga ABC ümberringjoont punktis D ning ringjoont ρ punktis F ($D \neq C$, $F \neq C$). Tõesta, et punktid A, D ja F asuvad ühel sirgel.

Ülesanne 29.7 (Sügisene lahtine võistlus 2023, noorem rühm) Lõigul BC asub punkt D ($D \neq B$, $D \neq C$), väljaspool sirget BC aga punkt A. Punktid P ja Q valitakse nii, et $ABPD$ ja $ACQD$ on rööpkülikud (tippudega antud järjestuses). Kolmnurkade BDP ja CDQ ümberringjooned lõikuvad punktis R ($D \neq R$). Tõesta, et punktid P, Q ja R asuvad ühel sirgel.

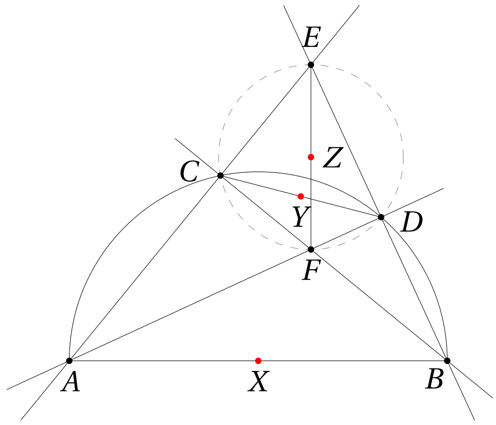
Ülesanne 29.8 (Talvine lahtine võistlus 2016, vanem rühm) Kolmnurga ABC tipu C juures oleva välisnurga poolitaja lõikub tipu B juures oleva sisenurga poolitajaga punktis K. Kolmnurga BCK ümberringjoonele tõmmatakse diameeter, mille üks otspunkt on K. Tõesta, et A asub sel diameetril.

Ülesanne 29.9 (Lõppvoor 2019, 11. klass) Võrdhaarses kolmnurgas ABC on tipu B juures nürinurk. Külje BC keskristsirge lõikab sirgeid AC ja AB vastavalt punktides K ja M. Olgu A' punkt, mis on sümmeetriline punktiga A sirge BK suhtes. Tõesta, et punktid A', M ja C on ühel sirgel.

Ülesanne 29.10 (Lõppvoor 2013, 11. klass) Tasandil on antud kumer nelinurk $ABCD$, milles $\angle DAB + \angle ABC < 180^\circ$. Olgu E selline nelinurga tippudest erinev punkt lõigul AB, et kolmnurkade AED ja BEC ümberringjooned lõikuvad nelinurga $ABCD$ sees punktis F. Punkt G võetakse nii, et $\angle DCG = \angle DAB$, $\angle CDG = \angle ABC$ ja kolmnurk CDG asub väljaspool nelinurka $ABCD$. Tõesta, et punktid E, F, G on ühel sirgel.

Lahendused

29.2 Teeme joonise.

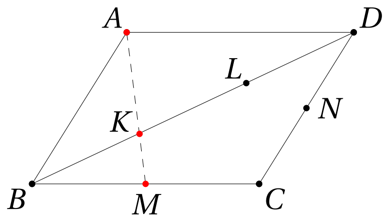


Valime tugisirgeks CD. Kuna lõik CD on antud poolringjoone kõõl, läbib tema keskristsirge poolringjoone keskpunkti X; loomulikutl on samal keskristsirgel ka lõigu CD keskpunkt Y. Niisiis jääb üle tõestada, et punkt Z asub samuti lõigu CD keskristsirgel.

Selleks paneme tähele, et punktid C, E, D, F asuvad ühel ringjoonel diameetriga EF. Tõepoolest, kuna Thalese teoreemi põhjal $\angle ACB = 90^\circ$ ja $\angle ADB = 90^\circ$, siis ka $\angle FCE = 90^\circ$ ja $\angle EDF = 90^\circ$. Niisiis on $CEDF$ kõõlnelinurk, CD selle ümberringjoone kõõl ja Z selle ümberringjoone diameetri EF keskpunkt. Järelikult asub ka Z lõigu CD keskristsirgel.

Tegelikult vastab ülesande tekstile ka teine võimalik joonis, kui C ja D on kaarel AB teises järjekorras. On lihtne näha, et sel juhul vahetavad ainult punktid E ja F oma rollid, kogu tõestus jääb aga samasuguseks.

29.3 Võtame rööpküliku diagonaalil BD punktid K ja L nii, et $|BK| = |KL| = |LD|$, ning vastavalt külgede BC ja CD keskpunktid M ja N (vt joonist).



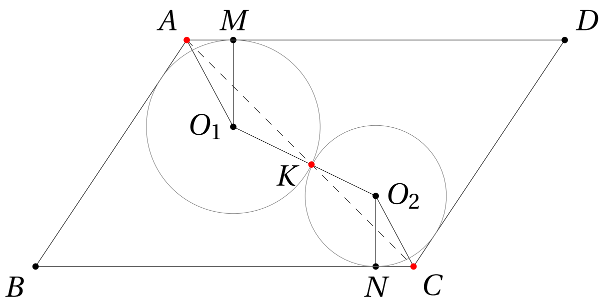
Näitame, et punktid A, K ja M asuvad ühel sirgel; punktide A, L ja N jaoks on tõestus analoogne.

Tugisirgeks on loomulik valida BD. Siis oleks vaja tõestada, et $\angle BKM = \angle DKA$. Uurime kolmnurki BKM ja DKA ning paneme tähele, et nad on sarnased. Tõepoolest, ülesande tingimuste põhjal

$$\frac{|AD|}{|MB|} = 2 = \frac{|DK|}{|BK|},$$

lisaks $\angle ADK = \angle MBK$. Järelikult saame KNK tunnuse põhjal $\triangle BKM \sim \triangle DKA$, millest järeldubki $\angle BKM = \angle DKA$.

29.4 Me peame tõestama, et punktid A, K ja C asuvad ühel sirgel. Teeme joonise.



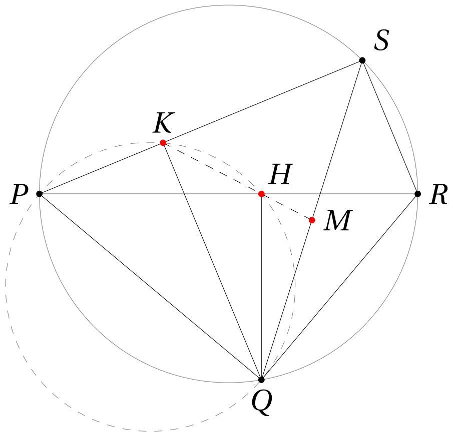
Paneme tähele, et ringjoonte puutepunkt K asub nende keskpunkte O_1 ja O_2 ühendaval sirgel. Seega on loomulik võtta tugisirgeks O_1O_2, misjärel piisab tõestada, et $\angle AKO_1 = \angle CKO_2$. Selleks näitame, et kolmnurgad AKO_1 ja CKO_2 on sarnased.

Sirged AO_1 ja CO_2 on rööpküliku nurgapoolitajad ning järelikult paralleelsed. Samuti on paralleelsed sirged KO_1 ja KO_2 (tegelikult on tegemist sama sirgega). Järelikult $\angle AO_1K = \angle CO_2K$. Olgu vaadeldavate ringjoonte raadiused vastavalt r_1 ja r_2, siis saame $\frac{|O_1K|}{|O_2K|} = \frac{r_1}{r_2}$.

Jääb veel tõestada, et $\frac{|AO_1|}{|CO_2|} = \frac{r_1}{r_2}$. Olgu M ja N punktid, kus antud ringjooned puutuvad vastavalt külgi AD ja BC. Näitame, et $\triangle AMO_1 \sim \triangle CNO_2$. Tõepoolest, $\angle AMO_1 = 90^\circ = \angle CNO_2$ ja $\angle O_1AM = \frac{1}{2}\angle BAM = \frac{1}{2}\angle CDB = \angle O_2CN$. Järelikult $\triangle AMO_1 \sim \triangle CNO_2$, mistõttu $\frac{|AO_1|}{|CO_2|} = \frac{|MO_1|}{|NO_2|} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{|O_1K|}{|O_2K|}$. Kokkuvõttes saamegi $\triangle AKO_1 \sim \triangle CKO_2$, kust omakorda $\angle AKO_1 = \angle CKO_2$, mida oligi tarvis.

Selle ülesande teise võimaliku lahenduse leiab lugeja ülesandest 34.2.

29.5 Kuna $\angle PKQ = 90^\circ = \angle PHQ$, siis asuvad ka punktid P, K, H, Q ühel ringjoonel, vt joonist.



Esimene mõte võtta tugisirgeks PR ei vii otse sihile. Sobivamaks tugisirgeks osutub KQ. Kõõlnelinurkadest $PKHQ$ ja $PQRS$ saame

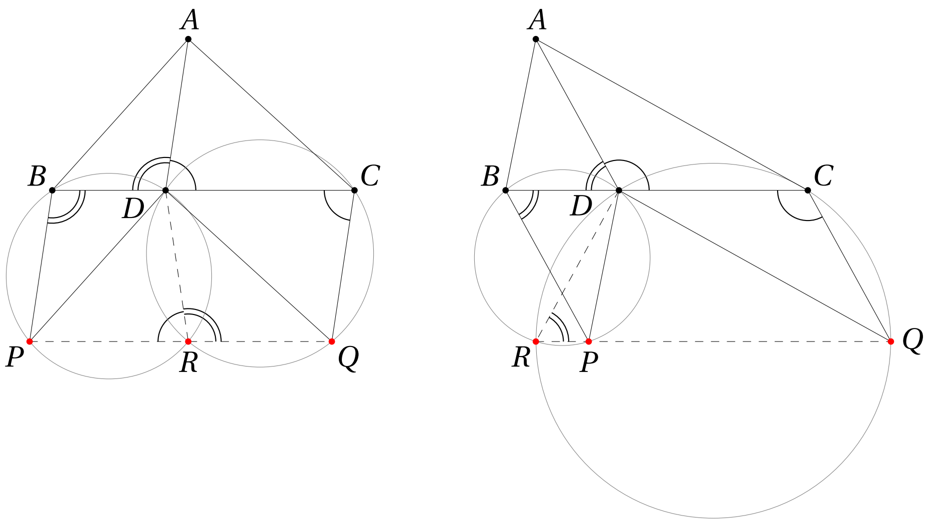
$$\angle QKH = \angle QPH = \angle QPR = \angle QSR\,.$$

Kuna $QK \perp PS$ ja $SR \perp PS$, siis $KQ \parallel SR$, järelikult $\angle QSR = \angle SQK$. Kolmnurk QKS on täisnurkne hüpotenuusiga SQ, niisiis on SQ keskpunkt M kolmnurga QKS ümberringjoone keskpunkt. Järelikult $|MQ| = |MK|$ ehk kolmnurk MQK on võrdhaarne ja

$$\angle SQK = \angle MQK = \angle QKM\,.$$

Kokkuvõttes oleme tõestanud, et $\angle QKH = \angle QKM$, millest järeldubki ülesande väide.

29.7 Selle ülesande lahendamisel on oluline aru saada, et tekkida võib kaks põhimõtteliselt erinevat pilti. Mõlemal juhul on tugisirgeks loomulik valida sirge DR.



Esimesel juhul (vt vasakpoolset joonist) saame $DBPR$ kõõlnelinurksusest, et $\angle PRD = 180^\circ - \angle DBP$. Nurgad DBP ja BDA on põknurkadena võrdsed, niisiis $\angle PRD = 180^\circ - \angle BDA = \angle ADC$. Analoogiliselt saame $CDRQ$ kõõlnelinurksusest, et

$$\angle DRQ = 180^\circ - \angle QCD = 180^\circ - \angle ADC = \angle BDA\,.$$

Kokkuvõtteks

$$\angle PRD + \angle DRQ = \angle ADC + \angle BDA = 180^\circ\,,$$

mistõttu punktid P, R ja Q asuvad ühel sirgel.

Teisel juhul (vt parempoolset joonist) saame, et

$$\angle DRP = \angle DBP = \angle BDA$$

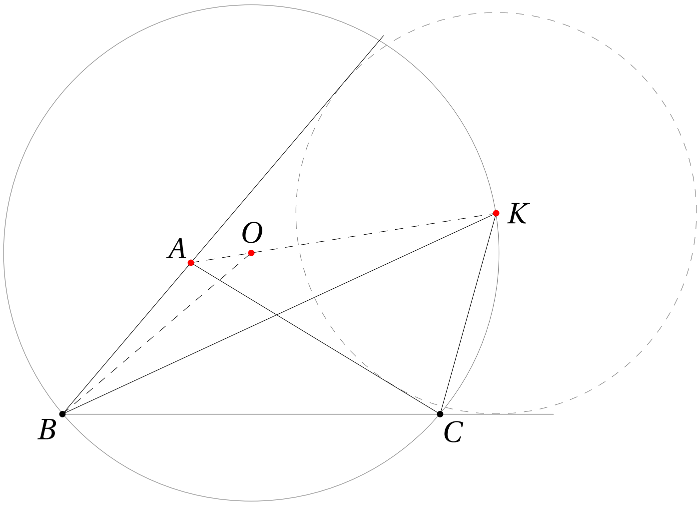
ja

$$\angle DRQ = 180^\circ - \angle QCD = 180^\circ - \angle ADC = \angle BDA,$$

niisiis asuvad punktid P, R ja Q ka nüüd ühel sirgel.

On olemas veel kolmaski võimalik joonis, mille puhul punkt R asub lõigu PQ pikendusel üle punkti Q, aga sellel korral on tõestus analoogiline teise juhu tõestusega.

29.8 Olgu O kolmnurga BCK ümberringjoone keskpunkt. Ülesande väide on siis samaväärne väitega, et punktid A, K ja O asuvad ühel sirgel. Teeme joonise.



Valime tugisirgeks BK ja näitame, et $\angle BKO = \angle BKA$. Selleks piisab, kui suudame nende nurkade suurused mingite teiste nurkade kaudu avaldada ning näidata, et vastavad avaldised tulevad võrdsed.

Milliseid nurki rehkenduse aluseks võtta? Paneme tähele, et kogu joonis on sarnasuse täpsusega ära määratud kolmnurga ABC valikuga, seega on mõistlik otsitavaid nurki avaldada algse kolmnurga nurkade kaudu.

Tähistame siis kolmnurga ABC nurgad vastavalt α, β ja γ.

Kolmnurk BKO on võrdhaarne, järelikult

$$\angle BKO = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle KOB) = \frac{1}{2}(180^\circ - (360^\circ - \angle BOK)) = \frac{1}{2}\angle BOK - 90^\circ.$$

Paneme tähele, et $\angle BOK > 180^\circ$, aga teoreem kesk- ja piirdenurgast kehtib sellegipoolest, niisiis $\frac{1}{2}\angle BOK = \angle BCK$. Kuna CK on tipu C juures asuva välisnurga poolitaja, saame

$$\angle BCK = \angle BCA + \angle ACK = \gamma + \frac{1}{2}(180^\circ - \gamma) = \frac{\gamma}{2} + 90^\circ.$$

Kokkuvõttes

$$\angle BKO = \frac{1}{2}\angle BOK - 90^\circ = \angle BCK - 90^\circ = \frac{\gamma}{2} + 90^\circ - 90^\circ = \frac{\gamma}{2}.$$

Nurga BKA suuruse saame avaldada kolmnurgast BKA. Et BK on nurga ABC poolitaja, siis $\angle ABK = \frac{\beta}{2}$.

Kuna K on ühe välis- ja ühe sisenurga poolitaja lõikepunkt, on ta muuhulgas kolmnurga ABC külge külge AC puutuva külgringjoone keskpunkt (vt joonist). Järelikult on ka AK kolmnurga ABC tipu A juures asuva välisnurga poolitaja, st $\angle KAC = \frac{1}{2}(180^\circ - \alpha)$. Niisiis

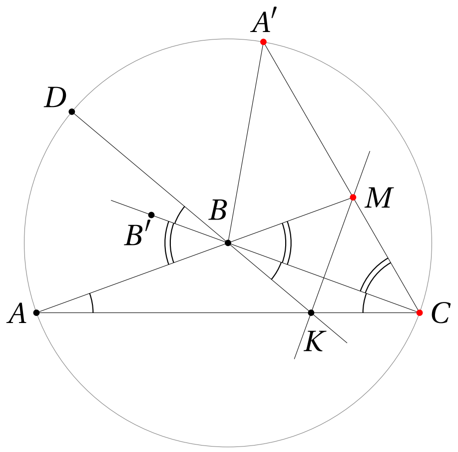
$$\angle KAB = \angle KAC + \angle CAK = \frac{1}{2}(180^\circ - \alpha) + \alpha = \frac{\alpha}{2} + 90^\circ.$$

Kokkuvõttes

$$\angle BKA = 180^\circ - \angle ABK - \angle KAB = 180^\circ - \frac{\beta}{2} - \left(\frac{\alpha}{2} + 90^\circ\right) = \\ = \frac{180^\circ - \alpha - \beta}{2} = \frac{\gamma}{2}$$

ja $\angle BKO = \frac{\gamma}{2} = \angle BKA$, mida oligi tarvis tõestada.

29.9 Võrdhaarses kolmnurgas saab nürinurgaks olla ainult tipunurk, seega $|AB| = |BC|$. Kuna punktid A ja A' on sümmeetrilised sirge BC suhtes, saame lisaks $|AB| = |A'B|$. Niisiis asuvad punktid A, A' ja C ringjoonel keskpunktiga B. Olgu D selle ringjoone lõikepunkt kiirega KB.



Kasutame ikka tugisirge meetodit ja valime tugisirgeks AC. Ülesande lahendamiseks piisab näidata, et $\angle ACM = \angle ACA'$.

Kuidas seda teha? Üks võimalus on valida mingi ühine baasnurk ja siis avaldada nii $\angle ACM$ kui ka $\angle ACA'$ selle suuruse kaudu. Milline nurk baasnurgaks valida?

Paneme tähele, et kogu joonis on (sarnasuse täpsusega) määratud ära algse võrdhaarse kolmnurga valikuga. Võrdhaarse kolmnurga omakorda määrab (jälle sarnasuse täpsusega) ära mõni tema nurkadest. Võtamegi siis baasnurgaks antud võrdhaarse kolmnurga alusnurga ning olgu tema suurus α.

Kuna KM on lõigu BC keskristsirge, on ka kolmnurk BCK võrdhaarne alusnurgaga α, st $\alpha = \angle BAC = \angle ACB = \angle CBK$. Olgu B' suvaline punkt lõigu CB pikendusel üle punkti B. Siis on $B'BD$ ja CBK tippnurgad, mistõttu ka $\angle B'BD = \alpha$.

Nurk ABB' on algse võrdhaarse kolmnurga tipunurga juures asuv välisnurk. Seega

$$\angle ABB' = 180^\circ - \angle CBA = 180^\circ - (180^\circ - \angle BAC - \angle ACB) = 2\alpha\,.$$

Punktid A ja A' on sümmeetrilised sirge BD suhtes, järelikult

$$\angle ABA' = 2\angle ABD = 2\cdot(\angle ABB' + \angle B'BD) = 2\cdot(2\alpha+\alpha) = 6\alpha\,.$$

Nurga ACA' suurus moodustab poole vastavast kesknurgast ABA', millest saame $\angle ACA' = 3\alpha$.

Teisest küljest näeme, et ABD ja KBM on tipunurgad ning et punktid B ja C on sümmeetrilised sirge MK suhtes. Järelikult

$$\angle ACM = \angle KCM = \angle KBM = \angle ABD = \angle ABB' + \angle B'BD = 3\alpha\,.$$

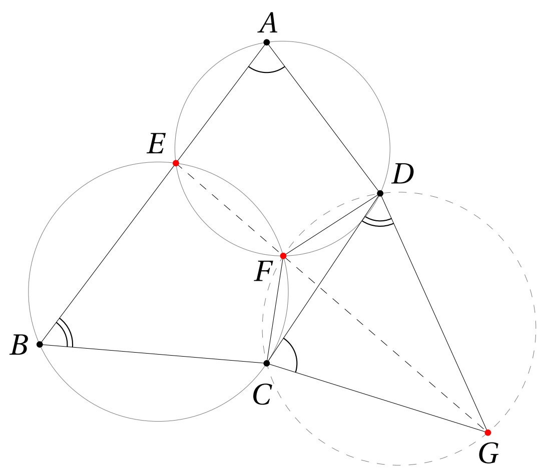
Kokkuvõttes $\angle ACM = 3\alpha = \angle ACA'$, millest järeldub, et punktid A', M ja C asuvad ühel sirgel.

Pärast seda, kui ülesanne on juba lahendatud, näeme et lahendust saab kõvasti lühendada. Nurka α polegi tegelikult vaja vaadelda; piisab, kui leida nurkadevaheliste võrduste ahel

$$\angle ACM = \angle KCM = \angle KBM = \angle ABD = \frac{1}{2}\angle ABA' = \angle ACA'\,.$$

Niisuguse lahenduse raskus seisneb aga selles, et kogu ahelat korraga läbi näha on keeruline. Meetod, mille puhul valitakse kõigepealt baasnurk, mis ülejäänud nurgad siis üheselt ära määrab, on üldisem ning teda on lihtsam süstemaatiliselt rakendada.

29.10 Lahenduse võti on panna tähele, et punktid D, F, C ja G asuvad ühel ringjoonel. Teeme joonise.



Ühest küljest

$$\begin{aligned}\angle DFC &= 360^\circ - \angle CFE - \angle DFE = \\ &= 360^\circ - (180^\circ - \angle ABC) - (180^\circ - \angle DAB) = \\ &= \angle ABC + \angle DAB\,.\end{aligned}$$

Teisest küljest kolmnurgast CGD saame

$$\angle CGD = 180^\circ - \angle DCG - \angle CDG = 180^\circ - \angle DAB - \angle ABC\,.$$

Niisiis $\angle DFC + \angle CGD = 180^\circ$, mistõttu $DFCG$ on kõõlnelinurk.

Nüüd näeme, et $\angle DFG = \angle DCG = \angle DAB$. Samas ka $\angle DFE = 180^\circ - \angle DAB$, mistõttu $\angle DFG + \angle DFE = 180^\circ$. Järelikult asuvad punktid E, F ja G ühel sirgel.

Teine võimalus seda ülesannet lahendada on *konstrueerida* G' kui sirge EF ja kolmnurga DFC ümberringjoone teine lõikepunkt. Siis saame

$$\angle DCG' = \angle DFG' = 180^\circ - \angle DFE = \angle DAB$$

ning analoogiliselt $\angle CFG' = \angle ABC$. Niisiis asub punkt G' samade sirgete lõikepunktis, mis määravad punkti G, järelikult $G = G'$.