

## 28. Neli punkti ühel ringjoonel

Läbi kolme punkti (mis ei asu just ühel sirgel) saab alati tõmmata ringjoone. Neli punkti ei asu ühel ringjoonel sugugi alati, aga kui nad asuvad, siis on see väga võimas omadus, mis geomeetriaülesannete lahendamisel sageli kasulikuks osutub. Selles jaotises tutvumegi põhiliste olukordadega, millal neli punkti ühele ringjoonele satuvad, ja õpime seda omadust ülesannete lahendamisel ära kasutama.

### 28.1 Kõõlnelinurga tarvilikud ja piisavad tingimused

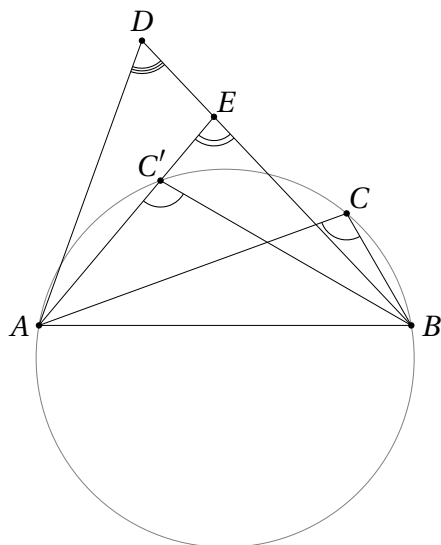
Jaotises 27 tõestasime järelduse 27.1, mille kohaselt samale kõõlule (või kaarele) samalt poolt toetuvad piirdenurgad on võrdsed. Sõnastame ja tõestame nüüd selle väite üldistuse.

**Teoreem 28.1** Vaatleme kolmnurka  $ABC$  ning punkti  $D$ , mis asub sirgest  $AB$  samal pool kui punkt  $C$ . Kehtivad järgmised väited.

1. Punkt  $D$  asub kolmnurga  $ABC$  ümberringjoonest väljaspool parajasti siis, kui  $\angle ACB > \angle ADB$ .
2. Punkt  $D$  asub kolmnurga  $ABC$  ümberringjoonel parajasti siis, kui  $\angle ACB = \angle ADB$ .
3. Punkt  $D$  asub kolmnurga  $ABC$  ümberringjoone sisepiirkonnas parajasti siis, kui  $\angle ACB < \angle ADB$ .

*Tõestus.* Uurime kõigepealt juhtu, kus  $D$  asub kolmnurga  $ABC$  ümberringjoonest väljas. Leiame sellel ringjoonel niisuguse punkti  $C'$ , mis asub kolmnurga  $ABD$  sisepiirkonnas. On lihtne mõista, et selline punkt  $C'$  on alati olemas ning ta jääb sirgest  $AB$  samale poole kui punkt  $C$ . Järelduse 27.1 põhjal teame, et  $\angle ACB = \angle AC'B$ .

Pikendame lõiku  $AC'$  kuni lõikumiseni küljega  $BD$  punktis  $E$ .



Siis

$$\angle AC'B = 180^\circ - \angle BC'E = \angle C'EB + \angle EB'C > \angle C'EB.$$

Sama moodi saame

$$\angle C'EB = 180^\circ - \angle DEA = \angle ADE + \angle EAD > \angle ADE = \angle ADB.$$

Kokkuvõtteks oleme näidanud, et

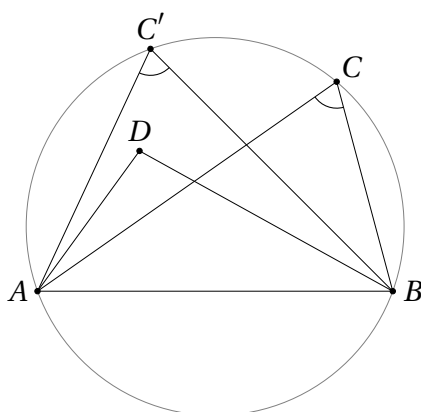
$$\angle ACB = \angle AC'B > \angle C'EB > \angle ADB,$$

mida oligi tarvis.

Teisel juhul, kui punkt  $D$  asub kolmnurga  $ABC$  ümberringjoonel, saame järeldusest 27.1, et  $\angle ACB = \angle ADB$ .

Kolmandaks uurime juhtu, kus punkt  $D$  asub kolmnurga  $ABC$  ümberringjoone sisepiirkonnas. Leiame sellel ringjoonel niisuguse punkti  $C'$ , et  $D$  asuks kolmnurga  $ABC'$  sisepiirkonnas. On lihtne mõista, et selline punkt  $C'$  on alati olemas ning ta jääb sirgest  $AB$  samale poole kui punkt  $C$ . Nüüd saame eelpooltõestatuga analoogiliselt näidata, et

$$\angle ACB = \angle AC'B < \angle ADB.$$



Praeguseks hetkeks oleme tõestanud teoreemi kolme väite tarvilikkuse suuna. Piisavus järeldub tähelepanekust, et iga punkt sirgega  $AB$  eraldatud pooltasandist langeb

täpselt ühte vaadeldud kategooriatest. Näiteks kui kehtib võrratus  $\angle ACB > \angle ADB$ , ei saa punkt  $D$  asuda kolmnurga  $ABC$  ümberringjoonel (sest siis peaks kehtima  $\angle ACB = \angle ADB$ ) ega selle sees (sest siis peaks kehtima  $\angle ACB < \angle ADB$ ). Niisiis peab ta asuma kolmnurga  $ABC$  ümberringjoonest väljas. Sama moodi näitame piisavusesuuna ka teoreemi teiste väidete jaoks.  $\square$

Nüüd oleme valmis sõnastama ja tõestama põhilise tulemuse, mis kirjeldab tarvilikke ja piisavaid tingimusi nelja punkti asumiseks ühel ringjoonel.

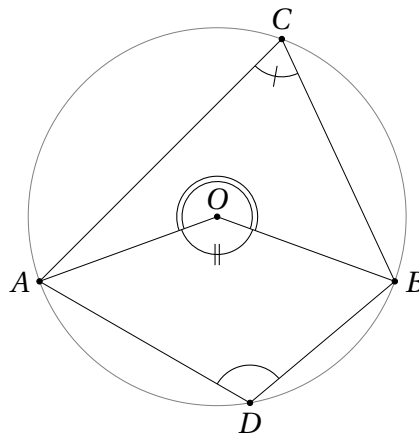
**Teoreem 28.2** Vaatleme tasandil punkte  $A, B, C$  ja  $D$ .

1. Kui  $C$  ja  $D$  jäävad sirgest  $AB$  samale poole, asuvad punktid  $A, B, C$  ja  $D$  ühel ringjoonel parajasti siis, kui  $\angle ACB = \angle ADB$ .
2. Kui  $C$  ja  $D$  jäävad sirgest  $AB$  erinevale poole, asuvad punktid  $A, B, C$  ja  $D$  ühel ringjoonel parajasti siis, kui  $\angle ACB + \angle ADB = 180^\circ$ .

*Tõestus.* 1. Tegemist on teoreemis 28.1 tõestatud 2. punkti ümbersõnastusega.

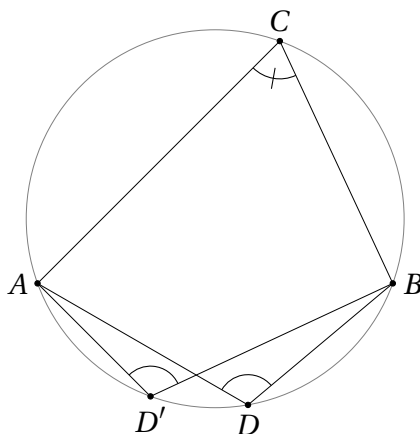
2.  $\Rightarrow$  Asugu punktid  $A, B, C$  ja  $D$  ühel ringjoonel keskpunktiga  $O$ . Kesk- ja piirdenurga omadusest saame

$$\angle ACB + \angle ADB = \frac{1}{2}\angle AOB + \frac{1}{2}\angle BOA = \frac{1}{2}(\angle AOB + \angle BOA) = \frac{1}{2} \cdot 360^\circ = 180^\circ.$$



$\Leftarrow$  Eeldame, et kehtib võrdus  $\angle ACB + \angle ADB = 180^\circ$ . Joonestame kolmnurgale  $ABC$  ümberringjoone ning valime suvalise punkti  $D'$  sellel kaarel  $AB$ , kus ei ole punkti  $C$ . Muuhulgas tähendab see, et punktid  $C$  ja  $D'$  jäävad sirgest  $AB$  erinevale poole, mistõttu punktid  $D$  ja  $D'$  asuvad sirgest  $AB$  samal pool.

Ülaltõestatu põhjal siis  $\angle ACB + \angle AD'B = 180^\circ$ . Eeldusest teame samas, et  $\angle ACB + \angle ADB = 180^\circ$ , järelikult  $\angle ADB = \angle AD'B$ . Teoreemist 28.1 saame, et sel juhul asuvad punktid  $A, B, D$  ja  $D'$  ühel ringjoonel. Selsamal ringjoonel kui kolmnurga  $ABD'$  ümberringjoonel asub ka punkt  $C$ .



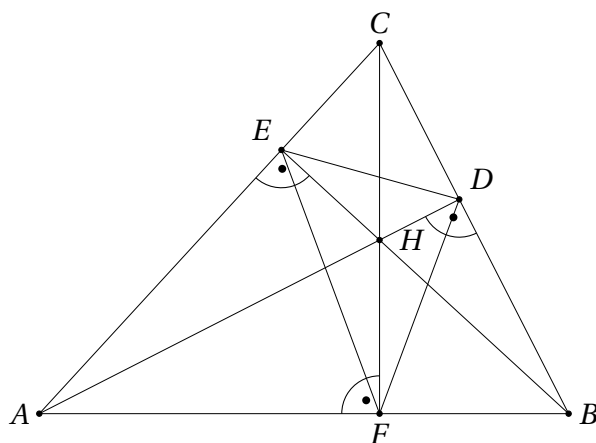
□

Näeme, et teoreem 28.2 üldistab järeldust 27.3. Kui ühele lõigule toetub kaks täisnurka, siis ühest küljest on nad võrdsed, aga teisest küljest on nende summa  $180^\circ$ . Mõlemal juhul asuvad vaadeldava lõigu otspunktid ja nende täisnurkade tipud ühel ringjoonel.

Teoreemi 28.2 kasutatakse ülesannetes sageli nii, et tõestatakse tema ühe poole järgi nelja punkti asumine ühel ringjoonel ja kasutatakse siis seda fakti teoreemi teise osa abil mingite nurkade suuruste kohta järelduste tegemiseks.

**Ülesanne 28.1** Olgu teravnurkse kolmnurga  $ABC$  kõrguste lõikepunkt  $H$  ning tippudest  $A, B, C$  tõmmatud kõrguste aluspunktid vastavalt  $D, E, F$ . Tõesta, et punkt  $H$  on kolmnurga  $DEF$  siseringjoone keskpunkt.

*Lahendus.* Teeme joonise. Kui mitu ühel ringjoonel asuvat punktinelikut suudad jooniselt leida?

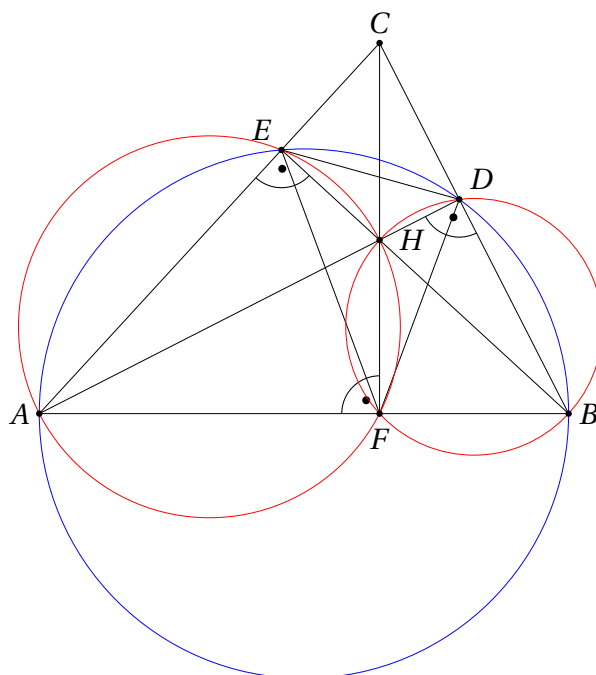


Praegu piisab sellele küsimusele vastamiseks isegi teoreemi 28.2 täisnurksest erijuhust, mille tõestasime järeldusena 27.3.

Näeme, et  $\angle AEB = 90^\circ = \angle ADB$ , seega on ühel ringjoonel punktid  $A, E, D$  ja  $B$ . Sama moodi saame ühel ringjoonel asumise tõestada nelikute  $A, C, D, F$  ja  $B, F, E, C$  kohta.

Teisest küljest  $\angle AEH + \angle AFH = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ , järelikult on ühel ringjoonel punktinelik  $A, E, H, F$  ning analoogiliselt ka nelikud  $C, D, H, E$  ja  $B, F, H, D$ .

Joonestame mõned neist ringjoontest välja, vt joonist.



Ülesandes on vaja tõestada, et  $H$  on kolmnurga  $DEF$  siseringjoone keskpunkt ehk nurgapoolitajate lõikepunkt. Näitame siinkohal, et  $\angle HFE = \angle DFH$ ; ülejäänud nurkade korral on tõestus analoogne.

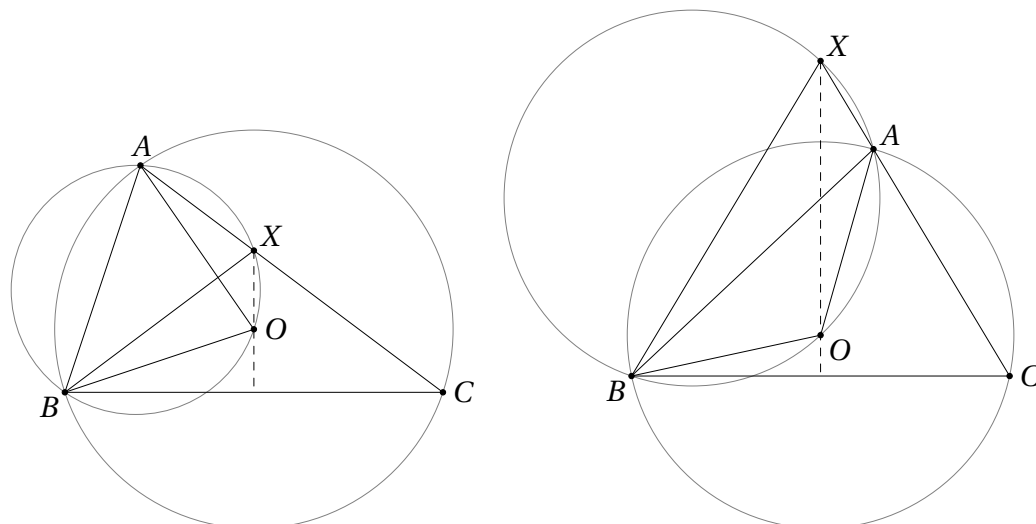
Näeme, et  $HFE$  on piirdenurk, mis toetub kõõlule  $HE$  vasakpoolsel punasel ringjoonel. Samale kõõlule samal ringjoonel toetub ka nurk  $HAE$ , järelikult  $\angle HFE = \angle HAE$ . Samamoodi saame parempoolsest punasest ringjoonest, et  $\angle DFH = \angle DBH$ .

Kuna  $H$  on kolmnurga  $ABC$  kõrguste lõikepunkt, kehtivad võrdused  $\angle HAE = \angle DAE$  ja  $\angle DBH = \angle DBE$ . Niisiis on meil tarvis tõestada veel, et  $\angle DAE = \angle DBE$ . See võrdus aga kehtib, sest  $DAE$  ja  $DBE$  on piirdenurgad, mis toetuvad kõõlule  $ED$  sinisel ringjoonel.

Loomulikult saab teoreemi 28.2 kasutada palju laiemalt kui ainult täisnurkade korral. Seejuures juhtub sageli, et ülesande tekstile vastab mitu erinevat joonist, millest mõne puhul tuleb kasutada teoreemi 28.2 esimest, mõne puhul aga teist osa.

**Ülesanne 28.2** (Talvine lahtine võistlus 2015, vanem rühm) Teravnurkse kolmnurga  $ABC$  ümberringjoone keskpunkt on  $O$ . Sirge  $AC$  lõikab kolmnurga  $AOB$  ümberringjoont lisaks tipule  $A$  punktis  $X$ . Tõesta, et sirge  $XO$  on risti sirgega  $BC$ .

*Lahendus.* Ülesande tekstile vastab kaks põhimõtteliselt erinevat joonist – üks, kus punkt  $X$  asub küljel  $AC$ , ja teine, kus ta asub külje  $AC$  pikendusel.



Olgu  $\angle ACB = \gamma$ .

Siis kesk- ja piirdenurga omadusest kolmnurga  $ABC$  ümberringjoonel saame  $\angle AOB = 2\gamma$ . Ülesande tingimuste tõttu asuvad punktid  $A, B, O, X$  ühel ringjoonel.

Vasakpoolsel joonisel saame seetõttu  $\angle AXB = \angle AOB = 2\gamma$ . See omakorda tähendab, et  $\angle BXC = 180^\circ - 2\gamma$  ja

$$\angle CBX = 180^\circ - \angle XCB - \angle BXC = 180^\circ - (180^\circ - 2\gamma) - \gamma = \gamma.$$

Järelikult on kolmnurk  $BXC$  võrdhaarne ja lõigu  $BC$  keskristsirge läbib seega nii punkti  $O$  kui ka punkti  $X$ .

Teisel juhul saame analoogiliselt  $\angle BXC = \angle BXA = 180^\circ - \angle AOB = 180^\circ - 2\gamma$  ja edasi on tõestus sama kui esimesel juhul.

## Ülesanded

**Ülesanne 28.3** (Lõppvoor 2014, 9. klass) Kolmnurga  $ABC$  külgedel  $BC$ ,  $CA$  ja  $AB$  leiduvad vastavalt punktid  $D$ ,  $E$  ja  $F$  nii, et punktid  $A, B, D, E$  asuvad ühel ringjoonel, punktid  $B, C, E, F$  asuvad ühel ringjoonel ning punktid  $A, C, D, F$  asuvad samuti ühel ringjoonel. Kas selleks on kindlasti vaja, et kolmnurk  $ABC$  oleks võrdkülgne?

**Ülesanne 28.4** (Piirkonnavor 2023, 10. klass) Kõõlnelinurga  $ABCD$  küljel  $BC$  valitakse punkt  $E$ . Olgu  $F$  selline punkt, et  $ACFE$  on rööpkülik. Olgu  $L$  sirgete  $AD$  ja  $EF$  lõikepunkt. Tõesta, et punktid  $B, D, E$  ja  $L$  asuvad ühel ringjoonel.

**Ülesanne 28.5** (Lõppvoor 2003, 10. klass) Teravnurkses kolmnurgas  $ABC$  on kõik nurgad suuremad kui  $45^\circ$ . Olgu  $AM$  ja  $BN$  selle kolmnurga kõrgused. Lõikudel  $MA$  ja  $NB$  valitakse vastavalt punktid  $X$  ja  $Y$  nii, et  $|MX| = |MB|$  ja  $|NY| = |NA|$ . Tõesta, et lõigud  $MN$  ja  $XY$  on paralleelsed.

**Ülesanne 28.6** (Kevadine lahtine võistlus 2000, noorem rühm) Tasandil on antud teravnurk  $AOB$  tipuga  $O$ . Nurga sisepiirkonnas valitakse punktid  $C$  ja  $D$  nii, et  $\angle AOC = \angle DOB$ . Punktist  $D$  kiirele  $OA$  tõmmatud ristlõik lõikab kiirt  $OC$  punktis  $G$  ning punktist  $C$  kiirele  $OB$  tõmmatud ristlõik lõikab kiirt  $OD$  punktis  $H$ . Tõesta, et punktid

$C, D, G$  ja  $H$  asuvad ühel ringjoonel.

**Ülesanne 28.7** (Talvine lahtine võistlus 2018, noorem rühm) Ringjoonel keskpunktiga  $O$  ja diameetriga  $AB$  valitakse erinevad punktid  $C$  ja  $D$  nii, et nad asuvad diameetrist  $AB$  samal pool. Diameetril  $AB$  valitakse punktist  $O$  erinev punkt  $P$  nii, et punktid  $P, O, D, C$  on ühel ringjoonel. Tõesta, et  $\angle APC = \angle BPD$ .

**Ülesanne 28.8** (Sügisene lahtine võistlus 1996, vanem rühm) Olgu  $H, K$  ja  $L$  suvalise kolmnurga  $ABC$  tippudest  $A, B$  ja  $C$  vastavalt külgedele  $BC, AC$  ja  $AB$  (või nende pikendustele) tõmmatud kõrguste aluspunktid. Tõesta, et

$$|AK| \cdot |BL| \cdot |CH| = |HK| \cdot |KL| \cdot |LH| = |AL| \cdot |BH| \cdot |CK|.$$

**Ülesanne 28.9** (Lõppvoor 2021, 12. klass) Punkt  $D$  teravnurkse kolmnurga  $ABC$  sees rahuldab tingimust

$$\angle ADC = \angle BDA = 180^\circ - \angle CAB.$$

Tõesta, et punkti  $A$  peegeldus punktist  $D$  asub kolmnurga  $ABC$  ümberringjoonel.

**Ülesanne 28.10** (Talvine lahtine võistlus 2021, vanem rühm, a) osa) Kolmnurgas  $ABC$  on  $|AB| = |AC|$ . Mediaanid  $AD$  ja  $BE$  lõikuvad punktis  $G$ . Olgu  $P$  lõigu  $GE$  keskpunkt. Tõesta, et kui  $|GP| = |GD|$ , siis  $CEPD$  on kõõlnelinurk.

**Ülesanne 28.11** (Lõppvoor 2008, 11. klass) Erineva raadiusega ringjooned  $c_1$  ja  $c_2$  puutuvad väliselt punktis  $K$ . Ringjoonte ühine väline puutuja puutub ringjooni vastavalt punktides  $A$  ja  $C$ . Ringjoonte on tõmmatud diameetrid  $AB$  ja  $CD$ . Sirge  $BD$  lõikab ringjoont  $c_1$  teist korda punktis  $L$  ning ringjoont  $c_2$  punktis  $M$ . Tõesta, et kolmnurgad  $AKL$  ja  $BKM$  on sarnased.

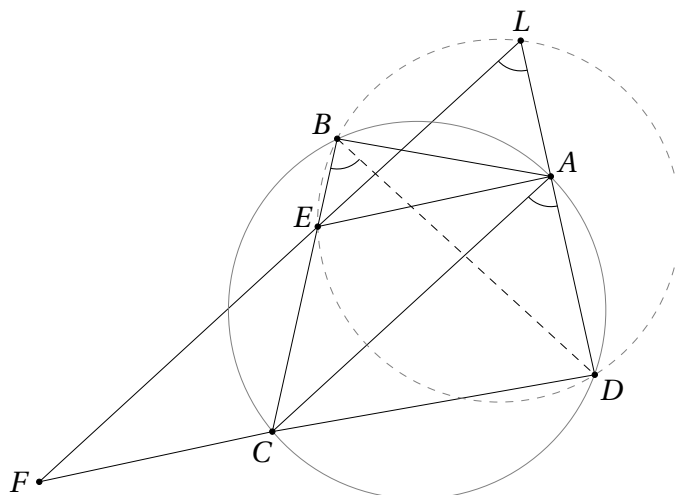
Vaata ka ülesandeid 29.10 ja 31.11.

## Lahendused

28.3 Vastus: ei.

Valime suvalise mittevõrdkülgse teravnurkse kolmnurga  $ABC$  ning võtame punktideks  $D, E$  ja  $F$  selle kolmnurga kõrguste aluspunktid. Nagu nägime ülesande 28.1 lahenduses, asuvad siinses ülesandes nõutud punktinelikud ühel ringjoonel ilma eelduseta, et  $ABC$  oleks võrdkülgne.

28.4 Teeme joonise.

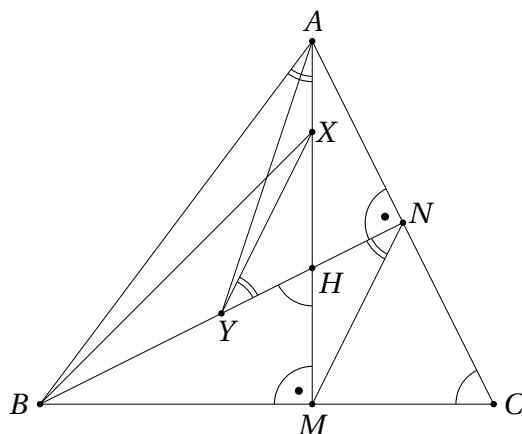


Selleks, et tõestada punktide  $B, D, E$  ja  $L$  asumine ühel ringjoonel, tuleb teoreemi 28.2 rakendamiseks uurida nelinurgas  $DEBL$  tekkivaid nurki. Näeme, et punktid  $B$  ja  $L$  asuvad samal pool sirget  $ED$ . Niisiis piisab tõestada võrdus  $\angle EBD = \angle ELD$ .

Kuna punkt  $E$  asub lõigul  $BC$ , teame, et  $\angle EBD = \angle CBD$ . Kuivõrd  $ABCD$  on kõõlnelinurk, saame teoreemist 28.2 lisaks, et  $\angle CBD = \angle CAD$ .

Ülesande tingimuste põhjal on  $ACFE$  rööpkülik, järelikult  $AC \parallel EF$ . Siit järelduvad omakorda võrdused  $\angle CAD = \angle FLD = \angle ELD$ . Kokkuvõtteks olemegi tõestanud võrduse  $\angle EBD = \angle ELD$ , millest teoreemi 28.2 põhjal piisab, et punktid  $B, D, E$  ja  $L$  asuksid ühel ringjoonel.

- 28.5 Vastavalt ülesande tingimustele on  $AYN$  ja  $BMX$  võrdhaarsed täisnurksed kolmnurgad, seega nende alusnurkade suurused on  $45^\circ$ . Tingimused  $\angle CAB > 45^\circ$  ja  $\angle ABC > 45^\circ$  garanteerivad vajalike punktide  $X$  ja  $Y$  leidumise vastavalt lõikude  $MA$  ja  $NB$  sisepiirkonnas. Mida aga annab tingimus  $\angle BCA > 45^\circ$ ?



Olgu  $H$  kolmnurga  $ABC$  kõrguste lõikepunkt. Kuna  $\angle CNH = \angle HMC = 90^\circ$ , on  $CNHM$  kõõlnelinurk. Järelikult

$$\angle BCA = 180^\circ - \angle NHM = \angle MHB.$$

Niisiis on tingimus  $\angle BCA > 45^\circ$  samaväärne tingimusega  $\angle MHB > \angle MXB$  (sest  $\angle MXB = 45^\circ$ ). Siit omakorda järeldub, et punkt  $H$  asub lõigu  $MX$  sisepiirkonnas; sama moodi tõestame ka, et  $H$  asub lõigu  $NY$  sisepiirkonnas. Kokkuvõttes



tähendab tingimus  $\angle BCA > 45^\circ$ , et ülaltoodud joonis on põhimõtteliselt ainus, mis ülesande tingimusi rahuldab.

Nii nagu ülesande 28.1 lahenduseski paneme tähele, et võrdustest  $\angle BMA = \angle BNA = 90^\circ$  järeldeb  $ABMN$  kõõlnelinurksus. Muuhulgas saame siit, et  $\angle MNB = \angle MAB$ , sest need nurgad toetuvad  $ABMN$  ümberringjoone kõõlule  $BM$ .

Ülesande väite  $MN \parallel XY$  tõestamiseks piisab nüüd, kui näitame, et  $\angle XAB = \angle XYN$  ehk  $\angle XAB = 180^\circ - \angle BYX$ . Viimane tingimus on aga samaväärne  $ABYX$  kõõlnelinurksusega.

Selle tõestamiseks piisab, kui näitame, et  $\angle BYA = \angle BXA$ . Tuletame meelde, et  $AYN$  ja  $BMX$  on võrdhaarsed täisnurksed kolmnurgad, niisiis

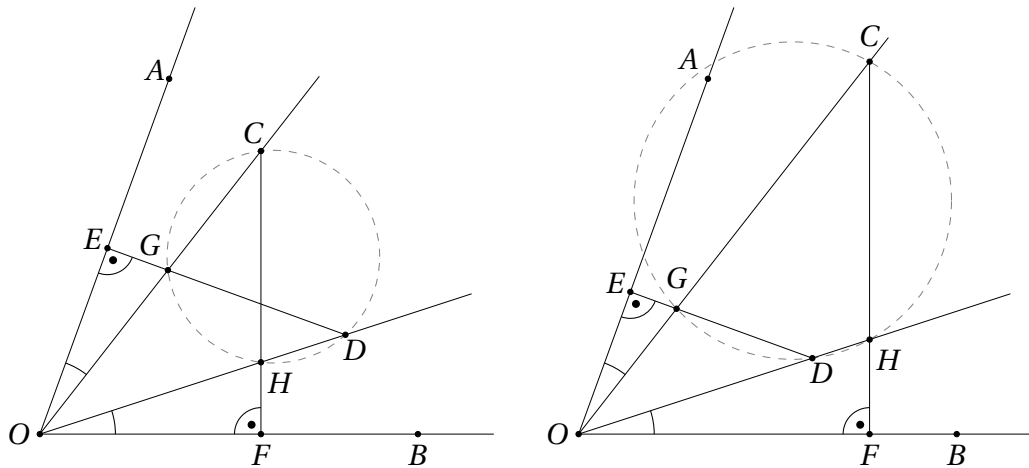
$$\angle BYA = 180^\circ - \angle AYN = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$$

ja

$$\angle BXA = 180^\circ - \angle MXB = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ.$$

Seega  $\angle BYA = \angle BXA$  nagu oligi tarvis.

- 28.6 Selles ülesandes tuleb jälle aru saada, et teksti põhjal on võimalik joonistada kaks põhimõtteliselt erinevat pilti. Ühel juhul asuvad punktid  $G$  ja  $H$  vastavalt lõikude  $OC$  ja  $OD$  sisepiirkondades, teisel juhul asub aga üks neist punktidest vastava lõigu pikendusel. (Kui  $C = G$  või  $D = H$ , on ülesande väide üleüldse triviaalne.)



Mõlemal juhul näeme, et kuna

$$\angle EOG = \angle AOC = \angle DOB = \angle HOF$$

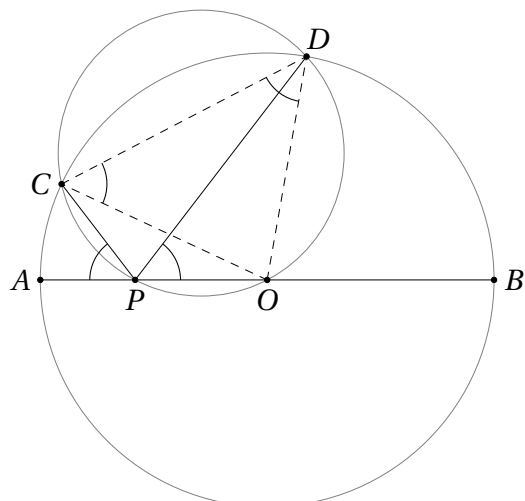
ning  $\angle GEO = 90^\circ = \angle HFO$ , siis on on võrdsed ka kolmnurkade  $GEO$  ja  $HFO$  kolmandad nurgad, st  $\angle EGO = \angle OHF$ .

Esimesel juhul järeldeb siit kohe, et  $\angle CGD = \angle CHD$ , teisel juhul aga saame, et

$$\angle CGD = \angle EGO = \angle OHF = 180^\circ - \angle CHD.$$

Mõlemal korral järeldeb teoreemist 28.2, et punktid  $C, D, G$  ja  $H$  asuvad ühel ringjoonel.

28.7 Teeme joonise.



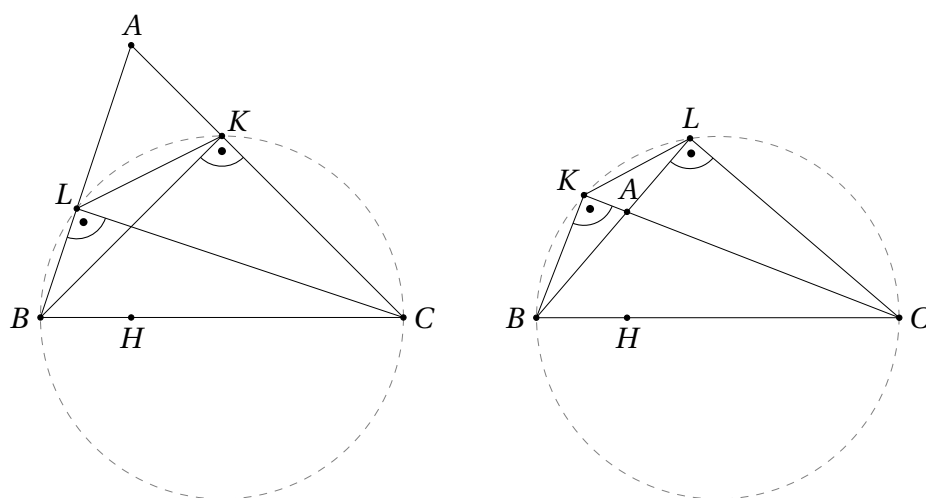
Ülesande tekstile võib vastata veel ka põhimõtteliselt teine joonis, kus punktid  $C$  ja  $D$  on vahetatud, kuid on selge, et võrdus  $\angle APC = \angle BPD$  kehtib parajasti siis, kui võrdus  $\angle APD = \angle BPC$ .

Kuna punktid  $P, O, D, C$  asuvad ühel ringjoonel, saame  $\angle BPD = \angle OPD = \angle OCD$ . Teisest küljest  $\angle CDO = 180^\circ - \angle OPC = \angle APC$ . Kuna aga punktid  $C$  ja  $D$  asuvad ühel ringjoonel keskpunktiga  $O$ , on kolmnurk  $OCD$  võrdhaarne ja kehtib võrdus  $\angle OCD = \angle CDO$ . Siit järeldubki, et  $\angle APC = \angle BPD$ .

- 28.8 Kui kolmnurk  $ABC$  on täisnurkne täisnurgaga näiteks tipu  $A$  juures, langevad tippudest  $B$  ja  $C$  tõmmatud kõrguste aluspunktid  $K$  ja  $L$  kokku tipuga  $A$ , mistõttu  $|AK| = |AL| = |LK| = 0$  ja kõik ülesande avaldised on võrdsed 0-ga. Niisiis võime edaspidi vaadelda mittetäisnurkseid kolmnurki.

Ülesande avaldised kujutavad endast teatud lõikude pikkuste korrutisi, mida saab omakorda üritada avaldada lõikude pikkuste suhete kaudu. Lõikude pikkuste suhteid aga tasub otsida sarnastest kolmnurkadest. Niisiis püüame jooniselt leida sarnaseid kolmnurki.

Ülesande lahenduse võtmeks on tähelepanek, et  $\triangle ABC \sim \triangle AKL$  sõltumata sellest, kas tipu  $A$  juures on terav- või nürinurk. Teeme vastavad joonised.



Kuna  $\angle BKC = \angle BLC = 90^\circ$ , on  $BCKL$  mõlemal juhul kõõlnelinurk. Kui  $CAB$

on teravnurk, saame

$$\angle ABC = \angle LBC = 180^\circ - \angle CKL = \angle AKL.$$

Kui  $CAB$  on nürinurknurk, saame

$$\angle ABC = \angle LBC = \angle LKC = \angle AKL.$$

Näeme, et mõlemal juhul  $\angle ABC = \angle AKL$ . Täpselt sama moodi tõestame ka võrduse  $\angle ACB = \angle ALK$ , millest järeldebki NN-tunnuse alusel, et  $\triangle ABC \sim \triangle AKL$ .

Sarnaste kolmnurkade vastavate külgede pikkuste suhte on samad, st

$$\frac{|AK|}{|AB|} = \frac{|KL|}{|BC|}.$$

Täpselt sama moodi tõestame võrdused

$$\frac{|BL|}{|BC|} = \frac{|LH|}{|CA|}$$

ja

$$\frac{|CH|}{|CA|} = \frac{|HK|}{|AB|}.$$

Viimase kolme võrduse korrutamine annab

$$\frac{|AK| \cdot |BL| \cdot |CH|}{|AB| \cdot |BC| \cdot |CA|} = \frac{|KL| \cdot |LH| \cdot |HK|}{|BC| \cdot |CA| \cdot |AB|},$$

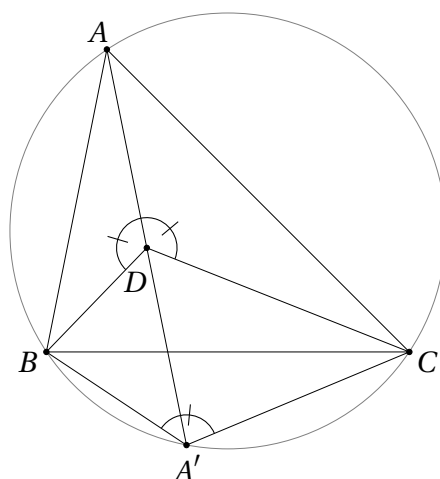
millest omakorda järeldeb ülesande esimene võrdus

$$|AK| \cdot |BL| \cdot |CH| = |HK| \cdot |KL| \cdot |LH|.$$

Ülesande teise võrduse tõestus on analoogiline.

28.9 See on taaskord niisugune ülesanne, mida on lihtsam lahendada teistsuguses järjestuses konstruktsiooniga kui tekstis antud.

Olgu  $A'$  sirge  $AD$  teine lõikepunkt kolmnurga  $ABC$  ümberringjoonega ja näitame, et  $D$  on kõõlu  $AA'$  keskpunkt. Selleks avaldame lõikude  $DA$  ja  $DA'$  pikkused teiste lõikude pikkuste kaudu, milleks omakorda kuluvad ära joonisele tekkivad sarnased kolmnurgad.



Kuna

$$180^\circ - \angle CAB = \angle CDA = 180^\circ - \angle CDA',$$

siis  $\angle CAB = \angle CDA'$ . Kuivõrd teisest küljest on  $ABA'C$  konstruktsiooni põhjal kõõlnelinurk, saame ka

$$\angle DA'C = \angle AA'C = \angle ABC.$$

Niisiis on kolmnurkadel  $ABC$  ja  $DA'C$  kaks paari vastavalt võrdseid nurki, mistõttu need kolmnurgad on sarnased. Järelikult

$$\frac{|AB|}{|DA'|} = \frac{|BC|}{|A'C|} \quad \text{ehk} \quad |DA'| = \frac{|AB| \cdot |A'C|}{|BC|}.$$

Nüüd oleks tarvis siduda omavahel lõikude  $DA$ ,  $AB$ ,  $A'C$  ja  $BC$  pikkused. Joonisele vaadates näeme, et seda saaks teha, kui õnnestuks näidata kolmnurkade  $ABD$  ja  $CBA'$  sarnasus.

Kasutame jälle asjaolu, et  $ABA'C$  on kõõlnelinurk, mistõttu

$$\angle BA'C = 180^\circ - \angle CAB = \angle BDA.$$

Samast kõõlnelinurgast järeldub ka

$$\angle A'BC = \angle A'AB = \angle DAB.$$

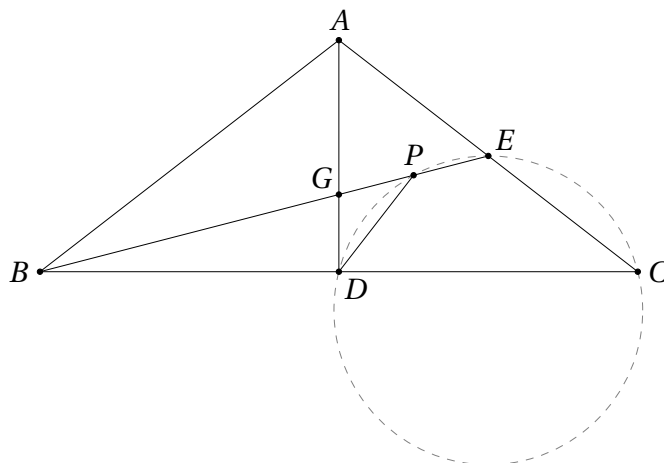
Niisiis on kolmnurkadel  $ABD$  ja  $CBA'$  kaks paarikaupa võrdset nurka, mistõttu  $\triangle ABD \sim \triangle CBA'$ . Kokkuvõtteks saame

$$\frac{|DA|}{|AB|} = \frac{|A'C|}{|BC|} \quad \text{ehk} \quad |DA| = \frac{|AB| \cdot |A'C|}{|BC|},$$

millest järeldubki  $|DA| = |DA'|$ .

Sama moodi saab lahenduseni viia tähelepanekud, et  $\triangle ABC \sim \triangle DBA'$  ja  $\triangle CAD \sim \triangle CBA'$ .

28.10 Teeme joonise.

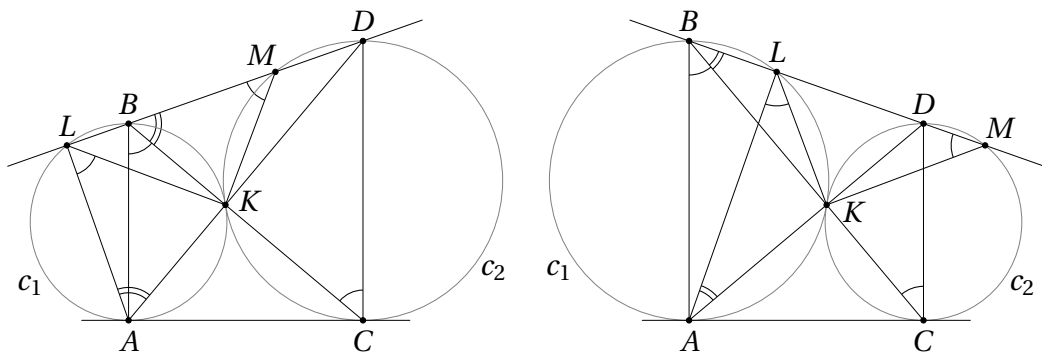


Võrdus  $|GP| = |GD|$  kehtib parajasti siis, kui  $\angle GDP = \angle GPD$ . Tõestamaks, et  $CEPD$  on kõõlnelinurk, piisab näidata, et  $\angle ECD = 180^\circ - \angle DPE = \angle GPD$ . Nurgad  $ECD$  ja  $GPD$  on vastavalt võrdhaarsete kolmnurkade  $ABC$  ja  $GDP$  alusnurgad; niisiis piisab nende võrduse näitamiseks, tipunurkade võrduse tõestamisest.  $\angle DGP = \angle AGB$ , seega on vaja tõestada, et  $\angle AGB = \angle EAB$ . Kuna  $GBA$  on kolmnurkade  $AGB$  ja  $EAB$  ühine nurk, piisab näidata, et  $\angle GAE = \angle BAG$  (ehk  $\triangle AGB \sim \triangle EAB$ ).

Kuna  $G$  on kolmnurga  $ABC$  mediaanide lõikepunkt, siis  $|AG| = 2|GD|$ . Samas ülesande tingimuste põhjal  $|GE| = 2|GP| = 2|GD|$ , järelikult  $|AG| = |GE|$ , mistõttu  $AGE$  on võrdhaarne kolmnurk ja  $\angle AEG = \angle GAE$ . Et  $AD$  on võrdhaarsete kolmnurga mediaan, kehtib ka  $\angle GAE = \angle BAG$ . Järelikult  $\triangle AGB \sim \triangle EAB$  ja  $\angle AGB = \angle EAB$ , mida oligi tarvis.

Tegelikult kehtib ka selle tulemuse pöördväide, mida algses võistlusülesandes samuti küsiti. Vastava tõestuse annab ülesande 31.8 lahendus.

- 28.11 Selles ülesandes on jälle kaks võimalikku joonist vastavalt sellele, kumma ringjoone raadius on suurem.



Mõlemal juhul näeme, et  $AB \perp AC$  ja  $CD \perp AC$ , seega  $AB \parallel CD$ . Samuti on ringjooned  $c_1$  ja  $c_2$  mõlemal juhul homoteetsed keskpunktiga  $K$  (homoteetia kohta loe rohkem jaotisest 34). See homoteetne teisendus viib ühe ringjoone diameetri teise ringjoone paralleelseks diameetriks, st punkti  $B$  punktiks  $C$  ning punkti  $A$  punktiks  $D$ . Järelikult on  $K$  lõikude  $BC$  ja  $AD$  lõikepunkt.

Vaatleme kõigepealt juhtu, kui ringjoone  $c_1$  raadius on väiksem (vt vasakpoolne joonis). Kuna punktid  $K, B, L$  ja  $A$  asuvad ühel ringjoonel, kehtib võrdus  $\angle KLA = \angle KBA$ . Et  $AB \parallel CD$ , saame põiknurkade omadusest  $\angle KBA = \angle CBA = \angle BCD = \angle KCD$ . Kuna ka punktid  $D, M, K$  ja  $C$  asuvad ühel ringjoonel, kehtivad lisaks võrdused  $\angle KMB = 180^\circ - \angle DMK = \angle KCD$ . Kokkuvõtteks oleme näidanud, et  $\angle KLA = \angle KMB$ .

Teisest küljest saame tänu punktide  $K, B, L$  ja  $A$  ühel ringjoonel asumisele, et  $\angle LAK = 180^\circ - \angle KBL = \angle MBK$ . Kokkuvõttes on kolmnurkadel  $KLA$  ja  $KMB$  kaks paari vastavalt võrdeid nurki, mistõttu nad on sarnased.

Juhul kui ringjoone  $c_1$  raadius on suurem (vt parempoolne joonis), saame ülaltehtuga analoogiliselt, et  $\angle KLA = \angle KBA = \angle KCD = \angle KMB$ . Teise nurgapaari jaoks saame tänu punktide  $K, L, B$  ja  $A$  ühel ringjoonel asumisele kohe võrduse  $\angle LAK = \angle LBK = \angle MBK$ . Kokkuvõttes on kolmnurgad  $KLA$  ja  $KMB$  ka sel juhul sarnased.

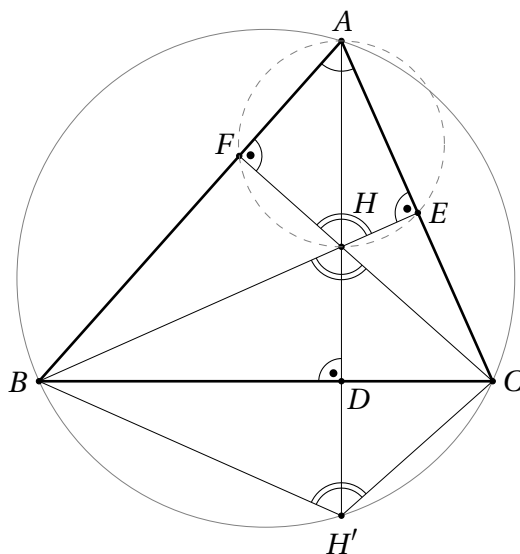
## 28.2 Kõrguste lõikepunkti omadus

Teoremil 28.2 on olemas ilus järeldus, mis omab sageli ülesannete lahendamisel iseseisvat tähtsust.

**Teoreem 28.3** Kolmnurga kõrguste lõikepunkti peegeldus suvalise külje sirgest asub selle kolmnurga ümberringjoonel.

*Tõestus.* Olgu antud kolmnurk  $ABC$  ning olgu  $H$  tema kõrguste lõikepunkt. Vaatleme külge  $BC$  ja tõestame teoreemi väite punkti  $H'$  jaoks, mis on  $H$  peegeldus küljega  $BC$  määratud sirgest. Teiste külgede korral on tõestus analoogiline.

Vaatame läbi erinevad võimalikud juhud ning alustame juhust, mil kolmnurk  $ABC$  on teravnurkne. Tähistame tippudest  $A, B$  ja  $C$  tõmmatud kõrguste aluspunkte vastavalt  $D, E$  ja  $F$  ning teeme joonise.

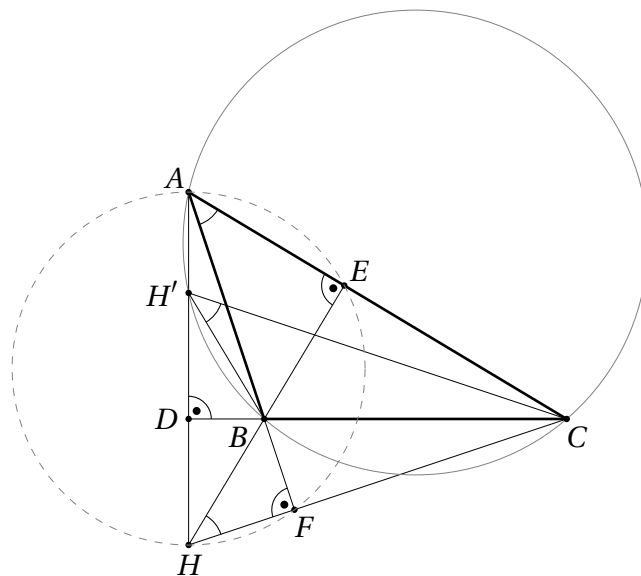


Me peame tõestama, et punktid  $A, C, H'$  ja  $B$  asuvad ühel ringjoonel. Teoreemi 28.2 põhjal piisab näidata, et  $\angle CAB + \angle BH'C = 180^\circ$ . Kuna  $H$  ja  $H'$  on sirge  $BC$  suhtes sümmeetrilised, kehtib  $\angle BH'C = \angle CHB$ . Tänu tippnurdade omadusele teeme ka, et  $\angle CHB = \angle FHE$ . Seega tuleb tõestada, et  $\angle EAF + \angle FHE = 180^\circ$ . See võrdus aga kehtib, sest  $\angle AFH = \angle HEA = 90^\circ$  ja  $AEHF$  on kõõlnelinurk.

Järgmiseks vaatleme juhtu, kus kolmnurk  $ABC$  on täisnurkne. Kui täisnurk on tipu  $A$  juures, siis  $H = A$  ning teoreemi väide kehtib jällegi teoreemi 28.2 põhjal, sest  $\angle CAB + \angle BH'C = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ . (Muidugi saame siinkohal soovi korral kasutada ka järeldust 27.3.)

Kui aga täisnurk on kas tipu  $B$  või  $C$  juures, siis vastavalt  $B = H = H'$  või  $C = H = H'$  ning punkt  $H'$  asub triviaalselt kolmnurga  $ABC$  ümberringjoonel.





Jälle peame tõestama, et punktid  $A$ ,  $H'$ ,  $B$  ja  $C$  asuvad ühel ringjoonel. Paneme tähele, et punktid  $A$  ja  $H$  asuvad sirgest  $BC$  erineval pool, mistõttu punktid  $A$  ja  $H'$  asuvad sirgest  $BC$  samal pool. Seega piisab teoreemi 28.2 põhjal näidata, et  $\angle CAB = \angle CH'B$ . Kuna  $H$  ja  $H'$  on sirge  $BC$  suhtes sümmeetrilised, kehtib  $\angle CH'B = \angle BHC$ . Seega tuleb tõestada  $\angle CAB = \angle BHC$  ehk  $\angle EAF = \angle EHF$ . Viimane võrdus aga kehtib tänu teoreemile 28.2, sest  $\angle HEA = \angle HFA = 90^\circ$ , mistõttu  $AHFE$  on kõõnelinurk. (Võrdle ka seda tõestuse osa ülaltehtuga.)  $\square$

## Ülesanded

**Ülesanne 28.12** (Piirkonnavor 2023, 9. klass) Olgu  $ABC$  erikülgne teravnurkne kolmnurk, mille kõrgused lõikuvad punktis  $H$ . Tõesta, et nurkade  $ACB$  ja  $AHB$  poolitajad on paralleelsed.

**Ülesanne 28.13** (Lõppvoor 2002, 10. klass) Olgu  $ABC$  mittetäisnurkne kolmnurk ja  $H$  selle kõrguste lõikepunkt. Tõesta, et kolmnurk  $ABH$  on teravnurkne siis ja ainult siis, kui  $\angle ACB$  on nürinurk.

**Ülesanne 28.14** (Talvine lahtine võistlus 2014, noorem rühm) Olgu  $ABC$  teravnurkne kolmnurk,  $H$  selle kõrguste lõikepunkt ning  $AA'$  kolmnurga  $ABC$  ümberringjoone diameeter. Tõesta, et nelinurk  $HBA'C$  on rööpkülik.

**Ülesanne 28.15** (Lõppvoor 2014, 10. klass) Teravnurkses kolmnurgas  $ABC$  lõikuvad tipust  $B$  tõmmatud kõrgus ja tipust  $C$  tõmmatud nurgapoolitaja punktis  $D$ . Olgu  $E$  punktiga  $D$  sümmeetriline punkt sirge  $AC$  suhtes. On teada, et punktid  $A, B, C$  ja  $E$  asuvad ühel ringjoonel. Tõesta, et kolmnurk  $ABC$  on võrdhaarne.

**Ülesanne 28.16** (Lõppvoor 2012, 12. klass) Teravnurkse kolmnurga  $ABC$  sees valitakse niisugune punkt  $P$ , millega sümmeetrilised punktid kolmnurga külgede suhtes asuvad kõik kolmnurga  $ABC$  ümberringjoonel. Tõesta, et  $P$  on kolmnurga  $ABC$  kõrguste lõikepunkt.



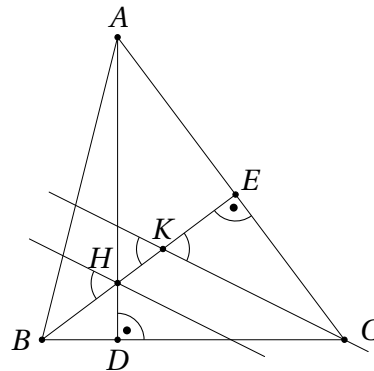
**Ülesanne 28.17** (Sügisene lahtine võistlus 2021, vanem rühm) Olgu  $H$  teravnurkse kolmnurga  $ABC$  kõrguste lõikepunkt. Olgu  $M$  külje  $BC$  keskpunkt. Olgu  $A'$  ja  $H'$  vastavalt punktide  $A$  ja  $H$  peegeldused punktist  $M$ . Tõesta, et punktid  $B$  ja  $C$  ning punkti  $A'$  peegeldused sirgetest  $BH'$  ja  $CH'$  asuvad ühel ringjoonel.

Vaata ka ülesannet 32.8.

## Lahendused

28.12 Olgu tippudest  $A$  ja  $B$  tõmmatud kõrguste aluspunktid vastavalt  $D$  ja  $E$ . Kuna  $\angle CDH = \angle HEC = 90^\circ$ , on  $CDHE$  kõõlnelinurk. Seega  $\angle AHB = \angle DHE = 180^\circ - \angle ACB$ , mistõttu ning sirge  $BH$  ja nurga  $AHB$  poolitaja vaheline nurk on

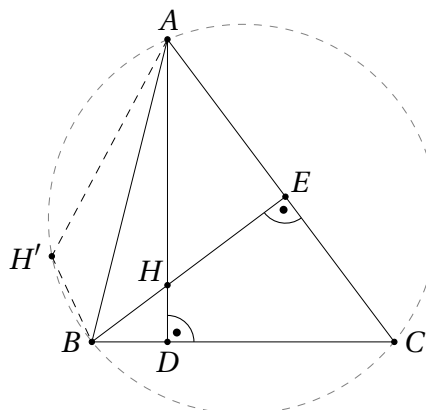
$$\frac{\angle AHB}{2} = \frac{180^\circ - \angle ACB}{2} = 90^\circ - \frac{\angle ACB}{2}.$$



Olgu sirge  $BH$  ja nurga  $ACB$  poolitaja lõikepunkt  $K$  (tänu kolmnurga erikülgsusele  $H \neq K$ ). Siis on sirge  $BH$  ja nurga  $ACB$  poolitaja vahelise nurga suurus  $\angle CKE = 90^\circ - \angle ECK = 90^\circ - \frac{\angle ACB}{2}$ .

Kuna nurkade  $ACB$  ja  $ACH$  poolitajad moodustavad sirgega  $BH$  sama suure nurga, peavad nad olema paralleelsed.

Võrduse  $\angle AHB = 180^\circ - \angle ACB$  saab tõestada ka teoreemi 28.3 abil. Sellest teoreemist teame, et kõrguste lõikepunktiga  $H$  külje  $AB$  suhtes sümmeetriline punkt  $H'$  asub kolmnurga  $ABC$  ümberringjoonel. Järelikult  $\angle AHB = \angle AH'B = 180^\circ - \angle ACB$ . Edasi jätkame nagu eelpool lõpetatud lahenduses.



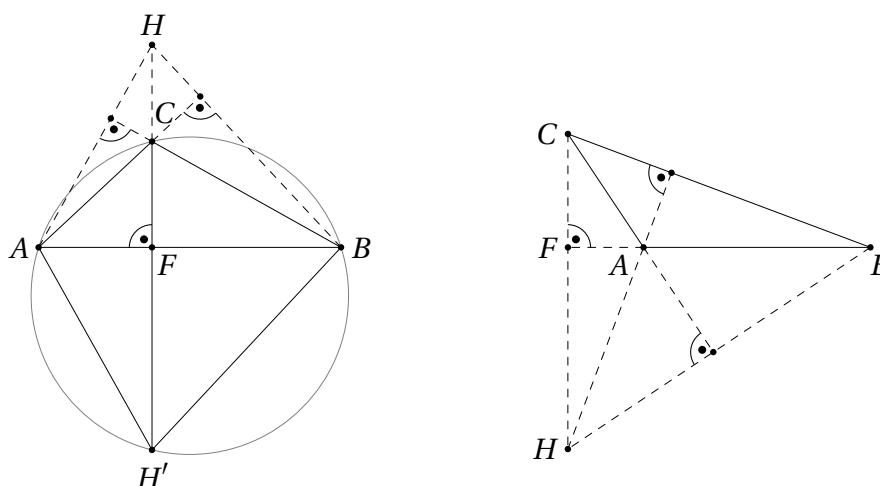
28.13 Vaatame võimalikud juhud läbi sarnaselt teoreemi 28.3 tõestusele.

Kõigepealt vaatleme juhtu, kus tipust  $C$  külje  $AB$  sirgele tõmmatud kõrguse aluspunkt  $F$  langeb lõigu  $AB$  sisepiirkonda. Selle kõrgusega määratud sirgel asub muidugi ka punkt  $H$ . Niisiis on  $F$  ka punkti  $H$  ristprojektsiooniks samale sirgele. See tähendab, et  $HAB$  ja  $ABH$  on teravnurgad.

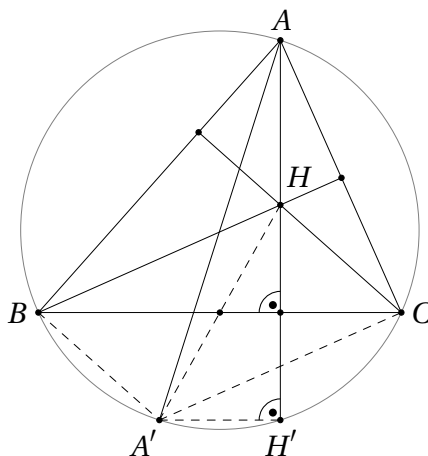
Punktid  $C$  ja  $H$  asuvad sirgest  $AB$  samal pool. See tähendab, et punkti  $H$  peegeldus  $H'$  sirge  $AB$  suhtes asub sellest sirgest teisel pool kui tipp  $C$ . Teoreemi 28.3 põhjal on  $AH'BC$  kõõlnelinurk, mistõttu teoreemi 28.2 alusel kehtib  $\angle BCA + \angle AH'B = 180^\circ$ . Kuivõrd  $\angle AH'B = \angle BHA$ , saame  $\angle BCA + \angle BHA = 180^\circ$ . Järelikult on  $BHA$  teravnurk (ning kolmnurk  $AHB$  teravnurkne) parajasti siis, kui  $BCA$  on nürinurk.

Kuna antud kolmnurk pole täisnurkne, jääb vaadata ainult juht, kus tipust  $C$  külje  $AB$  sirgele tõmmatud kõrguse aluspunkt  $F$  langeb lõigu  $AB$  pikendusele; langegu ta üldisust kitsendamata näiteks pikendusele üle punkti  $A$ .

Jällegi on  $F$  ka punkti  $H$  ristprojektsiooniks sirgele  $AB$ . See tähendab, et  $BAH$  on nürinurk, mistõttu kolmnurk  $ABH$  ei ole teravnurkne. Teisalt peab ka  $CAB$  olema nürinurk, järelikult ei saa  $BCA$  enam nürinurk olla. Niisiis kehtib ülesandes nõutud samaväärsus ka sel juhul.



28.14 Lähedus teoreemi 28.3 püstitusega võiks olla üsna selge. Täiendame teoreemi 28.3 joonist diameetriga  $AA'$ .



Kuidas punktid  $A'$  ja  $H'$  omavahel seotud on? Kuna  $AA'$  on diameeter, siis kehtib võrdus  $\angle A'H'A = 90^\circ$ . Samas ka  $H'A \perp BC$ , järelikult  $A'H' \parallel BC$ . Muuhulgas tähendab viimane seos, et punktid  $A'$  ja  $H'$  on sümmeetrilised lõigu  $BC$  keskrist-sirge suhtes. Niisiis võib punkti  $A'$  saada punktist  $H$  kahe teisenduse koostoimel – kõigepealt peegeldame punkti  $H$  sirge  $BC$  suhtes ja siis tulemust  $H'$  omakorda lõigu  $BC$  keskristsirge suhtes. Siit aga järeldub, et punktid  $H$  ja  $A'$  on teineteise peegeldused lõigu  $BC$  keskpunkti suhtes. See omakorda tähendabki, et  $HBA'C$  on rööpkülik.

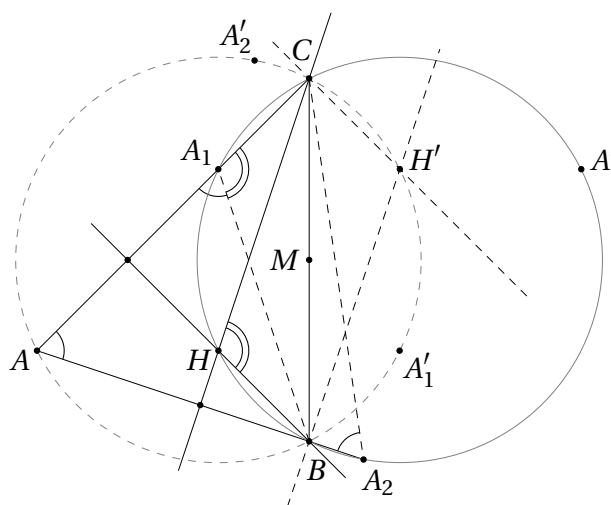
28.15 Teoreemist 28.3 teame, et teravnurkse kolmnurga kõrguste lõikepunkti peegeldus kolmnurga suvalisest küljest asub selle kolmnurga ümberringjoonel. Lisaks on lihtne näha, et kõrguste lõikepunkt on ainus kõrguse punkt, mille peegeldus küljest saab kolmnurga ümberringjoonel asuda. Seega on  $D$  kolmnurga  $ABC$  kõrguste lõikepunkt. Järelikult peab tipust  $C$  tõmmatud nurgapoolitaja olema ka selle kolmnurga kõrguseks, mistõttu on kolmnurk  $ABC$  võrdhaarne (vt teoreemi 32.2).

28.16 Teoreemist 28.3 teame, et kõrguste lõikepunkt on ülesandes nõutud omadus. Niisiis piisab tõestada, et tegemist on ainsa punktiga, mille peegeldused kolmnurga  $ABC$  külgedest asuvad tema ümberringjoonel.

Peegeldame kolmnurga  $ABC$  ümberringjoont tema külgede suhtes. Ülesande tingimuste põhjal asub punkt  $P$  igäihel saadavast kolmest ringjoonest. Samas lõikuvad need ringjooned paarikaupa kolmnurga tippudes, niisiis ei saa neil kolme peale olla üle ühe ühise punkti.

28.17 Ülesandes 28.14 nägime, et punkt  $H'$  asub kolmnurga  $ABC$  ümberringjoonel. Näitame, et samal ringjoonel asuvad ka punkti  $A'$  peegeldused sirgetest  $BH'$  ja  $CH'$ .

Veidi mugavam on tõestada selle väite punkti  $M$  suhtes peegeldatud kuju. Paneme tähele, et punktid  $B$  ja  $C$  on punkti  $M$  suhtes sümmeetrilised. Sirgete  $BH'$  ja  $CH'$  peegeldused punkti  $M$  suhtes on seega vastavalt sirged  $CH$  ja  $BH$  ehk kolmnurga  $ABC$  kõrgused. Niisiis piisab näidata, et tipu  $A$  peegeldused nende kõrguste suhtes asuvad kolmnurga  $BCH$  ümberringjoonel (mis on kolmnurga  $ABC$  ümberringjoone peegeldus punkti  $M$  suhtes).



On kolm võimalust.

- Kui punkti  $A$  peegeldus ühest kõrgusest langeb kokku kas punktiga  $B$  või  $C$ , kehtib väide selle peegelduse jaoks triviaalselt.
- Punkti  $A$  peegeldus ühest kõrgusest (näiteks  $BH$ ) asub kolmnurga küljel (nagu joonisel punkt  $A_1$  asub küljel  $AC$ ). Kolmnurk  $ABA_1$  on võrdhaarne, seega

$$\angle CA_1B = 180^\circ - \angle BA_1A = 180^\circ - \angle A_1AB = 180^\circ - \angle CAB.$$

Kõrguste lõikepunkti omadusest järeldub, et  $\angle CAB + \angle CHB = 180^\circ$ , mistõttu

$$\angle CHB = 180^\circ - \angle CAB = \angle CA_1B.$$

Kuna punktid  $A_1$  ja  $H$  asuvad sirgest  $BC$  samal pool, on  $A_1$  kolmnurga  $BCH$  ümberringjoonel.

- Punkti  $A$  peegeldus ühest kõrgusest (näiteks  $CH$ ) asub kolmnurga külje pikendusel (nagu joonisel punkt  $A_2$  asub külje  $AB$  pikendusel). Kolmnurk  $AA_2C$  on võrdhaarne, seega

$$\angle CAB = \angle CAA_2 = \angle AA_2C = \angle BA_2C.$$

Kuivõrd ka praegusel juhul  $\angle CAB + \angle CHB = 180^\circ$ , saame

$$\angle BA_2C + \angle CHB = 180^\circ.$$

Et punktid  $A_2$  ja  $H$  asuvad sirgest  $BC$  erineval pool, on ka  $A_2$  kolmnurga  $BCH$  ümberringjoonel.

Sellega on ülesande väide tõestatud.