27. Neli punkti ühel ringjoonel

Läbi kolme punkti (mis ei asu just ühel sirgel) saab alati tõmmata ringjoone. Neli punkti ei asu ühel ringjoonel sugugi alati, aga kui nad asuvad, siis on see väga võimas omadus, mis geomeetriaülesannete lahendamisel sageli kasulikuks osutub. Selles jaotises tutvumegi põhiliste olukordadega, millal neli punkti ühele ringjoonele satuvad, ja õpime seda omadust ülesannete lahendamisel ära kasutama.

27.1 Kõõlnelinurga tarvilikud ja piisavad tingimused

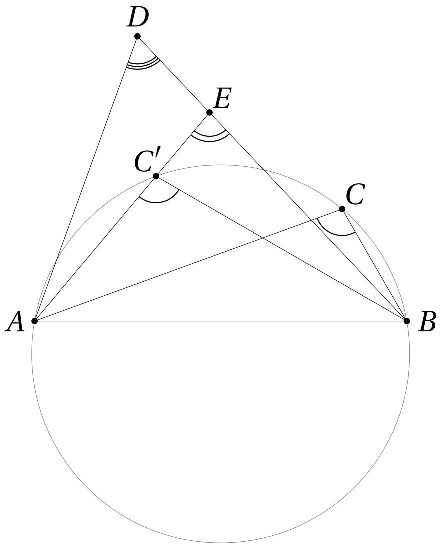
Jaotises 26 tõestasime järelduse 26.1, mille kohaselt samale kõõlule (või kaarele) samalt poolt toetuvad piirdenurgad on võrdsed. Sõnastame ja tõestame nüüd selle väite üldistuse.

Teoreem 27.1 Vaatleme kolmnurka ABC ning punkti D, mis asub sirgest AB samal pool kui punkt C. Kehtivad järgmised väited.

1. Punkt D asub kolmnurga ABC ümberringjoonest väljaspool parajasti siis, kui $\angle ACB > \angle ADB$.
2. Punkt D asub kolmnurga ABC ümberringjoonel parajasti siis, kui $\angle ACB = \angle ADB$.
3. Punkt D asub kolmnurga ABC ümberringjoone sisepiirkonnas parajasti siis, kui $\angle ACB < \angle ADB$.

Tõestus. Uurime kõigepealt juhtu, kus D asub kolmnurga ABC ümberringjoonest väljas. Leiame sellel ringjoonel niisuguse punkti C', mis asub kolmnurga ABD sisepiirkonnas. On lihtne mõista, et selline punkt C' on alati olemas ning ta jääb sirgest AB samale poole kui punkt C. Järelduse 26.1 põhjal teame, et $\angle ACB = \angle AC'B$.

Pikendame lõiku AC' kuni lõikumiseni küljega BD punktis E.



Siis

$$\angle AC'B = 180^\circ - \angle BC'E = \angle C'EB + \angle EB'C > \angle C'EB\,.$$

Sama moodi saame

$$\angle C'EB = 180^\circ - \angle DEA = \angle ADE + \angle EAD > \angle ADE = \angle ADB\,.$$

Kokkuvõttteks oleme näidanud, et

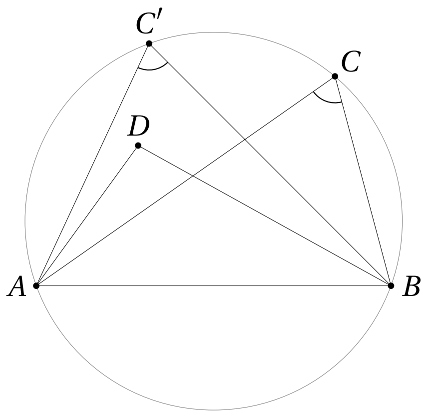
$$\angle ACB = \angle AC'B > \angle C'EB > \angle ADB\,,$$

mida oligi tarvis.

Teisel juhul, kui punkt D asub kolmnurga ABC ümberringjoonel, saame järeldusest 26.1, et $\angle ACB = \angle ADB$.

Kolmandaks uurime juhtu, kus punkt D asub kolmnurga ABC ümberringjoone sisepiirkonnas. Leiame sellel ringjoonel niisuguse punkti C', et D asuks kolmnurga ABC' sisepiirkonnas. On lihtne mõista, et selline punkt C' on alati olemas ning ta jääb sirgest AB samale poole kui punkt C. Nüüd saame eelpooltõestatuga analoogiliselt näidata, et

$$\angle ACB = \angle AC'B < \angle ADB\,.$$



Praeguseks hetkeks oleme tõestanud teoreemi kolme väite tarvilikkuse suuna. Piisavus järeldub tähelepanekust, et iga punkt sirgega AB eraldatud pooltasandist langeb täpselt ühte vaadeldud kategooriatest. Näiteks kui kehtib võrratus $\angle ACB > \angle ADB$, ei saa punkt D asuda kolmnurga ABC ümberringjoonel (sest siis peaks kehtima $\angle ACB = \angle ADB$) ega selle sees (sest siis peaks kehtima $\angle ACB < \angle ADB$). Niisiis peab ta asuma kolmnurga ABC ümberringjoonest väljas. Sama moodi näitame piisavusesuuna ka teoreemi teiste väidete jaoks. □

Nüüd oleme valmis sõnastama ja tõestama põhilise tulemuse, mis kirjeldab tarvilikke ja piisavaid tingimusi nelja punkti asumiseks ühel ringjoonel.

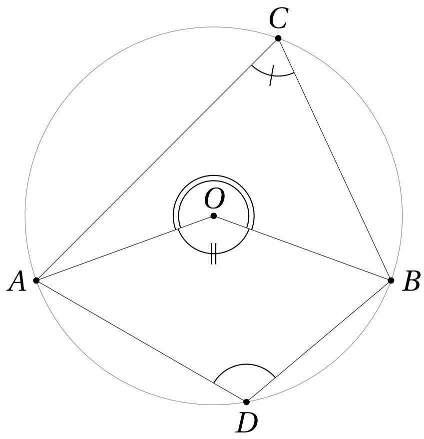
Teoreem 27.2 Vaatleme tasandil punkte A, B, C ja D.

1. Kui C ja D jäävad sirgest AB samale poole, asuvad punktid A, B, C ja D ühel ringjoonel parajasti siis, kui $\angle ACB = \angle ADB$.
2. Kui C ja D jäävad sirgest AB erinevale poole, asuvad punktid A, B, C ja D ühel ringjoonel parajasti siis, kui $\angle ACB + \angle ADB = 180°$.

Tõestus. 1. Tegemist on teoreemis 27.1 tõestatud 2. punkti ümbersõnastusega.

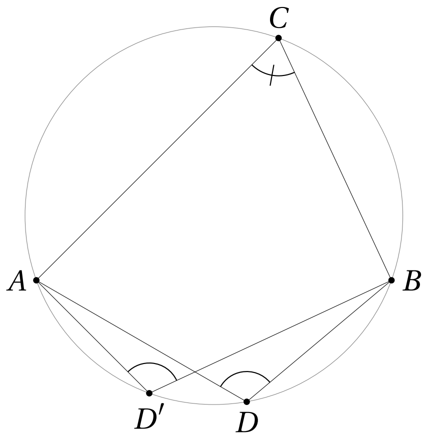
2. ⇒ Asugu punktid A, B, C ja D ühel ringjoonel keskpunktiga O. Kesk- ja piirdenurga omadusest saame

$$\angle ACB + \angle ADB = \frac{1}{2}\angle AOB + \frac{1}{2}\angle BOA = \frac{1}{2}(\angle AOB + \angle BOA) = \frac{1}{2}\cdot 360° = 180°.$$



⇐ Eeldame, et kehtib võrdus $\angle ACB + \angle ADB = 180°$. Joonestame kolmnurgale ABC ümberringjoone ning valime suvalise punkti D' sellel kaarel AB, kus ei ole punkti C. Muuhulgas tähendab see, et punktid C ja D' jäävad sirgest AB erinevale poole, mistõttu punktid D ja D' asuvad sirgest AB samal pool.

Ülaltõestatu põhjal siis $\angle ACB + \angle AD'B = 180°$. Eeldusest teame samas, et $\angle ACB + \angle ADB = 180°$, järelikult $\angle ADB = \angle AD'B$. Teoreemist 27.1 saame, et sel juhul asuvad punktid A, B, D ja D' ühel ringjoonel. Selsamal ringjoonel kui kolmnurga ABD' ümberringjoonel asub ka punkt C.



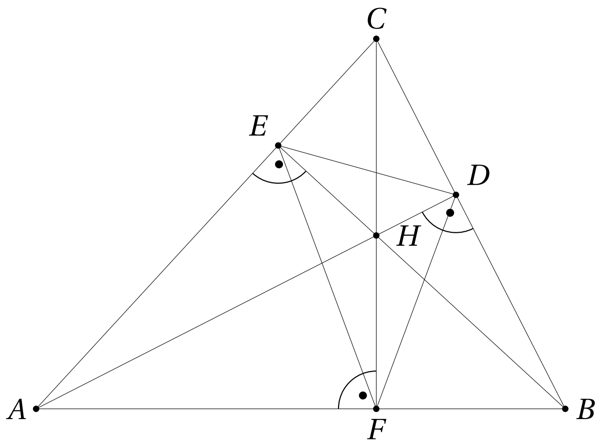
□

Näeme, et teoreem 27.2 üldistab järeldust 26.3. Kui ühele lõigule toetub kaks täisnurka, siis ühest küljest on nad võrdsed, aga teisest küljest on nende summa 180°. Mõlemal juhul asuvad vaadeldava lõigu otspunktid ja nende täisnurkade tipud ühel ringjoonel.

Teoreemi 27.2 kasutatakse ülesannetes sageli nii, et tõestatakse tema ühe poole järgi nelja punkti asumine ühel ringjoonel ja kasutatakse siis seda fakti teoreemi teise osa abil mingite nurkade suuruste kohta järelduste tegemiseks.

Ülesanne 27.1 Olgu teravnurkse kolmnurga ABC kõrguste lõikepunkt H ning tippudest A, B, C tõmmatud kõrguste aluspunktid vastavalt D, E, F. Tõesta, et punkt H on kolmnurga DEF siseringjoone keskpunkt.

Lahendus. Teeme joonise. Kui mitu ühel ringjoonel asuvat punktinelikut suudad jooniselt leida?

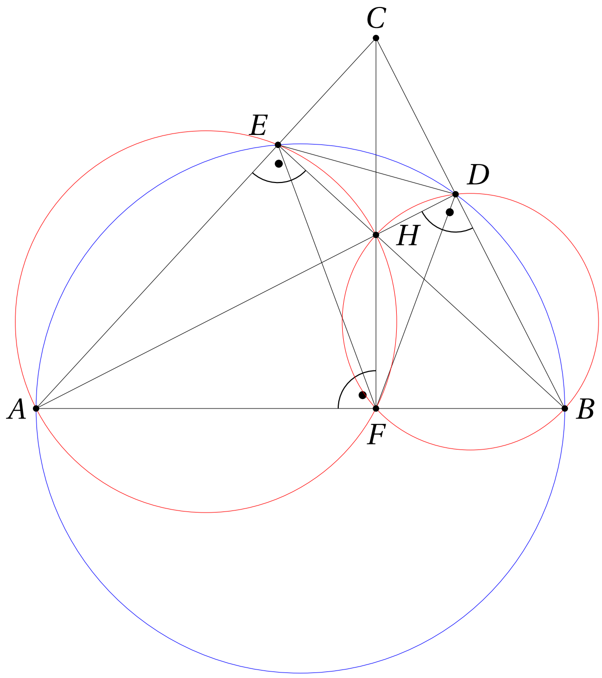


Praegu piisab sellele küsimusele vastamiseks isegi teoreemi 27.2 täisnurksest erijuhust, mille tõestasime järeldusena 26.3.

Näeme, et $\angle AEB = 90^\circ = \angle ADB$, seega on ühel ringjoonel punktid A, E, D ja B. Sama moodi saame ühel ringjoonel asumise tõestada nelikute A, C, D, F ja B, F, E, C kohta.

Teisest küljest $\angle AEH + \angle AFH = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$, järelikult on ühel ringjoonel punktinelik A, E, H, F ning analoogiliselt ka nelikud C, D, H, E ja B, F, H, D.

Joonestame mõned neist ringjoontest välja, vt joonist.



Ülesandes on vaja tõestada, et H on kolmnurga DEF siseringjoone keskpunkt ehk nurgapoolitajate lõikepunkt. Näitame siinkohal, et $\angle HFE = \angle DFH$; ülejäänud nurkade korral on tõestus analoogne.

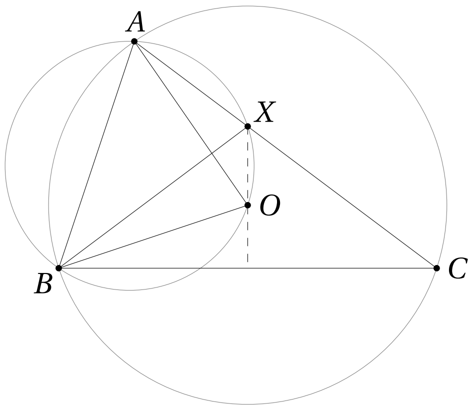
Näeme, et HFE on piirdenurk, mis toetub kõõlule HE vasakpoolsel punasel ringjoonel. Samale kõõlule samal ringjoonel toetub ka nurk HAE, järelikult $\angle HFE = \angle HAE$. Samamoodi saame parempoolsest punasest ringjoonest, et $\angle DFH = \angle DBH$.

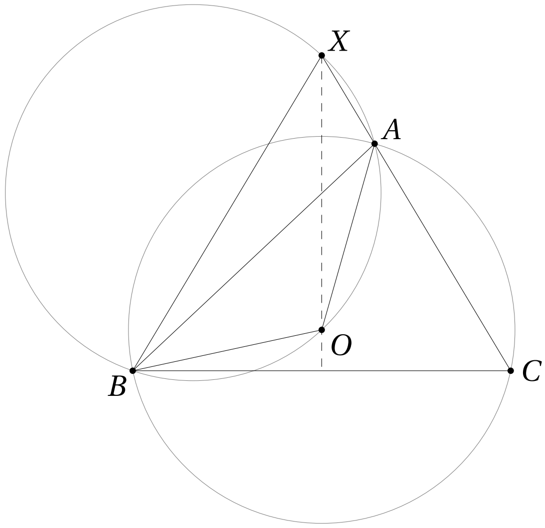
Kuna H on kolmnurga ABC kõrguste lõikepunkt, kehtivad võrdused $\angle HAE = \angle DAE$ ja $\angle DBH = \angle DBE$. Niisiis on meil tarvis tõestada veel, et $\angle DAE = \angle DBE$. See võrdus aga kehtib, sest DAE ja DBE on piirdenurgad, mis toetuvad kõõlule ED sinisel ringjoonel.

Loomulikult saab teoreemi 27.2 kasutada palju laiemalt kui ainult täisnurkade korral. Seejuures juhtub sageli, et ülesande tekstile vastab mitu erinevat joonist, millest mõne puhul tuleb kasutada teoreemi 27.2 esimest, mõne puhul aga teist osa.

Ülesanne 27.2 (Talvine lahtine võistlus 2015, vanem rühm) Teravnurkse kolmnurga ABC ümberringjoone keskpunkt on O. Sirge AC lõikab kolmnurga AOB ümberringjoont lisaks tipule A punktis X. Tõesta, et sirge XO on risti sirgega BC.

Lahendus. Ülesande tekstile vastab kaks põhimõtteliselt erinevat joonist – üks, kus punkt X asub küljel AC, ja teine, kus ta asub külje AC pikendusel.





Olgu $\angle ACB = \gamma$.

Siis kesk- ja piirdenurga omadusest kolmnurga ABC ümberringjoonel saame $\angle AOB = 2\gamma$. Ülesande tingimuste tõttu asuvad punktid A, B, O, X ühel ringjoonel.

Vasakpoolsel joonisel saame seetõttu $\angle AXB = \angle AOB = 2\gamma$. See omakorda tähendab, et $\angle BXC = 180^\circ - 2\gamma$ ja

$$\angle CBX = 180^\circ - \angle XCB - \angle BXC = 180^\circ - (180^\circ - 2\gamma) - \gamma = \gamma .$$

Järelikult on kolmnurk BXC võrdhaarne ja lõigu BC keskristsirge läbib seega nii punkti O kui ka punkti X.

Teisel juhul saame analoogiliselt $\angle BXC = \angle BXA = 180^\circ - \angle AOB = 180^\circ - 2\gamma$ ja edasi on tõestus sama kui esimesel juhul.

Ülesanded

Ülesanne 27.3 (Lõppvoor 2014, 9. klass) Kolmnurga ABC külgedel BC, CA ja AB leiduvad vastavalt punktid D, E ja F nii, et punktid A, B, D, E asuvad ühel ringjoonel, punktid B, C, E, F asuvad ühel ringjoonel ning punktid A, C, D, F asuvad samuti ühel ringjoonel. Kas selleks on kindlasti vaja, et kolmnurk ABC oleks võrdkülgne?

Ülesanne 27.4 (Piirkonnavoor 2023, 10. klass) Kõõlnelinurga $ABCD$ küljel BC valitakse punkt E. Olgu F selline punkt, et $ACFE$ on rööpkülik. Olgu L sirgete AD ja EF lõikepunkt. Tõesta, et punktid B, D, E ja L asuvad ühel ringjoonel.

Ülesanne 27.5 (Lõppvoor 2003, 10. klass) Teravnurkses kolmnurgas ABC on kõik nurgad suuremad kui 45°. Olgu AM ja BN selle kolmnurga kõrgused. Lõikudel MA ja NB valitakse vastavalt punktid X ja Y nii, et $|MX| = |MB|$ ja $|NY| = |NA|$. Tõesta, et lõigud MN ja XY on paralleelsed.

Ülesanne 27.6 (Kevadine lahtine võistlus 2000, noorem rühm) Tasandil on antud teravnurk AOB tipuga O. Nurga sisepiirkonnas valitakse punktid C ja D nii, et $\angle AOC = \angle DOB$. Punktist D kiirele OA tõmmatud ristlõik lõikab kiirt OC punktis G ning punktist C kiirele OB tõmmatud ristlõik lõikab kiirt OD punktis H. Tõesta, et punktid

C, D, G ja H asuvad ühel ringjoonel.

Ülesanne 27.7 (Talvine lahtine võistlus 2018, noorem rühm) Ringjoonel keskpunktiga O ja diameetriga AB valitakse erinevad punktid C ja D nii, et nad asuvad diameetrist AB samal pool. Diameetril AB valitakse punktist O erinev punkt P nii, et punktid P, O, D, C on ühel ringjoonel. Tõesta, et $\angle APC = \angle BPD$.

Ülesanne 27.8 (Sügisene lahtine võistlus 1996, vanem rühm) Olgu H, K ja L suvalise kolmnurga ABC tippudest A, B ja C vastavalt külgedele BC, AC ja AB (või nende pikendustele) tõmmatud kõrguste aluspunktid. Tõesta, et

$$|AK| \cdot |BL| \cdot |CH| = |HK| \cdot |KL| \cdot |LH| = |AL| \cdot |BH| \cdot |CK| .$$

Ülesanne 27.9 (Lõppvoor 2021, 12. klass) Punkt D teravnurkse kolmnurga ABC sees rahuldab tingimust

$$\angle ADC = \angle BDA = 180^\circ - \angle CAB .$$

Tõesta, et punkti A peegeldus punktist D asub kolmnurga ABC ümberringjoonel.

Ülesanne 27.10 (Talvine lahtine võistlus 2021, vanem rühm, a) osa) Kolmnurgas ABC on $|AB| = |AC|$. Mediaanid AD ja BE lõikuvad punktis G. Olgu P lõigu GE keskpunkt. Tõesta, et kui $|GP| = |GD|$, siis $CEPD$ on kõõlnelinurk.

Ülesanne 27.11 (Lõppvoor 2008, 11. klass) Erineva raadiusega ringjooned c_1 ja c_2 puutuvad väliselt punktis K. Ringjoonte ühine väline puutuja puutub ringjooni vastavalt punktides A ja C. Ringjoontele on tõmmatud diameetrid AB ja CD. Sirge BD lõikab ringjoont c_1 teist korda punktis L ning ringjoont c_2 punktis M. Tõesta, et kolmnurgad AKL ja BKM on sarnased.

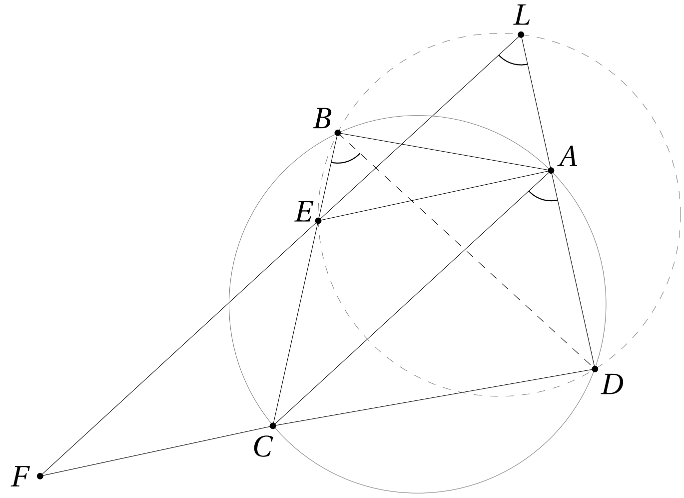
Vaata ka ülesandeid 28.10 ja 30.11.

Lahendused

27.3 Vastus: ei.

Valime suvalise mittevõrdkülgse teravnurkse kolmnurga ABC ning võtame punktideks D, E ja F selle kolmnurga kõrguste aluspunktid. Nagu nägime ülesande 27.1 lahenduses, asuvad siinses ülesandes nõutud punktinelikud ühel ringjoonel ilma eelduseta, et ABC oleks võrdkülgne.

27.4 Teeme joonise.

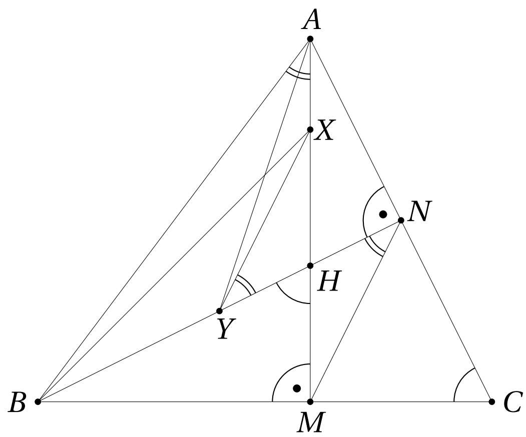


Selleks, et tõestada punktide B, D, E ja L asumine ühel ringjoonel, tuleb teoreemi 27.2 rakendamiseks uurida nelinurgas $DEBL$ tekkivaid nurki. Näeme, et punktid B ja L asuvad samal pool sirget ED. Niisiis piisab tõestada võrdus $\angle EBD = \angle ELD$.

Kuna punkt E asub lõigul BC, teame, et $\angle EBD = \angle CBD$. Kuivõrd $ABCD$ on kõõlnelinurk, saame teoreemist 27.2 lisaks, et $\angle CBD = \angle CAD$.

Ülesande tingimuste põhjal on $ACFE$ rööpkülik, järelikult $AC \parallel EF$. Siit järelduvad omakorda võrdused $\angle CAD = \angle FLD = \angle ELD$. Kokkuvõtteks olemegi tõestanud võrduse $\angle EBD = \angle ELD$, millest teoreemi 27.2 põhjal piisab, et punktid B, D, E ja L asuksid ühel ringjoonel.

27.5 Vastavalt ülesande tingimustele on AYN ja BMX võrdhaarsed täisnurksed kolmnurgad, seega nende alusnurkade suurused on 45°. Tingimused $\angle CAB > 45^\circ$ ja $\angle ABC > 45^\circ$ garanteerivad vajalike punktide X ja Y leidumise vastavalt lõikude MA ja NB sisepiirkonnas. Mida aga annab tingimus $\angle BCA > 45^\circ$?



Olgu H kolmnurga ABC kõrguste lõikepunkt. Kuna $\angle CNH = \angle HMC = 90^\circ$, on $CNHM$ kõõlnelinurk. Järelikult

$$\angle BCA = 180^\circ - \angle NHM = \angle MHB\,.$$

Niisiis on tingimus $\angle BCA > 45^\circ$ samaväärne tingimusega $\angle MHB > \angle MXB$ (sest $\angle MXB = 45^\circ$). Siit omakorda järeldub, et punkt H asub lõigu MX sisepiirkonnas; sama moodi tõestame ka, et H asub lõigu NY sisepiirkonnas. Kokkuvõttes tähendab tingimus $\angle BCA > 45^\circ$, et ülaltoodud joonis on põhimõtteliselt ainus, mis ülesande tingimusi rahuldab.

Nii nagu ülesande 27.1 lahenduseski paneme tähele, et võrdustest $\angle BMA = \angle BNA = 90^\circ$ järeldub $ABMN$ kõõlnelinurksus. Muuhulgas saame siit, et $\angle MNB = \angle MAB$, sest need nurgad toetuvad $ABMN$ ümberringjoone kõõlule BM.

Ülesande väite $MN \parallel XY$ tõestamiseks piisab nüüd, kui näitame, et $\angle XAB = \angle XYN$ ehk $\angle XAB = 180^\circ - \angle BYX$. Viimane tingimus on aga samaväärne $ABYX$ kõõlnelinurksusega.

Selle tõestamiseks piisab, kui näitame, et $\angle BYA = \angle BXA$. Tuletame meelde, et AYN ja BMX on võrdhaarsed täisnurksed kolmnurgad, niisiis

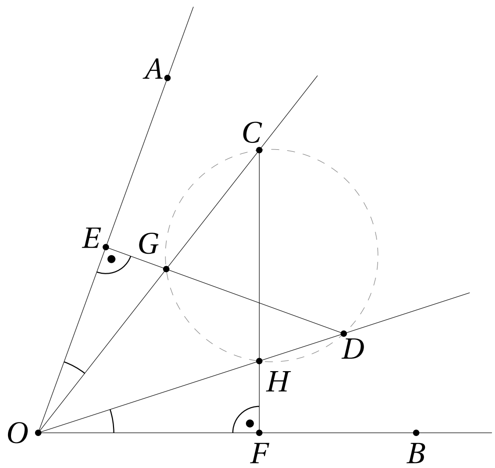
$$\angle BYA = 180^\circ - \angle AYN = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$$

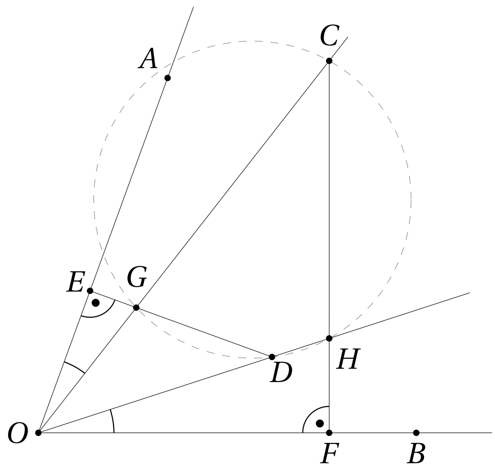
ja

$$\angle BXA = 180^\circ - \angle MXB = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ.$$

Seega $\angle BYA = \angle BXA$ nagu oligi tarvis.

27.6 Selles ülesandes tuleb jälle aru saada, et teksti põhjal on võimalik joonistada kaks põhimõtteliselt erinevat pilti. Ühel juhul asuvad punktid G ja H vastavalt lõikude OC ja OD sisepiirkondades, teisel juhul asub aga üks neist punktidest vastava lõigu pikendusel. (Kui $C = G$ või $D = H$, on ülesande väide üleüldse triviaalne.)





Mõlemal juhul näeme, et kuna

$$\angle EOG = \angle AOC = \angle DOB = \angle HOF$$

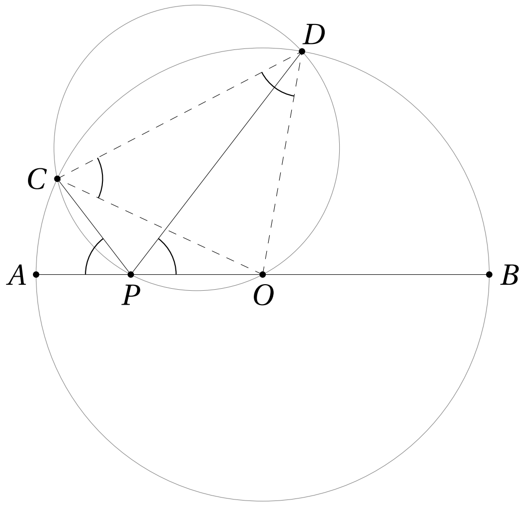
ning $\angle GEO = 90^\circ = \angle HFO$, siis on on võrdsed ka kolmnurkade GEO ja HFO kolmandad nurgad, st $\angle EGO = \angle OHF$.

Esimesel juhul järeldub siit kohe, et $\angle CGD = \angle CHD$, teisel juhul aga saame, et

$$\angle CGD = \angle EGO = \angle OHF = 180^\circ - \angle CHD.$$

Mõlemal korral järeldub teoreemist 27.2, et punktid C, D, G ja H asuvad ühel ringjoonel.

27.7 Teeme joonise.



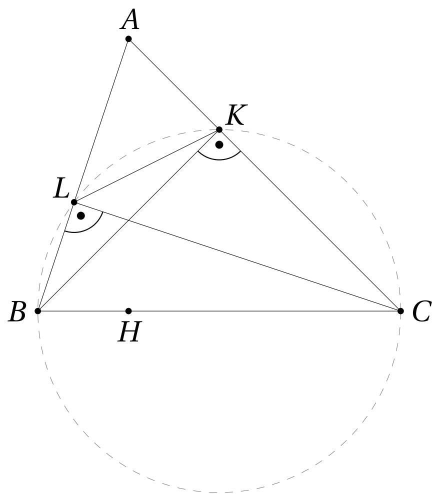
Ülesande tekstile võib vastata veel ka põhimõtteliselt teine joonis, kus punktid C ja D on vahetatud, kuid on selge, et võrdus $\angle APC = \angle BPD$ kehtib parajasti siis, kui võrdus $\angle APD = \angle BPC$.

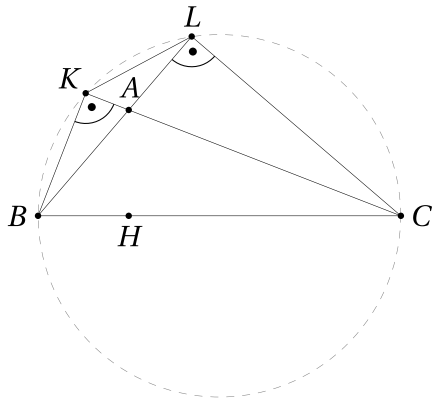
Kuna punktid P, O, D, C asuvad ühel ringjoonel, saame $\angle BPD = \angle OPD = \angle OCD$. Teisest küljest $\angle CDO = 180^\circ - \angle OPC = \angle APC$. Kuna aga punktid C ja D asuvad ühel ringjoonel keskpunktiga O, on kolmnurk OCD võrdhaarne ja kehtib võrdus $\angle OCD = \angle CDO$. Siit järeldubki, et $\angle APC = \angle BPD$.

27.8 Kui kolmnurk ABC on täisnurkne täisnurgaga näiteks tipu A juures, langevad tippudest B ja C tõmmatud kõrguste aluspunktid K ja L kokku tipuga A, mistõttu $|AK| = |AL| = |LK| = 0$ ja kõik ülesande avaldised on võrdsed 0-ga. Niisiis võime edaspidi vaadelda mittetäisnurkseid kolmnurki.

Ülesande avaldised kujutavad endist teatud lõikude pikkuste korrutisi, mida saab omakorda üritada avaldada lõikude pikkuste suhete kaudu. Lõikude pikkuste suhteid aga tasub otsida sarnastest kolmnurkadest. Niisiis püüame jooniselt leida sarnaseid kolmnurki.

Ülesande lahenduse võtmeks on tähelepanek, et $\triangle ABC \sim \triangle AKL$ sõltumata sellest, kas tipu A juures on terav- või nürinurk. Teeme vastavad joonised.





Kuna $\angle BKC = \angle BLC = 90^\circ$, on $BCKL$ mõlemal juhul kõõlnelinurk. Kui CAB

on teravnurk, saame

$$\angle ABC = \angle LBC = 180^\circ - \angle CKL = \angle AKL.$$

Kui CAB on nürinurknurk, saame

$$\angle ABC = \angle LBC = \angle LKC = \angle AKL.$$

Näeme, et mõlemal juhul $\angle ABC = \angle AKL$. Täpselt sama moodi tõestame ka võrduse $\angle ACB = \angle ALK$, millest järeldubki NN-tunnuse alusel, et $\triangle ABC \sim \triangle AKL$.

Sarnaste kolmnurkade vastavate külgede pikkuste suhte on samad, st

$$\frac{|AK|}{|AB|} = \frac{|KL|}{|BC|}.$$

Täpselt sama moodi tõestame võrdused

$$\frac{|BL|}{|BC|} = \frac{|LH|}{|CA|}$$

ja

$$\frac{|CH|}{|CA|} = \frac{|HK|}{|AB|}.$$

Viimase kolme võrduse korrutamine annab

$$\frac{|AK| \cdot |BL| \cdot |CH|}{|AB| \cdot |BC| \cdot |CA|} = \frac{|KL| \cdot |LH| \cdot |HK|}{|BC| \cdot |CA| \cdot |AB|},$$

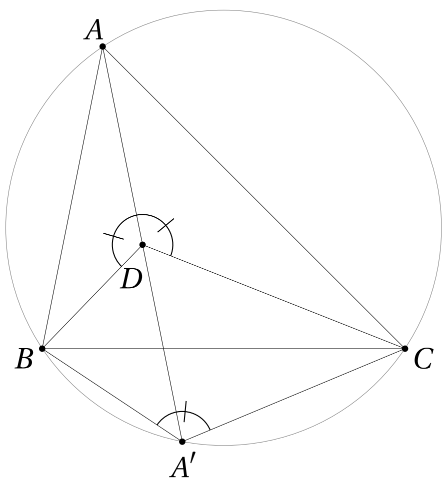
millest omakorda järeldub ülesande esimene võrdus

$$|AK| \cdot |BL| \cdot |CH| = |HK| \cdot |KL| \cdot |LH|.$$

Ülesande teise võrduse tõestus on analoogiline.

27.9 See on taaskord niisugune ülesanne, mida on lihtsam lahendada teistsuguses järjestuses konstruktsiooniga kui tekstis antud.

Olgu A' sirge AD teine lõikepunkt kolmnurga ABC ümberringjoonega ja näitame, et D on kõõlu AA' keskpunkt. Selleks avaldame lõikude DA ja DA' pikkused teiste lõikude pikkuste kaudu, milleks omakorda kuluvad ära joonisele tekkivad sarnased kolmnurgad.



Kuna

$$180^\circ - \angle CAB = \angle CDA = 180^\circ - \angle CDA',$$

siis $\angle CAB = \angle CDA'$. Kuivõrd teisest küljest on $ABA'C$ konstruktsiooni põhjal kõõlnelinurk, saame ka

$$\angle DA'C = \angle AA'C = \angle ABC.$$

Niisiis on kolmnurkadel ABC ja $DA'C$ kaks paari vastavalt võrdseid nurki, mistõttu need kolmnurgad on sarnased. Järelikult

$$\frac{|AB|}{|DA'|} = \frac{|BC|}{|A'C|} \quad \text{ehk} \quad |DA'| = \frac{|AB| \cdot |A'C|}{|BC|}.$$

Nüüd oleks tarvis siduda omavahel lõikude DA, AB, $A'C$ ja BC pikkused. Joonisele vaadates näeme, et seda saaks teha, kui õnnestuks näidata kolmnurkade ABD ja CBA' sarnasus.

Kasutame jälle asjaolu, et $ABA'C$ on kõõlnelinurk, mistõttu

$$\angle BA'C = 180^\circ - \angle CAB = \angle BDA.$$

Samast kõõlnelinurgast järeldub ka

$$\angle A'BC = \angle A'AB = \angle DAB.$$

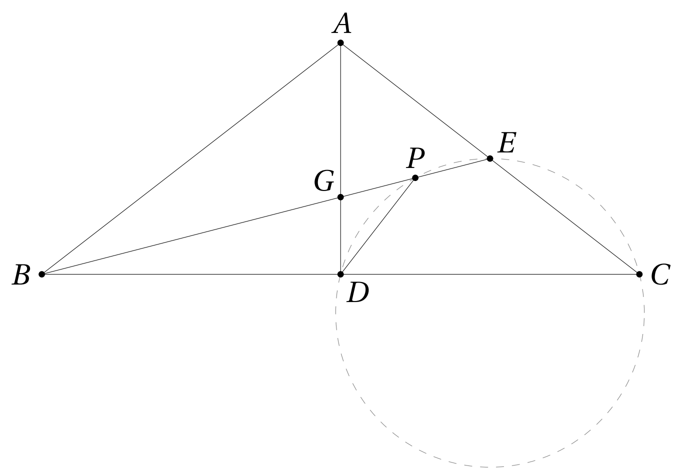
Niisiis on kolmnurkadel ABD ja CBA' kaks paarikaupa võrdset nurka, mistõttu $\triangle ABD \sim \triangle CBA'$. Kokkuvõtteks saame

$$\frac{|DA|}{|AB|} = \frac{|A'C|}{|BC|} \quad \text{ehk} \quad |DA| = \frac{|AB| \cdot |A'C|}{|BC|},$$

millest järeldubki $|DA| = |DA'|$.

Sama moodi saab lahenduseni viia tähelepanekud, et $\triangle ABC \sim \triangle DBA'$ ja $\triangle CAD \sim \triangle CBA'$.

27.10 Teeme joonise.

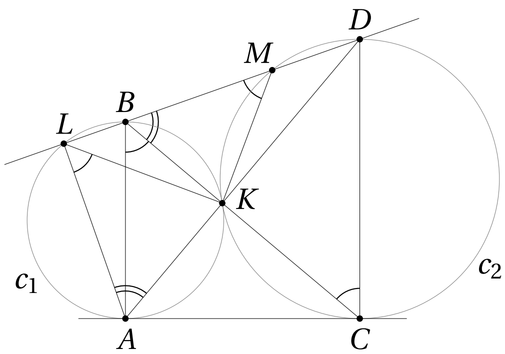


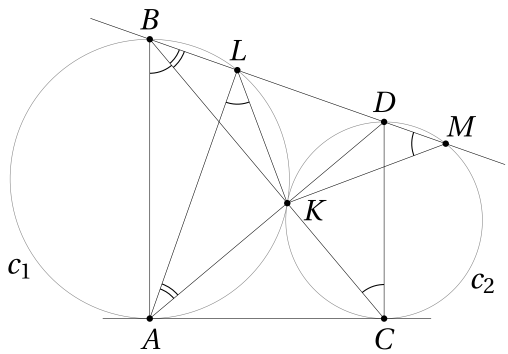
Võrdus $|GP| = |GD|$ kehtib parajasti siis, kui $\angle GDP = \angle GPD$. Tõestamaks, et $CEPD$ on kõõlnelinurk, piisab näidata, et $\angle ECD = 180^\circ - \angle DPE = \angle GPD$. Nurgad ECD ja GPD on vastavalt võrdhaarsete kolmnurkade ABC ja GDP alusnurgad; niisiis piisab nende võrduse näitamiseks, tipunurkade võrdsuse tõestamisest. $\angle DGP = \angle AGB$, seega on vaja tõestada, et $\angle AGB = \angle EAB$. Kuna GBA on kolmnurkade AGB ja EAB ühine nurk, piisab näidata, et $\angle GAE = \angle BAG$ (ehk $\triangle AGB \sim \triangle EAB$).

Kuna G on kolmnurga ABC mediaanide lõikepunkt, siis $|AG| = 2|GD|$. Samas ülesande tingimuste põhjal $|GE| = 2|GP| = 2|GD|$, järelikult $|AG| = |GE|$, mistõttu AGE on võrdhaarne kolmnurk ja $\angle AEG = \angle GAE$. Et AD on võrdhaarse kolmnurga mediaan, kehtib ka $\angle GAE = \angle BAG$. Järelikult $\triangle AGB \sim \triangle EAB$ ja $\angle AGB = \angle EAB$, mida oligi tarvis.

Tegelikult kehtib ka selle tulemuse pöördväide, mida algses võistlusülesandes samuti küsiti. Vastava tõestuse annab ülesande 30.8 lahendus.

27.11 Selles ülesandes on jälle kaks võimalikku joonist vastavalt sellele, kumma ringjoone raadius on suurem.





Mõlemal juhul näeme, et $AB \perp AC$ ja $CD \perp AC$, seega $AB \parallel CD$. Samuti on ringjooned c_1 ja c_2 mõlemal juhul homoteetsed keskpunktiga K (homoteetia kohta loe rohkem jaotisest 33). See homoteetne teisendus viib ühe ringjoone diameetri teise ringjoone paralleelseks diameetriks, st punkti B punktiks C ning punkti A punktiks D. Järelikult on K lõikude BC ja AD lõikepunkt.

Vaatleme kõigepealt juhtu, kui ringjoone c_1 raadius on väiksem (vt vasakpoolne joonis). Kuna punktid K, B, L ja A asuvad ühel ringjoonel, kehtib võrdus $\angle KLA = \angle KBA$. Et $AB \parallel CD$, saame põiknurkade omadusest $\angle KBA = \angle CBA = \angle BCD = \angle KCD$. Kuna ka punktid D, M, K ja C asuvad ühel ringjoonel, kehtivad lisaks võrdused $\angle KMB = 180^\circ - \angle DMK = \angle KCD$. Kokkuvõtteks oleme näidanud, et $\angle KLA = \angle KMB$.

Teisest küljest saame tänu punktide K, B, L ja A ühel ringjoonel asumisele, et $\angle LAK = 180^\circ - \angle KBL = \angle MBK$. Kokkuvõttes on kolmnurkadel KLA ja KMB kaks paari vastavalt võrdeid nurki, mistõttu nad on sarnased.

Juhul kui ringjoone c_1 raadius on suurem (vt parempoolne joonis), saame ülaltehtuga analoogiliselt, et $\angle KLA = \angle KBA = \angle KCD = \angle KMB$. Teise nurgapaari jaoks saame tänu punktide K, L, B ja A ühel ringjoonel asumisele kohe võrduse $\angle LAK = \angle LBK = \angle MBK$. Kokkuvõttes on kolmnurgad KLA ja KMB ka sel juhul sarnased.

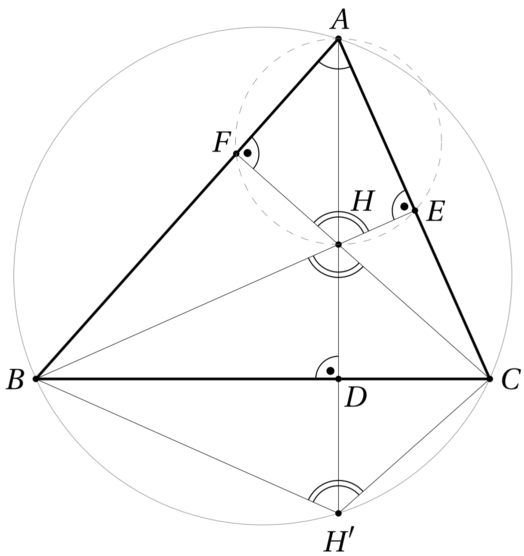
27.2 Kõrguste lõikepunkti omadus

Teoremil 27.2 on olemas ilus järeldus, mis omab sageli ülesannete lahendamisel iseseisvat tähtsust.

Teoreem 27.3 Kolmnurga kõrguste lõikepunkti peegeldus suvalise külje sirgest asub selle kolmnurga ümberringjoonel.

Tõestus. Olgu antud kolmnurk ABC ning olgu H tema kõrguste lõikepunkt. Vaatleme külge BC ja tõestame teoreemi väite punkti H' jaoks, mis on H peegeldus küljega BC määratud sirgest. Teiste külgede korral on tõestus analoogiline.

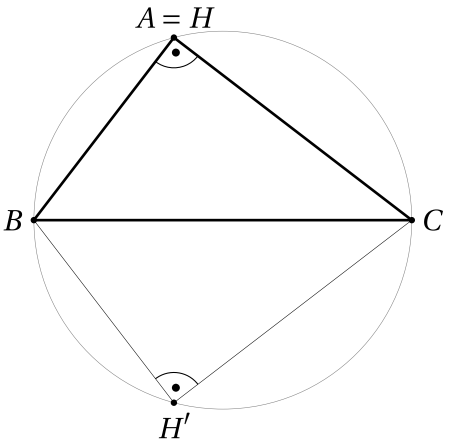
Vaatame läbi erinevad võimalikud juhud ning alustame juhust, mil kolmnurk ABC on teravnurkne. Tähistame tippudest A, B ja C tõmmatud kõrguste aluspunkte vastavalt D, E ja F ning teeme joonise.

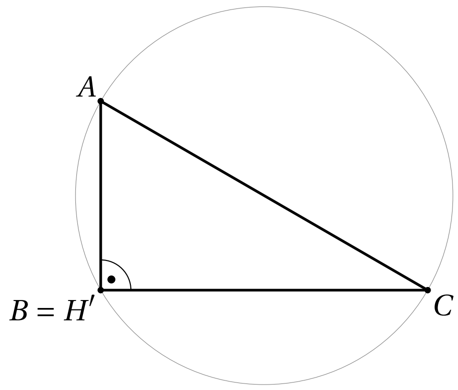


Me peame tõestama, et punktid A, C, H' ja B asuvad ühel ringjoonel. Teoreemi 27.2 põhjal piisab näidata, et $\angle CAB + \angle BH'C = 180^\circ$. Kuna H ja H' on sirge BC suhtes sümmeetrilised, kehtib $\angle BH'C = \angle CHB$. Tänu tippnurkade omadusele teame ka, et $\angle CHB = \angle FHE$. Seega tuleb tõestada, et $\angle EAF + \angle FHE = 180^\circ$. See võrdus aga kehtib, sest $\angle AFH = \angle HEA = 90^\circ$ ja $AEHF$ on kõõlnelinurk.

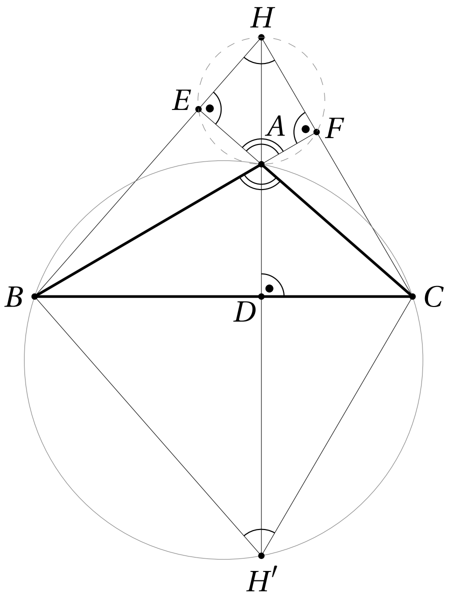
Järgmiseks vaatleme juhtu, kus kolmnurk ABC on täisnurkne. Kui täisnurk on tipu A juures, siis $H = A$ ning teoreemi väide kehtib jällegi teoreemi 27.2 põhjal, sest $\angle CAB + \angle BH'C = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$. (Muidugi saame siinkohal soovi korral kasutada ka järeldust 26.3.)

Kui aga täisnurk on kas tipu B või C juures, siis vastavalt $B = H = H'$ või $C = H = H'$ ning punkt H' asub triviaalselt kolmnurga ABC ümberringjoonel.



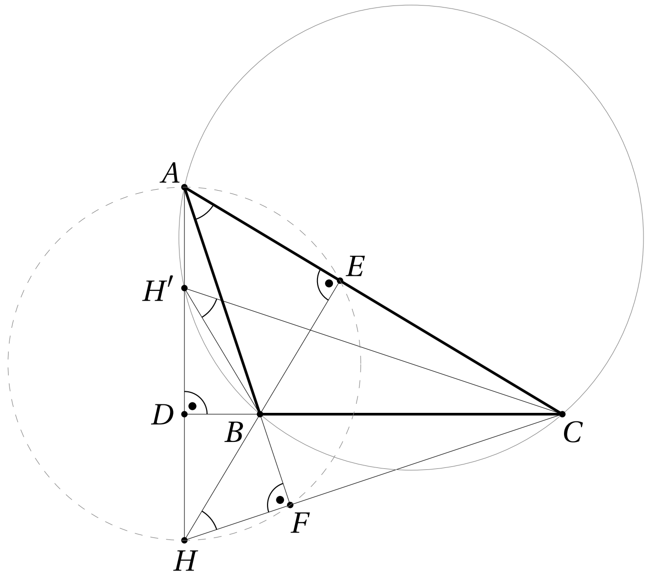


Viimaseks vaatleme juhtu, kus kolmnurk ABC on nürinurkne. Kui nürinurk asub tipu A juures, langeb temast tõmmatud kõrguse aluspunkt D lõigule BC.



Peame tõestama, et punktid A, C, H' ja B asuvad ühel ringjoonel. Teoreemi 27.2 põhjal piisab näidata, et $\angle CAB + \angle BH'C = 180°$. Kuna H ja H' on sirge BC suhtes sümmeetrilised, kehtib $\angle BH'C = \angle CHB$. Tänu tippnurkade omadusele teame ka, et $\angle CAB = \angle EAF$. Seega tuleb tõestada, et $\angle EAF + \angle FHE = 180°$. See võrdus aga kehtib, sest $\angle AFH = \angle HEA = 90°$ ja $AEHF$ on kõõlnelinurk. (Võrdle tõestuse seda osa tõestusega teravnurksel juhul. Kas märkad sarnasust? See sarnasus tuleneb asjaolust, et A on kolmnurga HBC kõrguste lõikepunkt.)

Jääb vaadelda juht, kus nürinurk on tipu B (või analoogiliselt tipu C) juures. Sel juhul langeb tipust A tõmmatud kõrguse aluspunkt D külje BC pikendusele üle punkti B.



Jälle peame tõestama, et punktid A, H', B ja C asuvad ühel ringjoonel. Paneme tähele, et punktid A ja H asuvad sirgest BC erineval pool, mistõttu punktid A ja H' asuvad sirgest BC samal pool. Seega piisab teoreemi 27.2 põhjal näidata, et $\angle CAB = \angle CH'B$. Kuna H ja H' on sirge BC suhtes sümmeetrilised, kehtib $\angle CH'B = \angle BHC$. Seega tuleb tõestada $\angle CAB = \angle BHC$ ehk $\angle EAF = \angle EHF$. Viimane võrdus aga kehtib tänu teoreemile 27.2, sest $\angle HEA = \angle HFA = 90^\circ$, mistõttu $AHFE$ on kõõlnelinurk. (Võrdle ka seda tõestuse osa ülaltehtuga.) □

Ülesanded

Ülesanne 27.12 (Piirkonnavoor 2023, 9. klass) Olgu ABC erikülgne teravnurkne kolmnurk, mille kõrgused lõikuvad punktis H. Tõesta, et nurkade ACB ja AHB poolitajad on paralleelsed.

Ülesanne 27.13 (Lõppvoor 2002, 10. klass) Olgu ABC mittetäisnurkne kolmnurk ja H selle kõrguste lõikepunkt. Tõesta, et kolmnurk ABH on teravnurkne siis ja ainult siis, kui $\angle ACB$ on nürinurk.

Ülesanne 27.14 (Talvine lahtine võistlus 2014, noorem rühm) Olgu ABC teravnurkne kolmnurk, H selle kõrguste lõikepunkt ning AA' kolmnurga ABC ümberringjoone diameeter. Tõesta, et nelinurk $HBA'C$ on rööpkülik.

Ülesanne 27.15 (Lõppvoor 2014, 10. klass) Teravnurkses kolmnurgas ABC lõikuvad tipust B tõmmatud kõrgus ja tipust C tõmmatud nurgapoolitaja punktis D. Olgu E punktiga D sümmeetriline punkt sirge AC suhtes. On teada, et punktid A, B, C ja E asuvad ühel ringjoonel. Tõesta, et kolmnurk ABC on võrdhaarne.

Ülesanne 27.16 (Lõppvoor 2012, 12. klass) Teravnurkse kolmnurga ABC sees valitakse niisugune punkt P, millega sümmeetrilised punktid kolmnurga külgede suhtes asuvad kõik kolmnurga ABC ümberringjoonel. Tõesta, et P on kolmnurga ABC kõrguste lõikepunkt.

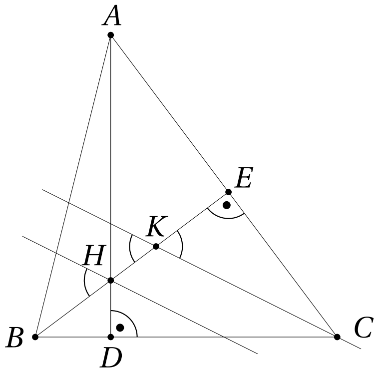
Ülesanne 27.17 (Sügisene lahtine võistlus 2021, vanem rühm) Olgu H teravnurkse kolmnurga ABC kõrguste lõikepunkt. Olgu M külje BC keskpunkt. Olgu A' ja H' vastavalt punktide A ja H peegeldused punktist M. Tõesta, et punktid B ja C ning punkti A' peegeldused sirgetest BH' ja CH' asuvad ühel ringjoonel.

Vaata ka ülesannet 31.7.

Lahendused

27.12 Olgu tippudest A ja B tõmmatud kõrguste aluspunktid vastavalt D ja E. Kuna $\angle CDH = \angle HEC = 90^\circ$, on $CDHE$ kõõlnelinurk. Seega $\angle AHB = \angle DHE = 180^\circ - \angle ACB$, mistõttu ning sirge BH ja nurga AHB poolitaja vaheline nurk on

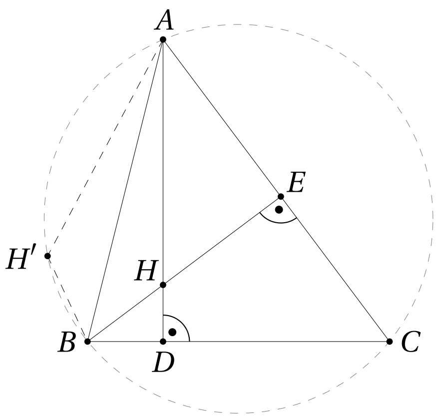
$$\frac{\angle AHB}{2} = \frac{180^\circ - \angle ACB}{2} = 90^\circ - \frac{\angle ACB}{2}.$$



Olgu sirge BH ja nurga ACB poolitaja lõikepunkt K (tänu kolmnurga eriküljsusele $H \neq K$). Siis on sirge BH ja nurga ACB poolitaja vahelise nurga suurus $\angle CKE = 90^\circ - \angle ECK = 90^\circ - \dfrac{\angle ACB}{2}$.

Kuna nurkade ACB ja ACH poolitajad moodustavad sirgega BH sama suure nurga, peavad nad olema paralleelsed.

Võrduse $\angle AHB = 180^\circ - \angle ACB$ saab tõestada ka teoreemi 27.3 abil. Sellest teoreemist teame, et kõrguste lõikepunktiga H külje AB suhtes sümmeetriline punkt H' asub kolmnurga ABC ümberringjoonel. Järelikult $\angle AHB = \angle AH'B = 180^\circ - \angle ACB$. Edasi jätkame nagu eelpool lõpetatud lahenduses.



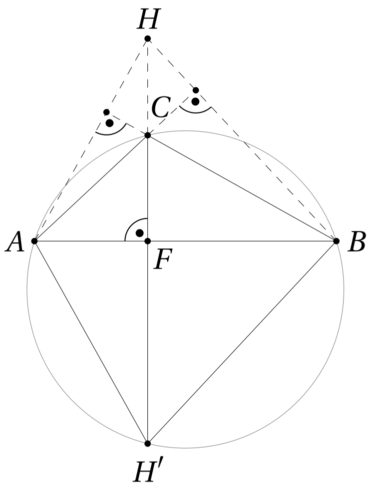
27.13 Vaatame võimalikud juhud läbi sarnaselt teoreemi 27.3 tõestusele.

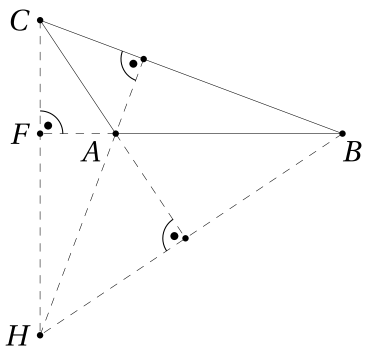
Kõigepealt vaatleme juhtu, kus tipust C külje AB sirgele tõmmatud kõrguse aluspunkt F langeb lõigu AB sisepiirkonda. Selle kõrgusega määratud sirgel asub muidugi ka punkt H. Niisiis on F ka punkti H ristprojektsiooniks samale sirgele. See tähendab, et HAB ja ABH on teravnurgad.

Punktid C ja H asuvad sirgest AB samal pool. See tähendab, et punkti H peegeldus H' sirge AB suhtes asub sellest sirgest teisel pool kui tipp C. Teoreemi 27.3 põhjal on $AH'BC$ kõõlnelinurk, mistõttu teoreemi 27.2 alusel kehtib $\angle BCA + \angle AH'B = 180°$. Kuivõrd $\angle AH'B = BHA$, saame $\angle BCA + \angle BHA = 180°$. Järelikult on BHA teravnurk (ning kolmnurk AHB teravnurkne) parajasti siis, kui BCA on nürinurk.

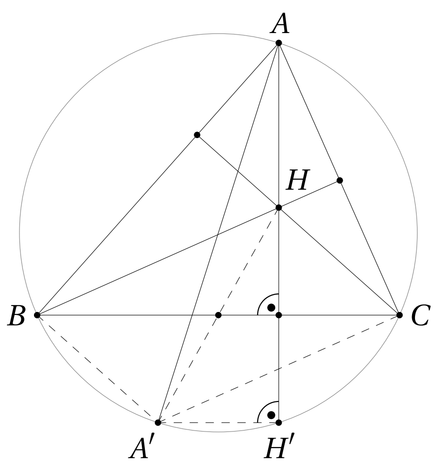
Kuna antud kolmnurk pole täisnurkne, jääb vaadata ainult juht, kus tipust C külje AB sirgele tõmmatud kõrguse aluspunkt F langeb lõigu AB pikendusele; langegu ta üldisust kitsendamata näiteks pikendusele üle punkti A.

Jällegi on F ka punkti H ristprojektsiooniks sirgele AB. See tähendab, et BAH on nürinurk, mistõttu kolmnurk ABH ei ole teravnurkne. Teisalt peab ka CAB olema nürinurk, järelikult ei saa BCA enam nürinurk olla. Niisiis kehtib ülesandes nõutud samaväärsus ka sel juhul.





27.14 Lähedus teoreemi 27.3 püstitusega võiks olla üsna selge. Täiendame teoreemi 27.3 joonist diameetriga AA'.



Kuidas punktid A' ja H' omavahel seotud on? Kuna AA' on diameeter, siis kehtib võrdus $\angle A'H'A = 90°$. Samas ka $H'A \perp BC$, järelikult $A'H' \parallel BC$. Muuhulgas tähendab viimane seos, et punktid A' ja H' on sümmeetrilised lõigu BC keskristsirge suhtes. Niisiis võib punkti A' saada punktist H kahe teisenduse koostoimel – kõigepealt peegeldame punkti H sirge BC suhtes ja siis tulemust H' omakorda lõigu BC keskristsirge suhtes. Siit aga järeldub, et punktid H ja A' on teineteise peegeldused lõigu BC keskpunkti suhtes. See omakorda tähendabki, et $HBA'C$ on rööpkülik.

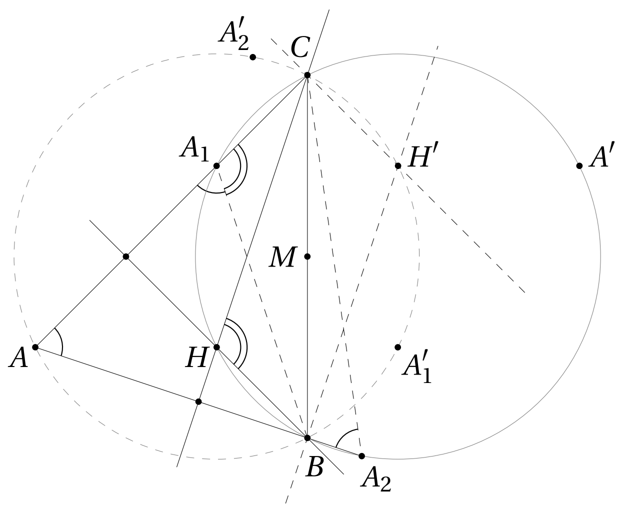
27.15 Teoreemist 27.3 teame, et teravnurkse kolmnurga kõrguste lõikepunkti peegeldus kolmnurga suvalisest küljest asub selle kolmnurga ümberringjoonel. Lisaks on lihtne näha, et kõrguste lõikepunkt on ainus kõrguse punkt, mille peegeldus küljest saab kolmnurga ümberringjoonel asuda. Seega on D kolmnurga ABC kõrguste lõikepunkt. Järelikult peab tipust C tõmmatud nurgapoolitaja olema ka selle kolmnurga kõrguseks, mistõttu on kolmnurk ABC võrdhaarne (vt teoreemi 31.2).

27.16 Teoreemist 27.3 teame, et kõrguste lõikepunktil on ülesandes nõutud omadus. Niisiis piisab tõestada, et tegemist on ainsa punktiga, mille peegeldused kolmnurga ABC külgedest asuvad tema ümberringjoonel.

Peegeldame kolmnurga ABC ümberringjoont tema külgede suhtes. Ülesande tingimuste põhjal asub punkt P igaühel saadavast kolmest ringjoonest. Samas lõikuvad need ringjooned paarikaupa kolmnurga tippudes, niisiis ei saa neil kolme peale olla üle ühe ühise punkti.

27.17 Ülesandes 27.14 nägime, et punkt H' asub kolmnurga ABC ümberringjoonel. Näitame, et samal ringjoonel asuvad ka punkti A' peegeldused sirgetest BH' ja CH'.

Veidi mugavam on tõestada selle väite punkti M suhtes peegeldatud kuju. Paneme tähele, et punktid B ja C on punkti M suhtes sümmeetrilised. Sirgete BH' ja CH' peegeldused punkti M suhtes on seega vastavalt sirged CH ja BH ehk kolmnurga ABC kõrgused. Niisiis piisab näidata, et tipu A peegeldused nende kõrguste suhtes asuvad kolmnurga BCH ümberringjoonel (mis on kolmnurga ABC ümberringjoone peegeldus punkti M suhtes).



On kolm võimalust.

- Kui punkti A peegeldus ühest kõrgusest langeb kokku kas punktiga B või C, kehtib väide selle peegelduse jaoks triviaalselt.
- Punkti A peegeldus ühest kõrgusest (näiteks BH) asub kolmnurga küljel (nagu joonisel punkt A_1 asub küljel AC). Kolmnurk ABA_1 on võrdhaarne, seega

  $$\angle CA_1B = 180^\circ - \angle BA_1A = 180^\circ - \angle A_1AB = 180^\circ - \angle CAB\,.$$

  Kõrguste lõikepunkti omadusest järeldub, et $\angle CAB + \angle CHB = 180^\circ$, mistõttu

  $$\angle CHB = 180^\circ - \angle CAB = \angle CA_1B\,.$$

  Kuna punktid A_1 ja H asuvad sirgest BC samal pool, on A_1 kolmnurga BCH ümberringjoonel.
- Punkti A peegeldus ühest kõrgusest (näiteks CH) asub kolmnurga külje pikendusel (nagu joonisel punkt A_2 asub külje AB pikendusel). Kolmnurk AA_2C on võrdhaarne, seega

  $$\angle CAB = \angle CAA_2 = \angle AA_2C = \angle BA_2C\,.$$

  Kuivõrd ka praegusel juhul $\angle CAB + \angle CHB = 180^\circ$, saame

  $$\angle BA_2C + \angle CHB = 180^\circ\,.$$

  Et punktid A_2 ja H asuvad sirgest BC erineval pool, on ka A_2 kolmnurga BCH ümberringjoonel.

Sellega on ülesande väide tõestatud.