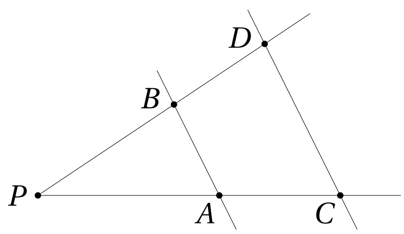
27. Sarnased kolmnurgad

Definitsioon 27.1 Kolmnurki ABC ja DEF nimetame *sarnasteks*, kui nende küljed on vastavalt võrdelised, st kehtivad võrdused $\dfrac{|AB|}{|DE|} = \dfrac{|BC|}{|EF|} = \dfrac{|CA|}{|FD|}$. Sel juhul kirjutame $\triangle ABC \sim \triangle DEF$. Külgede pikkuste suhet $k = \dfrac{|AB|}{|DE|}$ (või $k = \dfrac{|DE|}{|AB|}$) nimetame nende kolmnurkade *sarnasusteguriks*.

Alustame jaotise teooriaosa teoreemist, mis võimaldab omavahel siduda kolmnurkade sarnasuse (st teatud lõikude pikkuste suhted) ning sirgete paralleelsuse.

Teoreem 27.1 Kui nurga haarasid lõigata paralleelsete sirgetega, tekivad sarnased kolmnurgad. Joonise 27.1 tähistes $\triangle PAB \sim \triangle PCD$.



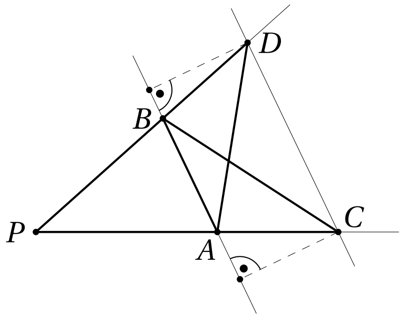
Joonis 27.1

Teoreemi 27.1 tõestuses mängib võtmerolli kiirteteoreem, millel on võistlusülesannete lahendamisel ka iseseisev tähtsus.

Teoreem 27.2 **(Kiirteteoreem)** Kui nurga haarasid lõigata paralleelsete sirgetega, tekivad haaradel vastavalt võrdeliste pikkustega lõigud. Joonise 27.1 tähistes $\dfrac{|PA|}{|PB|} = \dfrac{|PC|}{|PD|} = \dfrac{|AC|}{|BD|}$.

Tõestus. Kasutame pindalade meetodit. Teoreemist 26.1 saame

$$\frac{|PA|}{|PC|} = \frac{S_{ABP}}{S_{CBP}} \quad \text{ja} \quad \frac{|PB|}{|PD|} = \frac{S_{ABP}}{S_{ADP}}.$$



Kuna $AB \parallel CD$, on kolmnurkade ACB ja ADB ühisele küljele AB tõmmatud kõrgused võrdsed, mistõttu $S_{ACB} = S_{ADB}$. Järelikult ka

$$S_{CBP} = S_{ABP} + S_{ACB} = S_{ABP} + S_{ADB} = S_{ADP}\,.$$

Kokkuvõtteks

$$\frac{|PA|}{|PC|} = \frac{S_{ABP}}{S_{CBP}} = \frac{S_{ABP}}{S_{ADP}} = \frac{|PB|}{|PD|}\,,$$

millest järeldubki teoreemi esimene võrdus $\frac{|PA|}{|PB|} = \frac{|PC|}{|PD|}$.

Tähistame nüüd $\frac{|PA|}{|PB|} = \frac{|PC|}{|PD|} = k$, siis $|PA| = k \cdot |PB|$ ja $|PC| = k \cdot |PD|$. Sel juhul

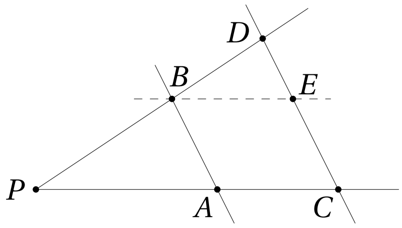
$$|AC| = |PC| - |PA| = k \cdot |PD| - k \cdot |PB| = k \cdot (|PD| - |PB|) = k \cdot |BD|$$

ehk $\frac{|AC|}{|BD|} = k$, nagu oligi teoreemi teise võrduse jaoks tarvis. □

Nüüd võime asuda teoreemi 27.1 tõestamise juurde.

Tõestus (Teoreem 27.1). Kiirteteoreemist saame, et joonisel 27.1 kehtib võrdus $\frac{|PA|}{|PC|} = \frac{|PB|}{|PD|}$. Teoreemi tõestamiseks tuleb lisaks näidata, et kehtib ka seos $\frac{|PB|}{|PD|} = \frac{|AB|}{|CD|}$.[1]

Tõmbame punktist B sirgega PC paralleelse sirge; lõigaku ta sirget CD punktis E.



Kuna $PC \parallel BE$, saame kiireteoreemi abil nurgast tipuga D võrdused

$$\frac{|PD|}{|CD|} = \frac{|PB|}{|CE|}.$$

Et ka $AB \parallel CE$, on $ACEB$ rööpkülik, järelikult $|CE| = |AB|$ ja

$$\frac{|PD|}{|CD|} = \frac{|PB|}{|AB|}, \quad \text{millest omakorda} \quad \frac{|AB|}{|CD|} = \frac{|PB|}{|PD|}.$$

Seda aga oligi teoreemi 27.1 tõestuse lõpetamiseks vaja. □

Kehtib ka kiirteteoreemi pöördteoreem.

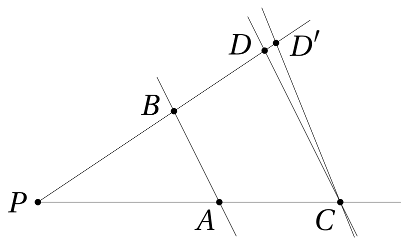
[1] Seda väidet tuntakse kooliõpikutes vahel ka *kiirteteoreemi järelduse* nime all.

Teoreem 27.3 Kui sirged lõikavad nurga haarasid nii, et ühel haaral tekkinud lõigud on võrdelised teise haara vastavate lõikudega, siis on lõikesirged paralleelsed.

Tõestus. Vaatleme nurka tipuga P ning olgu tema haaradel antud vastavalt punktid A, B, C, D nii, et $\frac{|PA|}{|PB|} = \frac{|PC|}{|PD|}$ (vt joonist). Tõmbame läbi punkti C sirgega AB paralleelse sirge ning lõigaku ta nurga teist haara punktis D'. Kiirteteoreemi põhjal teame, et kehtib võrdus $\frac{|PA|}{|PB|} = \frac{|PC|}{|PD'|}$, seega

$$|PD| = \frac{|PB| \cdot |PC|}{|PA|} = |PD'|.$$

Niisiis peavad punktid D ja D' tegelikult kokku langema, millest järeldubki teoreemi väide.



□

Teoreemide 27.1, 27.2 ja 27.3 järeldusena saame sõnastada järgmise tulemuse.

Teoreem 27.4 Olgu antud nurk tipuga P ning nurga haaradel vastavalt punktid A ja C ning B ja D. Siis $\triangle PAB \sim \triangle PCD$ parajasti siis, kui $AB \parallel CD$.

Sarnaste kolmnurkade tegelik jõud ülesannete lahendamisel seisneb selles, et nad võimaldavad siduda omavahel lõikude pikkuste suhteid ja nurkade suurusi. Nimelt selgub, et peale definitsiooni 27.1 leidub veel kaks mugavat tunnust kolmnurkade sarnasuse kindlakstegemiseks. Sõnastame selle tulemuse teoreemina.

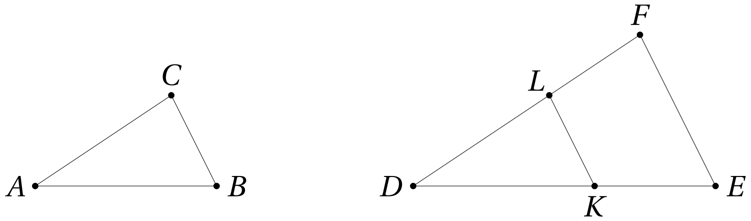
Teoreem 27.5 Olgu antud kaks kolmnurka. Järgmised tingimused on samaväärsed:

1. nende kolmnurkade küljed on vastavalt võrdelised (st kolmnurgad on sarnased; tunnus KKK),
2. nende kolmnurkade kaks paari külgi on vastavalt võrdelised ning nende külgede vahelised nurgad on võrdsed (tunnus KNK),
3. nende kolmnurkade nurgad on vastavalt võrdsed (tunnus NNN).

Tõestus. Anname tõestuse kolmes osas, näidates tingimustevahelised järelduvused 1. ⇒ 2., 2. ⇒ 3. ja 3. ⇒ 1..

$\boxed{1. \Rightarrow 2.}$ Olgu antud sarnased kolmnurgad ABC ja DEF nii, et $\frac{|AB|}{|DE|} = \frac{|BC|}{|EF|} = \frac{|CA|}{|FD|}$. Näitame, et $\angle CAB = \angle FDE$.

Valime kiirel DE niisuguse punkti K, et $|DK| = |AB|$, ning joonestame läbi selle punkti sirgega EF paralleelse sirge. Lõigaku ta sirget AC punktis L.



Kuna konstruktsiooni järgi $KL \parallel FE$, saame teoreemist 27.1, et $\triangle DKL \sim \triangle DEF$, st $\frac{|DK|}{|DE|} = \frac{|KL|}{|EF|} = \frac{|LD|}{|FD|}$. Kuna samuti konstruktsiooni põhjal $|DK| = |AB|$, saame kokkuvõttes võrduste ahela

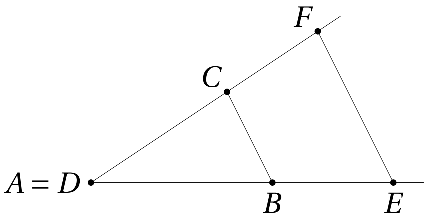
$$\frac{|KL|}{|EF|} = \frac{|LD|}{|FD|} = \frac{|DK|}{|DE|} = \frac{|AB|}{|DE|} = \frac{|BC|}{|EF|} = \frac{|CA|}{|FD|}.$$

Muuhulgas $\frac{|KL|}{|EF|} = \frac{|BC|}{|EF|}$ ja $\frac{|LD|}{|FD|} = \frac{|CA|}{|FD|}$, millest omakorda järelduvad võrdused $|KL| = |BC|$ ja $|LD| = |CA|$. Kokkuvõttes on kolmnurkade ABC ja DKL küljed vastavalt võrdsed, mistõttu ka need kolmnurgad ise on võrdsed. Järelikult

$$\angle FDE = \angle LDK = \angle CAB,$$

niisiis on kolmnurkade ABC ja DKE küljed AB ja DE ning AC ja DF vastavalt võrdelised ning tippude A ja D juures asuvad nurgad on võrdsed. Seega oleme tõestanud teoreemi 2. tingimuse kehtivuse.

$\boxed{2. \Rightarrow 3.}$ Rahuldagu kolmnurgad ABC ja DEF tingimusi $\frac{|AB|}{|DE|} = \frac{|CA|}{|FD|}$ ja $\angle CAB = \angle FDE$. Tänu nurkade võrdsusele saame kolmnurgad tasandil paigutada nii, et nende tipud A ja D langevad kokku, punkt B asub kiirel DE ning punkt C kiirel DE.



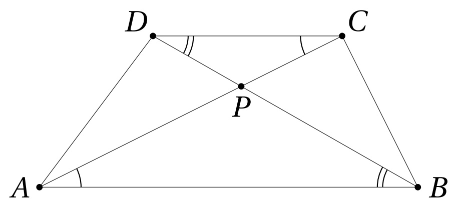
Näeme, et sirged BC ja EF lõikavad nurga haarasid nii, et tekivad võrdelised lõigud. Teoreemi 27.3 põhjal järeldub sellest, et $BC \parallel EF$. Muuhulgas tähendab see, et $\angle ABC = \angle DEF$ ja $\angle BCA = \angle EFD$, niisiis kehtib vaadeldavate kolmnurkade korral tingimus 3.

$\boxed{3. \Rightarrow 1.}$ Kehtigu kolmnurkade ABC ja DEF jaoks võrdused $\angle CAB = \angle FDE$, $\angle ABC = \angle DEF$ ja $\angle BCA = \angle EFD$. Sama moodi nagu tõestuse eelmises osas saame kolmnurgad tasandil paigutada nii, et nende tipud A ja D langevad kokku, punkt B asub kiirel DE ning punkt C kiirel DE (vt ka eelmise osa joonist). Muuhulgas järeldub tingimusest $\angle ABC = \angle DEF$, et $BC \parallel EF$. Teoreemi 27.1 abil saame nüüd aga järeldada 1. tingimuse kehtivuse. □

Kuna iga kolmnurga nurkade summa on 180°, piisab tunnuse NNN puhul muidugi ainult kahe nurga vastava võrdsuse näitamisest (mistõttu teda nimetatakse ka lihtsalt NN tunnuseks).

Teoreemi 27.5 kasutatakse sageli nii, et tõestatakse kahe kolmnurga sarnasus mingi tunnuse alusel ja siis kasutatakse mõnda teist tunnust uute seoste tuletamiseks.

Kasulik kujund, milles alati leidub kaks sarnast kolmnurka, on trapets. Vaatleme trapetsit alustega AB ja CD ning diagonaalide lõikepunktiga P.



Joonis 27.2

Tänu põiknurkade võrdsusele saame $\angle PAB = \angle PCD$ ja $\angle ABP = \angle CDP$, niisiis on kolmnurgad PAB ja PCD sarnased tunnuse NN põhjal. Siit saame tuletada vastavate külgede pikkuse võrdelisuse.

Ülesanne 27.1 (Lõppvoor 2013, 10. klass) Trapetsi $ABCD$ alused on AB ja CD ning diagonaalide lõikepunkt on P. Tõesta, et kui $\frac{|PA|}{|PD|} = \frac{|PB|}{|PC|}$, siis trapets $ABCD$ on võrdhaarne.

Lahendus. Kasutame joonist 27.2. Nagu nägime, kehtib $\triangle PAB \sim \triangle PCD$, mistõttu $\frac{|PA|}{|PC|} = \frac{|PB|}{|PD|}$ ehk $|PA| \cdot |PD| = |PB| \cdot |PC|$. Korrutades viimast võrdust ülesande võrdusega $\frac{|PA|}{|PD|} = \frac{|PB|}{|PC|}$ saame $|PA|^2 = |PB|^2$, millest järeldub $|PA| = |PB|$, st kolmnurk PAB on võrdhaarne. Kuna $\triangle PAB \sim \triangle PCD$, peab ka kolmnurk PCD olema võrdhaarne, st $|PC| = |PD|$.

Tippnurkade võrdsusest saame $\angle APD = \angle BPC$. Niisiis on kolmnurkadel APD ja BPC kaks vastavalt võrdset külge ja nende külgede vaheline võrdne nurk. Seega on need kolmnurgad võrdsed tunnuse KNK alusel, millest järeldubki $|AD| = |BC|$.

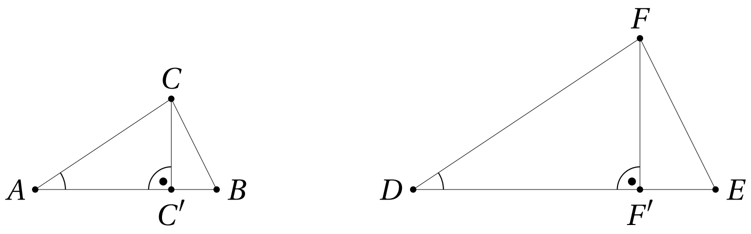
Kolmnurkade sarnasusest tulenevad seosed ei piirdu ainult külgede pikkuste suhete ja külgedevaheliste nurkade võrdsusega. Võrdelisteks osutuvad ka kõik teised vastavad joonmõõtmed ning võrdseteks kõik teised vastavad nurgad.

Selle väite üldkujuline tõestus eeldab ka sarnasuse defineerimist üldisemal kujul.[2] Iga konkreetse joonsuuruse või nurga kohta saab reeglina muidugi anda ka omaette tõestuse.

Vaatleme näiteks sarnaseid kolmnurki ABC ja DEF sarnasusteguriga $k = \frac{|FD|}{|CA|}$ ning näitame, et nende vastavatest tippudest C ja F tõmmatud kõrguste pikkuste suhe on samuti k.

Vaatleme kõigepealt olukorda, kus tippude A ja D juures on teravnurgad; siis satuvad kõrguste aluspunktid C' ja F' sirgetele AB ja DE nii, et punktid B ja C' (vastavalt E ja F') jäävad punktist A (vastavalt punktist D) samale poole (vt joonist).

[2]Üldjuhul nimetame sarnasteks tasandilisi kujundeid, mis on üksteiseks viidavad tasandi nihete, peegelduste, pöörete ja homoteetiate (vt jaotist 35) või nende mingi kombinatsiooni abil.



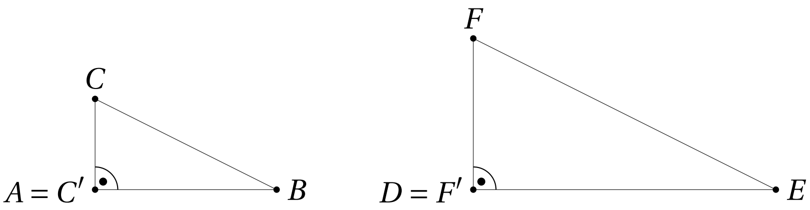
Järelikult saame nurkade võrdused $\angle CAC' = \angle CAB$ ja $\angle FDF' = \angle FDE$. Kuna kolmnurgad ABC ja DEF on sarnased, kehtib ka võrdus $\angle CAB = \angle FDE$, niisiis kokkuvõtteks $\angle CAC' = \angle FDF'$. Kuna lisaks $\angle AC'C = 90^\circ = \angle DF'F$, on kolmnurgad $AC'C$ ja $DF'F$ sarnased tunnuse NN alusel. Muuhulgas saame siit

$$\frac{|FF'|}{|CC'|} = \frac{|FD|}{|CA|} = k,$$

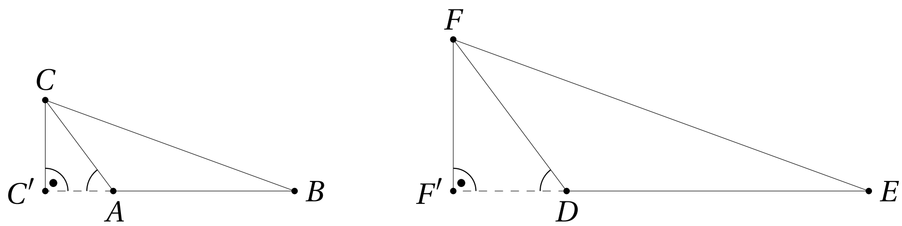
mida oligi tarvis.

Kui tippude A ja D juures on täisnurgad, saame $A = C'$ ja $D = F'$, nii et jälle

$$\frac{|FF'|}{|CC'|} = \frac{|FD|}{|CA|} = k.$$



Kui tippude A ja D juures on nürinurgad, tekib joonisel näidatud olukord, kus punkt A (vastavalt D) on punktide C' ja B (vastavalt F' ja E) vahel.



Nüüd saame sarnaselt esimese juhuga

$$\angle C'AC = 180^\circ - \angle CAB = 180^\circ - \angle FDE = \angle F'DF$$

ning $\angle CC'A = 90^\circ = \angle FF'D$. Niisiis on kolmnurgad ACC' ja DFF' sarnased tunnuse NN alusel, mistõttu

$$\frac{|FF'|}{|CC'|} = \frac{|FD|}{|CA|} = k.$$

Sellega on kõik võimalikud juhud läbi vaadatud.

Tõestatud väitest saame olulise järelduse sarnaste kolmnurkade pindalade suhte kohta. Eelpool sisseviidud tähistes võime kirjutada, et

$$|DE| = k \cdot |AB| \quad \text{ja} \quad |FF'| = k \cdot |CC'|,$$

mistõttu

$$S_{DEF} = \frac{|DE| \cdot |FF'|}{2} = \frac{k \cdot |AB| \cdot k \cdot |CC'|}{2} = k^2 \cdot \frac{|AB| \cdot |CC'|}{2} = k^2 \cdot S_{ABC}.$$

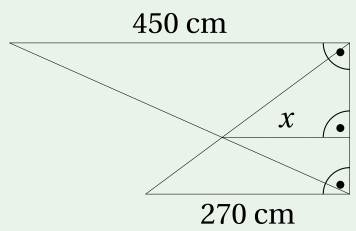
Kokkuvõttes oleme tõestanud järgmise tulemuse.[3]

Teoreem 27.6 Sarnaste kolmnurkade pindalad suhtuvad nagu nende sarnasusteguri ruut.

Ülesanded

Ülesanne 27.2 (Sügisene lahtine võistlus 2011, noorem rühm) Täisnurkse kolmnurga ABC kaatetile AB on joonistatud ristkülik $ABEF$, mille tipp F asub kaatetil AC. Olgu X ristküliku diagonaali AE ja kolmnurga hüpotenuusi BC lõikepunkt. Millises suhtes jaotab punkt X hüpotenuusi BC, kui on teada, et $|AC| = 3|AB|$ ja $|AF| = 2|AB|$?

Ülesanne 27.3 (Piirkonnavoor 1999, 9. klass) Arvuta joonisel märgitud lõigu x pikkus.



Ülesanne 27.4 (Piirkonnavoor 1998, 10. klass) Trapetsi $ABCD$ alustega AB ja CD paralleelne sirge lõikab selle haarasid AD ja BC vastavalt punktides E ja F. Trapetsi diagonaal AC poolitab lõigu EF. Tõesta, et lõik EF läbib trapetsi diagonaalide lõikepunkti.

Ülesanne 27.5 (Sügisene lahtine võistlus 1994, noorem rühm; talvine lahtine võistlus 2007, noorem rühm) Täisnurkse kolmnurga ABC hüpotenuusi AB keskpunkt on K. Kaatetil BC võetakse punkt M nii, et $|BM| = 2 \cdot |MC|$. Tõesta, et $\angle BAM = \angle CKM$.

Ülesanne 27.6 (Sügisene lahtine võistlus 2007, noorem rühm) Olgu M kolmnurga ABC mediaanide lõikepunkt ja D külje BC keskpunkt. Küljega BC paralleelne ja punkti M läbiv sirge lõikab külgi AB ja AC vastavalt punktides X ja Y. Sirgete XC ja MB lõikepunkt olgu Q ning sirgete YB ja MC lõikepunkt P. Tõesta, et kolmnurgad DPQ ja ABC on sarnased.

Ülesanne 27.7 (Sügisene lahtine võistlus 2001, vanem rühm) Kolmnurgas ABC on $\angle B = 2 \cdot \angle C$ ning tipust A tõmmatud nurgapoolitaja lõikab külge BC sellises punktis D, et $|AB| = |CD|$. Leia nurga $\angle A$ suurus.

[3]Tegelikult kehtib see teoreem kõigi (mõõtuvate) tasapinnaliste kujundite puhul. Hulknurki võib jaotada kolmnurkadeks, niisiis saab nende jaoks anda tõestuse teoreemi 27.6 abil kasutades matemaatilist induktsiooni. Üldjuhul tuleb aga kasutada kõrgema matemaatika meetodeid, mis jäävad selle õpiku raamidest kaugele välja.

Ülesanne 27.8 (Piirkonnavoor 1998, 11. klass) Võrdhaarses kolmnurgas ABC on aluse BC ja haara pikkuste suhe k. Sirgel AB võetakse punktist B erinev punkt D nii, et lõik CD on pikkuselt võrdne kolmnurga ABC alusega. Leia lõigu BD ja kolmnurga ABC haara pikkuste suhe.

Ülesanne 27.9 (Piirkonnavoor 2017, 11. klass) Kolmnurgas ABC kehtib $|BC| = 2|AB|$. Olgu D lõigu BC keskpunkt ja K lõigu BD keskpunkt. Tõesta, et $|AC| = 2|AK|$.

Ülesanne 27.10 (Piirkonnavoor 2002, 11. klass) Võrdhaarse kolmnurga haarale tõmmatud kõrgus jaotab haara suhtes $1:2$. Milline võib olla selle kolmnurga haara ja aluse pikkuste suhe?

Ülesanne 27.11 (Piirkonnavoor 2015, 11. klass)

a) Kas kõik sirged, mis jaotavad kolmnurga kaheks pindalalt võrdseks osaks, lõikuvad kolmnurga mediaanide lõikepunktis?

b) Kas kõik sirged, mis jaotavad rööpküliku kaheks pindalalt võrdseks osaks, lõikuvad rööpküliku diagonaalide lõikepunktis?

Ülesanne 27.12 (Lõppvoor 2003, 12. klass) Kolmnurgas ABC on $\angle C = 90^\circ$. Kiirel CB võetakse punkt D nii, et $|AC|\cdot|CD| = |BC|^2$. Läbi punkti D paralleelselt hüpotenuusiga AB tõmmatud sirge lõikab kiirt CA punktis E. Leia nurga BEC suurus.

Ülesanne 27.13 (Lõppvoor 1999, 12. klass) Tõesta, et teravnurkse kolmnurga ABC kõrguste lõikepunkti ja mediaanide lõikepunkti ühendav lõik on paralleelne kolmnurga küljega AB siis ja ainult siis, kui $\tan\angle A \cdot \tan\angle B = 3$.

Märkus: lõigu pikkusega 0 loeme paralleelseks mistahes sirgega.

Ülesanne 27.14 (Lõppvoor 2001, 11. klass) Kolmnurga ABC külgedel BC, CA ja AB võetakse vastavalt punktid D, E ja F nii, et lõikudel AD, BE ja CF on ühine punkt O. Tõesta, et

$$\frac{|AO|}{|OD|} = \frac{|AE|}{|EC|} + \frac{|AF|}{|FB|}.$$

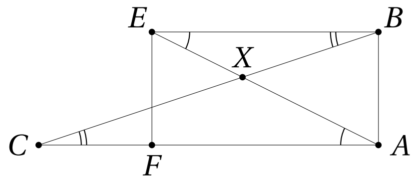
Ülesanne 27.15 (Lõppvoor 2009, 12. klass) Tõesta, et rööpküliku diagonaalide pikkuste suhe on võrdne külgede pikkuste suhtega parajasti siis, kui diagonaalide lõikumisel tekkivad nurgad on võrdsed rööpküliku sisenurkadega.

Vaata ka ülesandeid 34.3, 26.9, 29.11, 29.12, 36.2, 39.7, 29.14 ja 32.9.

Lahendused

27.2 Vastus: $2:3$.

Teeme joonise.

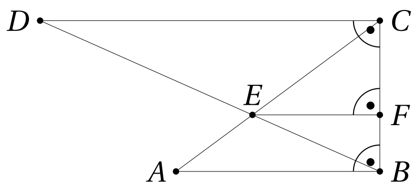


Kuna $ABEF$ on ristkülik, saame $EB \parallel AC$. Põiknurkade võrdsusest järelduvad nüüd võrdused $\angle BEX = \angle BEA = \angle CAE = \angle CAX$ ja $\angle XBE = \angle CBE = \angle BCA = \angle XCA$. Seega on kolmnurgad XBE ja XCA sarnased tunnuse NN alusel. Järelikult peavad nende vastavad küljed olema võrdelised, st

$$\frac{|XB|}{|XC|} = \frac{|BE|}{|CA|} = \frac{|AF|}{|AC|} = \frac{2|AB|}{3|AB|} = \frac{2}{3}.$$

27.3 Vastus: $x = 168{,}75$ cm.

Tähistame punktid nii nagu näidatud joonisel.



Kuna $AB \parallel EF \parallel DC$, saame kiirteteoreemist, et $\triangle CEF \sim \triangle CAB$ ja $\triangle BEF \sim \triangle BDC$. Kolmnurkade CEF ja CAB sarnasusest saame

$$\frac{|EF|}{|AB|} = \frac{|CF|}{|CB|},$$

kolmnurkade BEF ja BDC sarnasusest aga

$$\frac{|EF|}{|DC|} = \frac{|FB|}{|CB|}.$$

Tuletatud võrduste liitmine annab

$$\frac{|EF|}{|AB|} + \frac{|EF|}{|DC|} = \frac{|CF|}{|CB|} + \frac{|FB|}{|CB|} = \frac{|CF| + |FB|}{|CB|} = \frac{|CB|}{|CB|} = 1,$$

kust leiame

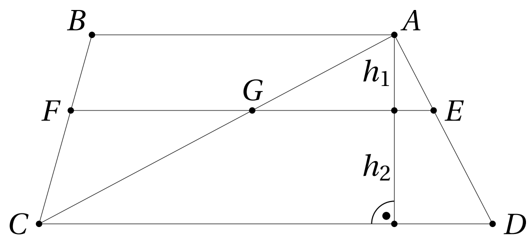
$$|EF|\left(\frac{1}{|AB|} + \frac{1}{|CD|}\right) = 1.$$

Järelikult

$$x = |EF| = \frac{1}{\frac{1}{|AB|} + \frac{1}{|CD|}} = \frac{1}{\frac{1}{270} + \frac{1}{450}} = \frac{1}{\frac{5+3}{1350}} = \frac{1350}{8} = 168{,}75 \text{ cm}.$$

27.4 Liigutades lõiku EF paralleelselt trapetsi ühe või teise aluse poole, on selge, et leidub täpselt üks asend, kus diagonaal selle lõigu poolitab. Uurime, kui kaugel lõik EF selles asendis alustest on.

Tõmbame trapetsile kõrguse ning jagagu lõik EF selle kõrguse lõikudeks pikkustega h_1 ja h_2.



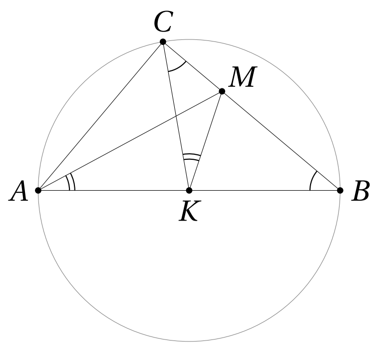
Teoreemi 27.1 põhjal on $\triangle AGE \sim \triangle ACD$, mistõttu $\frac{|GE|}{|CD|} = \frac{h_1}{h_1+h_2}$ ehk $|GE| \cdot (h_1+h_2) = |CD| \cdot h_1$. Sama moodi kehtib ka $\triangle CGF \sim \triangle CAB$, millest järeldub võrdus $\frac{|GF|}{|AB|} = \frac{h_2}{h_1+h_2}$ ehk $|GF| \cdot (h_1+h_2) = |AB| \cdot h_2$.

Diagonaal AC poolitab lõigu EF parajasti siis, kui $|GE| = |GF|$, mis on omakorda samaväärne võrdustega

$$|GE| \cdot (h_1+h_2) = |GF| \cdot (h_1+h_2)\,,$$
$$|CD| \cdot h_1 = |AB| \cdot h_2\,,$$
$$\frac{|AB|}{|CD|} = \frac{h_1}{h_2}\,.$$

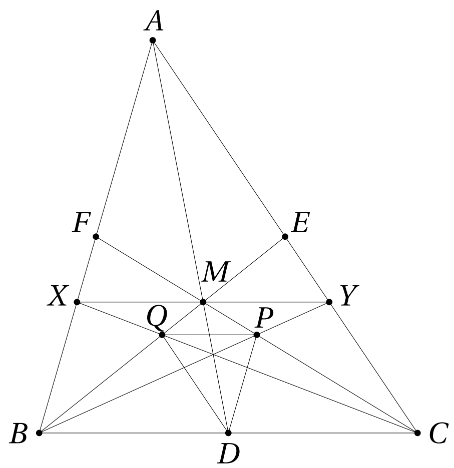
Viimane võrdus ei sõltu diagonaali valikust, st ka diagonaal BD poolitab lõigu EF parajasti siis, kui $\frac{|AB|}{|CD|} = \frac{h_1}{h_2}$. See aga tähendab, et diagonaalid AC ja BD lõikuvad lõigu EF keskpunktis, millest järeldubki ülesande väide.

27.5 Täisnurkse kolmnurga hüpotenuusi keskpunkt on ühtlasi tema ümberringjoone keskpunkt (vaata järeldust 28.2).



Lõigud KB ja KC on selle ringjoone raadiused, järelikult on kolmnurk KBC võrdhaarne ja $\angle KBC = \angle BCK$. Kuna AB on diameeter, siis $|AB| = 2 \cdot |KC|$. Ülesande tingimuste põhjal lisaks $|BM| = 2 \cdot |MC|$. Niisiis on kolmnurgad ABM ja KCM sarnased sarnastusteguriga 2 tunnuse KNK põhjal, millest järeldub omakorda teiste nurgaapaaride võrdsus. Muuhulgas saame $\angle BAM = \angle CKM$, nagu oligi tarvis.

27.6 Olgu külgede AC ja AB keskpunktid vastavalt E ja F. Teeme joonise.

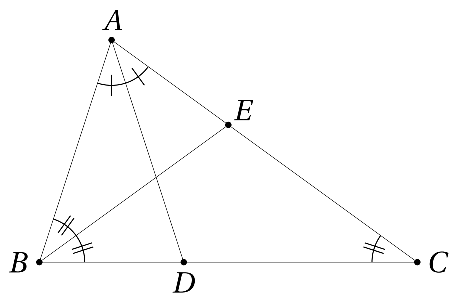


Kuna $XY \parallel BC$, on kolmnurgad AMY ja ADC teoreemi 27.1 põhjal sarnased. Et M on kolmnurga ABC mediaanide lõikepunkt, kehtib $\frac{|AM|}{|MD|} = \frac{2}{1}$. Kolmnurkade AMY ja ADC sarnasusest järeldub, et siis ka $\frac{|AY|}{|YC|} = \frac{2}{1}$. Ülesande 26.4 tulemuse põhjal saame nüüd, et sirge BY poolitab mediaani CF. Niisiis on DP kolmnurga BCF kesklõik ning järelikult $DP \parallel AB$ ja $|DP| = \frac{|BF|}{2} = \frac{|AB|}{4}$. Sama moodi tõestame, et $DQ \parallel AC$ ja $|DQ| = \frac{|CE|}{2} = \frac{|AC|}{4}$.

Paralleelsustest $DP \parallel AB$ ja $DQ \parallel AC$ järeldub, et $\angle QDP = \angle CAB$, niisiis on kolmnurkadel DPQ ja ABC üks võrdne nurk ning nende nurkade juures olevad küljed on vastavalt võrdelised teguriga $\frac{1}{4}$. Järelikult on need kolmnurgad sarnased tunnuse KNK põhjal.

27.7 Vastus: $72°$.

Olgu E tipust B tõmmatud nurgapoolitaja lõikepunkt küljega AC.



Ülesande tingimuste põhjal $\angle ABE = \angle BCA$. Kuna nurk tipu A juures langeb kolmnurkadel ABC ja AEB kokku, on need kolmnurgad sarnased tunnuse NN põhjal. Järelikult on nende vastavad küljed võrdelised:

$$\frac{|AC|}{|AB|} = \frac{|BC|}{|EB|}. \tag{27.1}$$

Kuna ka $\angle EBC = \angle BCE$, on kolmnurk BCE võrdhaarne, st $|EB| = |EC|$. Lisaks kehtib ülesande tingimuste põhjal võrdus $|AB| = |CD|$, seega saame võrde (27.1) kirjutada kujul

$$\frac{|AC|}{|CD|} = \frac{|BC|}{|EC|} \quad \text{ehk} \quad \frac{|AC|}{|BC|} = \frac{|CD|}{|EC|}.$$

Niisiis on kolmnurkadel ADC ja BEC vastavalt võrdelised küljed ja nende vahel ühine nurk tipu C juures. Järelikult $\triangle ADC \sim \triangle BEC$ tunnuse KNK põhjal, millest omakorda saame, et $\angle CAD = \angle EBC$.

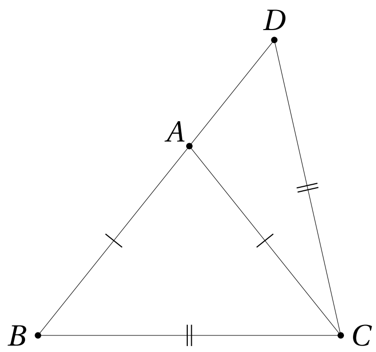
Kokkuvõttes on kolmnurk ABC võrdhaarne. Tähistades tipunurka $\angle BCA = \gamma$, saame $\angle CAB = \angle ABC = 2\gamma$. Kuna kolmnurga nurkade summa moodustab $180°$, võime nüüd leida

$$\begin{aligned}
\angle BCA + \angle CAB + \angle ABC &= 180°, \\
\gamma + 2\gamma + 2\gamma &= 180°, \\
5\gamma &= 180°, \\
\gamma &= 36°,
\end{aligned}$$

kust omakorda $\angle CAB = 2 \cdot 36° = 72°$.

27.8 Vastus: k^2.

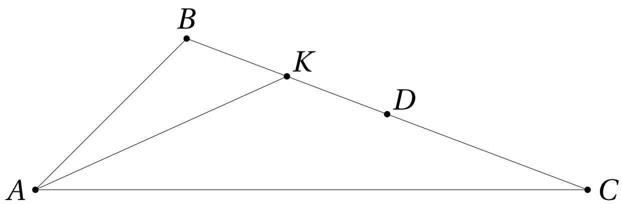
Teeme joonise.



Ülesande tingimuste põhjal on ABC ja CBD võrdhaarsed kolmnurgad, kusjuures neil on tipu B juures ühine alusnurk. Järelikult on nende kolmnurkade nurgad paarikaupa võrdsed ja NNN tunnuse alusel saame $\triangle ABC \sim \triangle CBD$. Seega

$$\frac{|BD|}{|BC|} = \frac{|BC|}{|BA|}, \quad \text{millest} \quad \frac{|BD|}{|BA|} = \frac{|BC|^2}{|BA|^2} = k^2.$$

27.9 Teeme joonise.



Ülesande tingimuste põhjal

$$|KB| = \frac{|BD|}{2} = \frac{|BC|}{4} = \frac{|AB|}{2}.$$

Kolmnurkadel ABC ja KBA on ühine nurk tipu B juures ning lisaks

$$\frac{|AB|}{|KB|} = 2 = \frac{|BC|}{|BA|}.$$

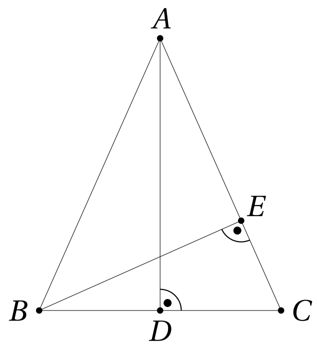
Järelikult on need kolmnurgad sarnased tunnuse KNK põhjal, mistõttu ka

$$\frac{|AC|}{|KA|} = \frac{|AB|}{|KB|} = 2.$$

27.10 Vastus: $\sqrt{\frac{3}{2}}$ ja $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Olgu vaadeldav võrdhaarne kolmnurk ABC. Olgu tema tipunurgast A tõmmatud kõrguse aluspunkt D ning tipust B tõmmatud kõrguse aluspunkt E. Kuna kolmnurk on võrdhaarne, poolitab kõrgus AD ühtlasi aluse BC (vt teoreem 33.1).

Ülesande tekstile vastab kaks võimalikku olukorda. Vaatleme kõigepealt juhtu $|AE| = 2|EC|$ (ehk $|AC| = 3|EC|$).



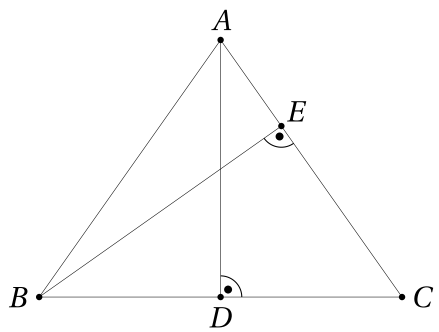
Kolmnurkadel ADC ja BEC on üks ühine nurk tipu C juures ning kummalgi on ka üks täisnurk. Seega on need kolmnurgad sarnased ja vastavate külgede võrdelisusest saame

$$\frac{|DC|}{|EC|} = \frac{|AC|}{|BC|} = \frac{3|EC|}{2|DC|}.$$

Järelikult $2|DC|^2 = 3|EC|^2$, millest $\dfrac{|EC|}{|DC|} = \sqrt{\dfrac{2}{3}}$ ja

$$\frac{|AC|}{|BC|} = \frac{3}{2} \cdot \frac{|EC|}{|DC|} = \frac{3}{2} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} = \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Teine võimalus on $2|AE| = |EC|$ (ehk $|AC| = 1{,}5|EC|$).



Analoogiliselt esimese juhuga saame $\triangle ADC \sim \triangle BEC$, mis nüüd annab

$$\frac{|DC|}{|EC|} = \frac{|AC|}{|BC|} = \frac{1{,}5|EC|}{2|DC|} = \frac{3|EC|}{4|DC|}.$$

Järelikult $4|DC|^2 = 3|EC|^2$, millest $\dfrac{|EC|}{|DC|} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$ ja

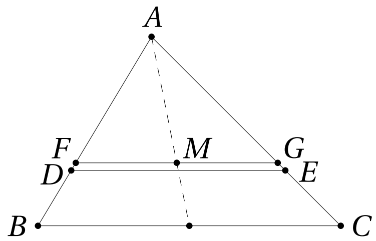
$$\frac{|AC|}{|BC|} = \frac{1{,}5}{2} \cdot \frac{|EC|}{|DC|} = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

27.11 Vastus: a) ei; b) jah.

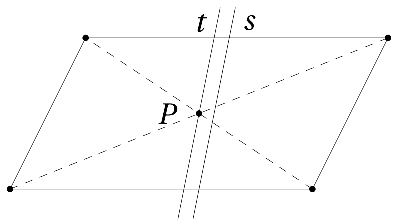
a) Mediaanid jagavad teoreemi 26.1 põhjal kolmnurga kaheks võrdpindseks osaks, aga nad läbivad muidugi ka mediaanide lõikepunkti, nii et a)-osa kontranäiteks nad ei sobi. Küll aga annavad kontranäite külgedega paralleelsed sirged.

Vaatleme suvalist kolmnurka ABC ning võtame külgedel AB ja AC vastavalt punktid D ja E nii, et $BC \parallel DE$ ning $S_{ABC} = 2S_{ADE}$. Kolmnurgad ABC ja ADE on teoreemi 27.1 põhjal sarnased. Kuna sarnaste kolmnurkade pindalad suhtuvad nagu sarnasusteguri ruut, peab nende sarnasusteguriks olema $\frac{|AB|}{|AD|} = \frac{|AC|}{|AE|} = \sqrt{2}$.

Näitame, et sirge DE ei läbi kolmnurga ABC mediaanide lõikepunkti. Selleks võtame külgedel AB ja AC vastavalt punktid F ja G nii, et $BC \parallel FG$ ja sirge FG läbib mediaanide lõikepunkti M. Teoreemi 27.1 põhjal saame $\triangle ABC \sim \triangle AFG$. Kuna mediaanide lõikepunkt jagab mediaani suhtes $2:1$, kehtib ka $\frac{|AF|}{|FB|} = \frac{|AG|}{|GC|} = \frac{2}{1}$, millest omakorda järeldub, et $\frac{|AB|}{|AF|} = \frac{|AC|}{|AG|} = \frac{3}{2}$. Kuna $\sqrt{2} \neq \frac{3}{2}$, ei saa DE olla see küljega BC paralleelne sirge, mis läbib mediaanide lõikepunkti.

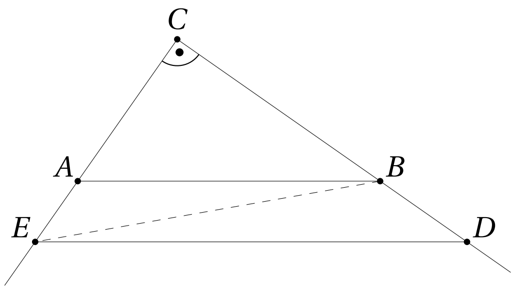


b) Rööpkülik on oma diagonaalide lõikepunkti P suhtes tsentraalsümmeetriline. Seega jagab iga punkti P läbiv sirge rööpküliku kaheks võrdpindseks tükiks. Oletame vastuväiteliselt, et leidub veel mõni sama omadusega sirge s, mis punkti P ei läbi. Tõmbame läbi punkti P sirgega s paralleelse sirge t. Eelpoolöeldu põhjal peab ka sirge t jagama rööpküliku kaheks võrdse pindalaga tükiks. Kokkuvõttes oleks meil kaks erinevat paralleelset sirget, mis mõlemad poolitavad rööpküliku pindala; vastuolu.



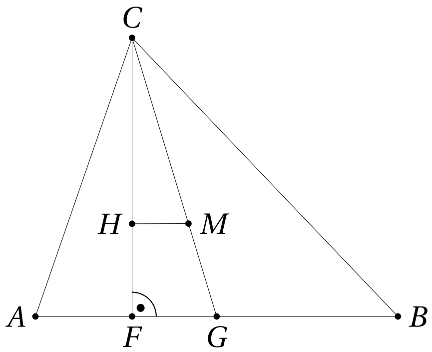
27.12 Vastus: 45°.

Teeme joonise.



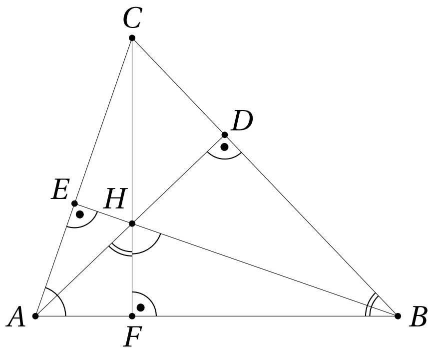
Vastavalt ülesande tingimustele $\frac{|AC|}{|BC|} = \frac{|BC|}{|CD|}$. Teisest küljest kiirteteoreemi põhjal $\frac{|BC|}{|CD|} = \frac{|AC|}{|CE|}$; niisiis $\frac{|AC|}{|BC|} = \frac{|AC|}{|CE|}$, millest järeldub $|BC| = |CE|$. Kokkuvõttes on BCE täisnurkne võrdhaarne kolmnurk teravnurgaga $\angle BEC = 45^\circ$.

27.13 Olgu kolmnurga ABC kõrguste lõikepunkt H, mediaanide lõikepunkt M, tipust C tõmmatud kõrguse aluspunkt F ning külje AB keskpunkt G.



Näeme, et $HM \parallel AB$ parajasti siis, kui kolmnurgad CHM ja CFG on sarnased. Kuna M on mediaanide lõikepunkt, siis $\frac{|CG|}{|MG|} = 3$. Järelikult $\triangle CHM \sim \triangle CFG$ parajasti siis, kui $\frac{|CF|}{|HF|} = 3$. (Erijuhul, kui tipust C tõmmatud kõrgus ja mediaan langevad kokku, saame $H = M$, mis annab samuti sama võrduse.)

Vaatleme nüüd lisaks kolmnurga tippudest A ja B tõmmatud kõrgusi; olgu nende aluspunktid vastavalt D ja E.



Suuruse $\tan \angle A$ saame leida täisnurkse kolmnurga kaatetite suhtena, kui selle kolmnurga üks teravnurk on $\angle A$. Esimese hooga hakkab sobivaid kolmnurki joonistelt silma kaks: ACF ja ABE. Hoolikamal uurimisel leiame aga veel kolmandagi nendega sarnase kolmnurga, nimelt HBF. Tõepoolest,

$$\angle BHF = 90^\circ - \angle FBH = 90^\circ - \angle ABE = \angle A,$$

lisaks muidugi $\angle HFB = 90^\circ$. Niisiis saame

$$\tan \angle A = \frac{|CF|}{|AF|} = \frac{|BE|}{|AE|} = \frac{|BF|}{|HF|}.$$

Analoogiliselt näeme, et $\triangle BCF \sim \triangle BAD \sim \triangle HAF$ on täisnurksed kolmnurgad teravnurgaga $\angle B$, mistõttu

$$\tan \angle B = \frac{|CF|}{|BF|} = \frac{|AD|}{|BD|} = \frac{|AF|}{|HF|}.$$

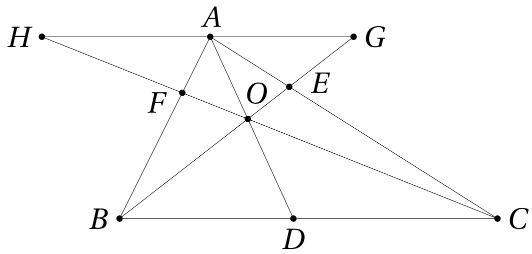
Võrduste $\tan\angle A = \dfrac{|CF|}{|AF|}$ ja $\tan\angle B = \dfrac{|AF|}{|HF|}$ korrutamine annab

$$\tan\angle A \cdot \tan\angle B = \frac{|CF|}{|HF|}.$$

Eespool nägime, et tingimus $HM \parallel AB$ on samaväärne tingimusega $\dfrac{|CF|}{|HF|} = 3$, mistõttu ta on samaväärne ka tingimusega $\tan\angle A \cdot \tan\angle B = 3$.

27.14 Üldjuhul ei teki selle ülesande joonist tehes ühtegi paari sarnaseid kolmnurki. Küll aga esinevad tekstis lõikude suhted, mis viitab, et kuidagimoodi peaks sarnastest kolmnurkadest olema võimalik kasu lõigata.

Lahenduse võtmeks on leida lisakonstruktsioon, mis tekitab joonisele kaks sarnast kolmnurka, milledes AO ja OD on vastavad lõigud. Sobiva konstruktsiooni annab homoteetne teisendus keskpunktiga O ning kordajaga $-\dfrac{|AO|}{|OD|}$ (homoteetia kohta loe rohkem jaotisest 35). See teisendus viib punkti D punktiks A; viigu ta lisaks punktid B ja C vastavalt punktideks G ja H. Siis muuhulgas $GH \parallel BC$ ja $\dfrac{|AO|}{|OD|} = \dfrac{|GH|}{|BC|}$.

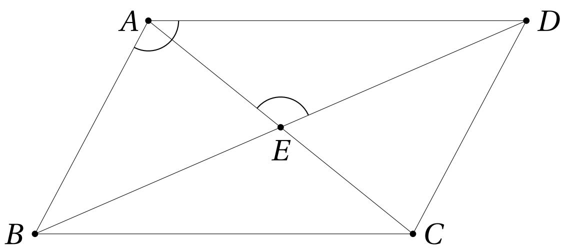


Põiknurkade võrdsusest saame $\angle EGA = \angle EBC$ ja $\angle GAE = \angle BCE$. Järelikult on kolmnurgad EGA ja EBC sarnased, mistõttu $\dfrac{|AE|}{|EC|} = \dfrac{|GA|}{|BC|}$. Sama moodi on sarnased ka kolmnurgad FAH ja FBC, kust saame $\dfrac{|AF|}{|FB|} = \dfrac{|AH|}{|BC|}$. Kokkuvõttes

$$\frac{|AO|}{|OD|} = \frac{|GH|}{|BC|} = \frac{|GA|+|AH|}{|BC|} = \frac{|GA|}{|BC|} + \frac{|AH|}{|BC|} = \frac{|AE|}{|EC|} + \frac{|AF|}{|FB|},$$

mida oligi tarvis tõestada.

27.15 Tähistame rööpküliku tipud A, B, C, D nii, et $|AB| \leqslant |AD|$ ja $|AC| \leqslant |BD|$. Siis $\angle ABC \leqslant 90^\circ \leqslant \angle DAB$. Tähistame rööpküliku diagonaalide lõikepunkti E, mis on muidugi ka mõlema diagonaali keskpunkt.



Koosinusteoreemi põhjal

$$\begin{aligned}|AB|^2 &= |AE|^2+|BE|^2-2\cdot|AE|\cdot|BE|\cdot\cos\angle BEA,\\ |AD|^2 &= |AE|^2+|DE|^2-2\cdot|AE|\cdot|DE|\cdot\cos\angle AED=\\ &= |AE|^2+|BE|^2-2\cdot|AE|\cdot|BE|\cdot\cos(180^\circ\angle BEA)=\\ &= |AE|^2+|BE|^2+2\cdot|AE|\cdot|BE|\cdot\cos\angle BEA.\end{aligned}$$

Kuna $|AB|^2 \leqslant |AD|^2$, siis $\cos\angle BEA \geqslant 0$, millest järeldub, et $\angle BEA \leqslant 90^\circ \leqslant \angle AED$.

Seega juhul, kui rööpküliku sisenurgad on võrdsed diagonaalide lõikumisel tekkivate nurkadega, peab kehtima võrdus $\angle AED = \angle DAB$. Kuna kolmnurkadel AED ja BAD on tipu D juures sama nurk, saame vaadeldaval juhul $\triangle AED \sim \triangle BAD$. Järelikult peavad nende kolmnurkade vastavad küljed olema võrdelised, st

$$\frac{|AB|}{|AD|}=\frac{|EA|}{|ED|}=\frac{|AC|}{|BD|},$$

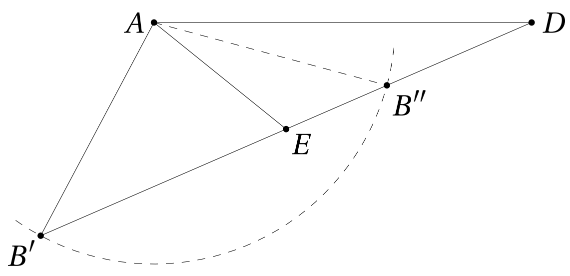
nagu oligi tarvis.

Veel tuleb tõestada vastupidine järeldus. Eeldame võrdust

$$\frac{|AB|}{|AD|}=\frac{|AC|}{|BD|}=\frac{|EA|}{|ED|}$$

ning näitame, et $\angle AED = \angle DAB$. Selleks piisab tõestada, et kolmnurgad AED ja BAD on sarnased. Nende nurgad tipu D juures on jällegi samad, kuid sellest ei piisa teoreemi 27.5 kasutamiseks, sest tegemist pole võrde $\frac{|AB|}{|AD|}=\frac{|EA|}{|ED|}$ vastavate külgede vahelise nurgaga.

Uurime olukorda lähemalt. Olgu nurk tipu D juures fikseeritud ning fikseerime ka punktid A ja E selle nurga erinevatel haaradel. Mitu erinevat punkti B saab sirgel ED valida nii, et $\frac{|AB|}{|AD|}=\frac{|EA|}{|ED|}$? Kuna punktid A, D ja E on fikseeritud, saab $|AB| = |AD|\cdot\frac{|EA|}{|ED|}$ omada vaid üht võimalikku väärtust. See tähendab, et punkt B saab olla ainult sirge ED lõikepunkt ringjoonega, mille keskpunkt on A ning raadius $|AB|$. Järelikult saab leiduda ülimalt kaks niisugust punkti; tähistame neid B' ja B''.



On selge, et kiirel DE leidub parajasti üks punkt B, mille korral $\triangle AED \sim \triangle BAD$. Kuna sellise punkti B jaoks kehtib võrdus $\frac{|AB|}{|AD|}=\frac{|EA|}{|ED|}$, peab B langema kokku ühega punktidest B' ja B''. Tuletame meelde, et tänu rööpküliku tippude tähistuste valikule saime $\angle AED \geqslant 90^\circ$ ja $\angle DAB \geqslant 90^\circ$. Jääb veel tähele panna, et võrratustest $\angle DAB' \geqslant 90^\circ$ ja $\angle DAB'' \geqslant 90^\circ$ saab kehtida ainult üks. Niisiis peab joonise tähistes kehtima $B = B'$ ja ühtlasi ka $\triangle AED \sim \triangle BAD$.