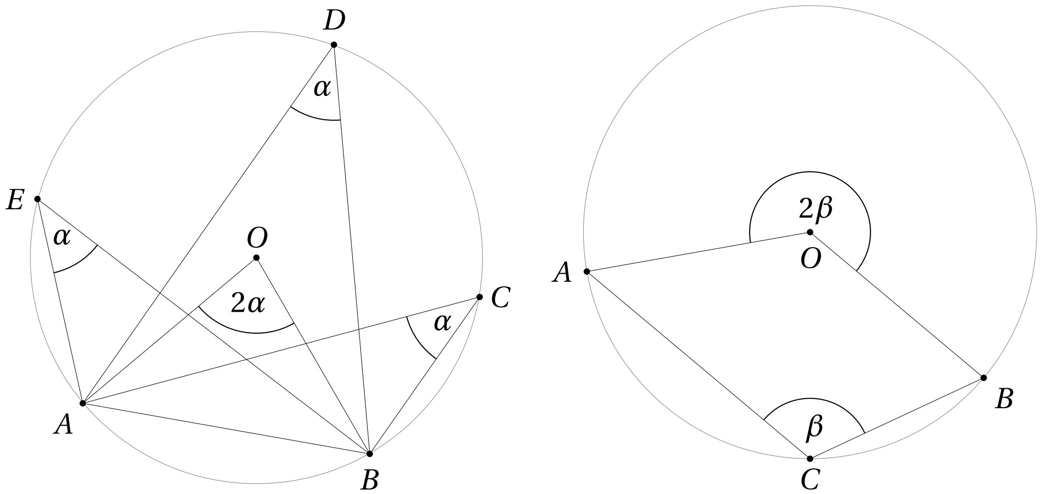
26. Kesk- ja piirdenurk. Thalese teoreem

Alustuseks kordame üle ühe kooliõpikust tuttava teoreemi.

Teoreem 26.1 Kesknurk on kaks korda suurem kui samale kaarele toetuv piirdenurk.



Joonis 26.1

Teoreemi kogu tõestust me siinkohal üle kordama ei hakka, selle leiad 8. klassi matemaatikaõpikust või Igor Šarõgini suurepärasest raamatust “Tasandi geomeetria” [15], mis olümpiaadiks ette valmistudes tasub omale nagunii öökapile soetada. Küll aga vaatame üle põhilised punktide konfiguratsioonid, mida ülesande lahendamise käigus ära tuleks tunda.

Joonisel 26.1 vasakul on tüüpiline olukord, kus kõõlule (või kaarele) AB toetub mitu piirdenurka. Kuna nad moodustavad poole vastavast kesknurgast, on nad kõik ka omavahel võrdsed. Tegemist on olulise väitega, mis väärib sõnastamist omaette järeldusena.

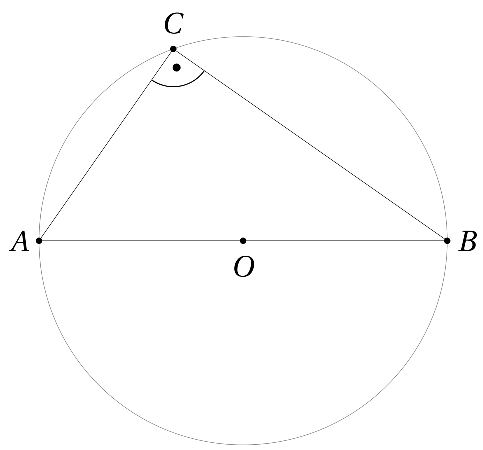
Järeldus 26.1 Samale kõõlule (või kaarele) samalt poolt toetuvad piirdenurgad on võrdsed.

Kehtib ka vastupidine väide: kõik sirge AB suhtes samal pooltasandil asuvad punktid, millest lõik AB paistab sama nurga all, asuvad ühel ja samal ringjoone kaarel. Selle väite tõestame erijuhuna üldisemast teoreemist 27.1.

Joonisel 26.1 paremal näeme, et teoreem 26.1 kehtib ka siis, kui piirdenurk on üle 90°; siis lihtsalt on ka vastav kesknurk üle 180°.

Kui kesknurga suurus on täpselt 180°, saame tähtsa erijuhu, mida tuntakse Thalese teoreemina.[1]

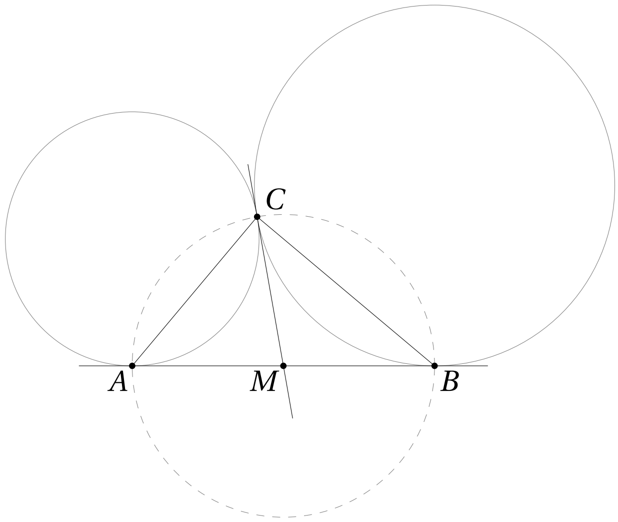
Teoreem 26.2 Ringjoone diameetrile toetuv piirdenurk on täisnurk.



Ülesanne 26.1 (Piirkonnavoor 2022, 12. klass, a)-osa) Kaks ringjoont puutuvad teineteist välimiselt punktis C ning mingit üht ja sama sirget vastavalt punktides A ja B, kus $A \neq B$. Tõesta, et kolmnurk ABC on täisnurkne.

Lahendus. Tõmbame ringjoontele ühise puutuja läbi punkti C. Olgu M selle puutuja lõikepunkt sirgega AB.

[1]Thales (u. 625-547 eKr) oli Vana-Kreeka filosoof. Suure tõenäosusega polnud ta temale omistatava teoreemi esmaavastaja, sest vastavat väidet tunti juba Vana-Egiptuses ja Babüloonias. Tol ajal aga ei hoolitud eriti sellest, kes teoreemi sõnastas või tõestas. Tulemus omistati lihtsalt kellelegi, keda peeti targaks inimeseks. Sama lugu oli ju ka Pythagorase teoreemiga, mida Vana-Egiptuses ammu enne Pythagorast teati ja kasutada osati.

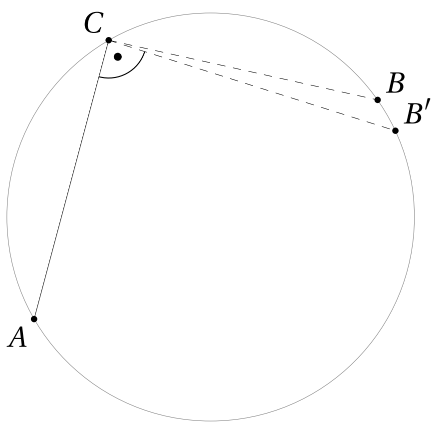


Puutujalõikude võrdsusest saame $|AM| = |CM|$ ja $|BM| = |CM|$. Niisiis asuvad punktid A, B ja C samal ringjoonel keskpunktiga M. AB kui keskpunkti läbiv kõõl on selle ringjoone diameetriks, mistõttu Thalese teoreemi järgi $\angle ACB = 90°$.

Väga oluline on ka Thalese teoreemi pöördteoreem.

Teoreem 26.3 Ringjoones täisnurkse piirdenurga poolt piiratud kõõl on selle ringjoone diameetriks.

Tõestus. Olgu ACB ringjoone täisnurkne piirdenurk. Leiame ringjoonel niisuguse punkti B', et AB' on diameeter. Siis Thalese teoreemi põhjal $ACB' = 90°$. See aga tähendab, et $\angle ACB = 90° = \angle ACB'$. Läbi punkti C saab tõmmata ainult ühe sirge, mis on risti sirgega AC. Järelikult $B = B'$ ja AB peab olema vaadeldava ringjoone diameeter.



□

Kuna hüpotenuusi keskpunkt on ka kogu ringjoone keskpunktiks, saame teoreemist 26.3 järgmise sagelikasutatava järelduse.

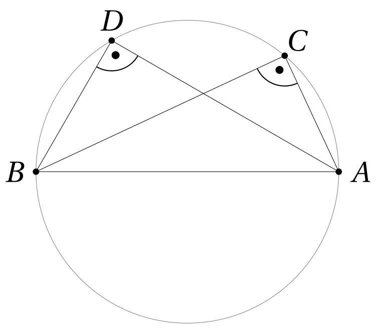
Järeldus 26.2 Täisnurkse kolmnurga ümberringjoone keskpunkt asub tema hüpotenuusi keskpunktis.

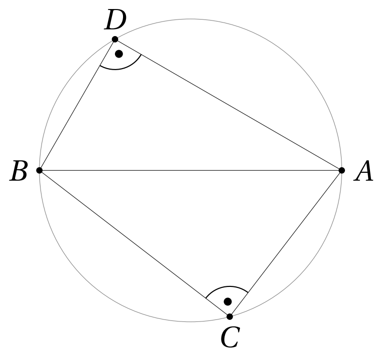
Teoreemi 26.3 teine oluline järeldus tekib olukorras, kus samale lõigule toetub kaks täisnurka.

Järeldus 26.3 Olgu tasandil antud lõik AB ning punktid C ja D nii, et $\angle ACB = \angle ADB = 90^\circ$. Siis asuvad punktid A, B, C ja D ühel ringjoonel diameetriga AB.

Tõestus. Vaatleme kolmnurkade ACB ja ADB ümberringjooni. Vastavalt teoreemile26.3 on lõik AB mõlema ringjoone diameetriks, järelikult langevad need ringjooned kokku.

Paneme tähele, et tõestatava väite olukorrale vastab kaks põhimõtteliselt erinevat joonist olenevalt sellest, kas punktid C ja D asuvad sirgest samal või erineval pool. Toodud tõestus töötab mõlemal juhul.



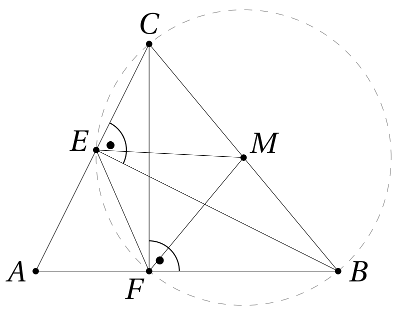


□

Selle järelduse üldistuse annab teoreem 27.2 jaotises 27.

Ülesanne 26.2 (Piirkonnavoor 2020, 9. klass) Olgu ABC teravnurkne kolmnurk. Olgu külje BC keskpunkt M ning tippudest B ja C tõmmatud kõrguste aluspunktid vastavalt E ja F. Tõesta, et $\angle MEF = \angle MFE$.

Lahendus. Kuna $\angle BFC = \angle BEC = 90^\circ$, asuvad punktid B, C, E, F järelduse 26.3 põhjal ühel ringjoonel diameetriga BC. Selle diameetri ja järelikult ka vaadeldava ringjoone keskpunkt on M. Niisiis $|ME| = |MF|(= |MB| = |MC|)$, millest omakorda järeldubki vajalik võrdus $\angle MEF = \angle MFE$.



Ülesanded

Ülesanne 26.3 (Piirkonnavoor 2019, 9. klass) Rööpküliku $ABCD$ tipu A juures oleva nurga poolitaja läbib külje BC keskpunkti M. Tõesta, et AMD on täisnurk.

Ülesanne 26.4 (Piirkonnavoor 2015, 9. klass) Kõõlnelinurga diagonaalid on risti ja nende lõikepunkt poolitab ühe diagonaalidest. Tõesta, et neli kolmnurka, milleks diagonaalid selle nelinurga jaotavad, on kõik sarnased.

Ülesanne 26.5 (Piirkonnavoor 1995, 9. klass) Teravnurkse kolmnurga ABC sisepiirkonnas võetakse punkt M. Olgu P ja Q vastavalt punkti M ristprojektsioonid kolmnurga külgedele AB ja AC ning K punkti A ristprojektsioon punktidega P, Q määratud sirgele. Tõesta, et nurgad $\angle PAK$ ja $\angle MAQ$ on võrdsed.

Ülesanne 26.6 (Piirkonnavoor 2002, 10. klass) Teravnurkses kolmnurgas ABC ümberringjoone keskpunktiga O on $\angle ACB = 60°$. Lõigaku sirge AO ümberringjoont teistkordselt punktis R ning olgu M ümberringjoone selle kaare AB keskpunkt, mis ei sisalda punkti C. Tõesta, et nelinurk $ROMB$ on romb.

Ülesanne 26.7 (Kevadine lahtine võistlus 2002, noorem rühm) Kolmnurgas ABC on $|AB| = |AC|$ ja $\angle BAC = \alpha$. Küljel AB võetakse punkt $P \neq B$ ja tipust A tõmmatud kõrgusel punkt Q nii, et $|PQ| = |QC|$. Leia nurga QPC suurus.

Ülesanne 26.8 (Talvine lahtine võistlus 2006, noorem rühm) Ruudu $ABCD$ keskpunkt on K. Punkt P valitakse nii, et $P \neq K$ ja nurk APB on täisnurk. Tõesta, et sirge PK poolitab sirgete AP ja BP vahelise nurga.

Ülesanne 26.9 (Talvine lahtine võistlus 2019, noorem rühm) Ringjoone ω_1 keskpunkti O läbiv ringjoon ω_2 puutub ringjoont ω_1 punktis A. Ringjoonel ω_2 võetakse punkt C nii, et kiir AC lõikab ringjoont ω_1 teistkordselt punktis D, kiir OC lõikab ringjoont ω_1 punktis E ning sirged DE ja AO on paralleelsed. Leia nurga DAE suurus.

Ülesanne 26.10 (Piirkonnavoor 2005, 10. klass) Ringjoonel keskpunktiga O võetakse punktid A, B ja C. Olgu punktid D, E ja F vastavalt lõikude OA, OB ja OC keskpunktid ning G ja H vastavalt lõikude DE ja EF keskpunktid. Tõesta, et punktid O, G, E ja H asuvad ühel ringjoonel.

Ülesanne 26.11 (Piirkonnavoor 2012, 12. klass) Antud on võrdhaarne kolmnurk ABC tipunurgaga $\angle A$. Tipust C tõmmatakse kolmnurga ABC ümberringjoonele puutuja, mis lõikab sirget AB punktis D. Olgu E nurga DAC poolitaja lõikepunkt sirgega CD. Leia kõik tipunurgad $\angle A$, mille korral kehtib võrdus $\angle CEA = \angle CAB$.

Ülesanne 26.12 (Sügisene lahtine võistlus 2015, noorem rühm) Kolmnurga ABC tipu A juures on täisnurk. Ringjoon c läbib kolmnurga ABC tippe A ja B ning lõikab külgi AC ja BC veel vastavalt punktides D ja E. Lõik CD on pikkuselt võrdne ringjoone c diameetriga. Tõesta, et kolmnurk ABE on võrdhaarne.

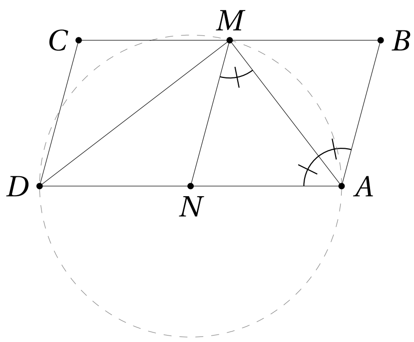
Ülesanne 26.13 (Talvine lahtine võistlus 2016, noorem rühm) Olgu A ja B sellised punktid ringjoonel keskpunktiga O, et kolmnurk AOB on täisnurkne. Lõigu AO keskristsirge lõikab lühemat kaart AB punktis K. Sirged KO ja AB lõikuvad punktis L. Tõesta, et kolmnurk KBL on võrdhaarne.

Ülesanne 26.14 (Lõppvoor 2009, 10. klass) Teravnurkse kolmnurga ABC küljele AB tõmmatakse punktis B ristsirge y ning küljele AC punktis C ristsirge z. Tõesta, et sirgete y ja z lõikepunkt asub tipust A küljele BC tõmmatud ristsirgel parajasti siis, kui $|AB| = |AC|$.

Vaata ka ülesannet 25.5.

Lahendused

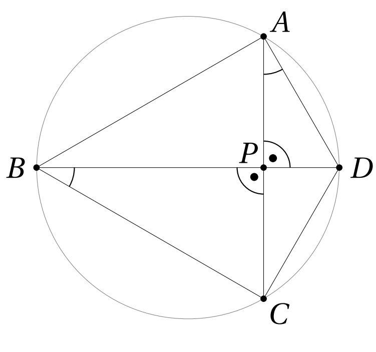
26.3 Lahenduse idee on sarnane ülesande 26.1 omaga. Konstrueerime ühe külje (eeldatava hüpotenuusi) keskpunkti ning näitame, et kolmnurga kõigi kolme tipu kaugused sellest on samad.



Olgu N külje AD keskpunkt. Siis $MN \parallel AB$, millest järeldub põiknurkade võrdsuse tõttu $\angle BAM = \angle AMN$. Samas ülesande tingimuste põhjal $\angle BAM = \angle MAN$, niisiis $\angle AMN = \angle MAN$ ehk kolmnurk AMN on võrdhaarne. Järelikult $|DN| = |AN| = |MN|$ ning punktid A, M ja D asuvad ühel ringjoonel, mille keskpunkt on N ja diameeter AD. Nüüd saame Thalese teoreemi põhjal, et $\angle AMD = 90^\circ$.

Selle ülesande teise võimaliku lahenduse annab ülesanne 31.1.

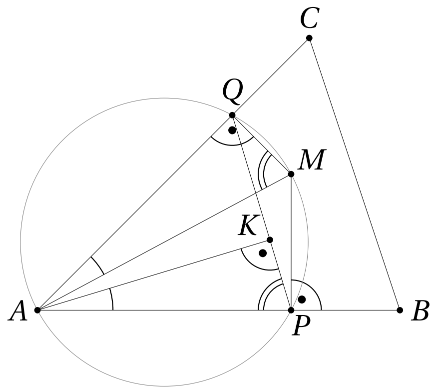
26.4 Olgu vaadeldav kõõlnelinurk $ABCD$ ja poolitagu diagonaal BD diagonaali AC punktis P. Kuna $AC \perp BD$, on kõik neli ülesande kolmnurka täisnurksed.



Seostest $AC \perp BD$ ja $|AP| = |CP|$ järeldub, et punktid A ja C on diagonaali BD suhtes sümmeetrilised, mistõttu $\triangle APD \sim \triangle CPD$ ja $\triangle BPA \sim \triangle BPC$ (tegelikult on need kolmnurgapaarid isegi kongruentsed).

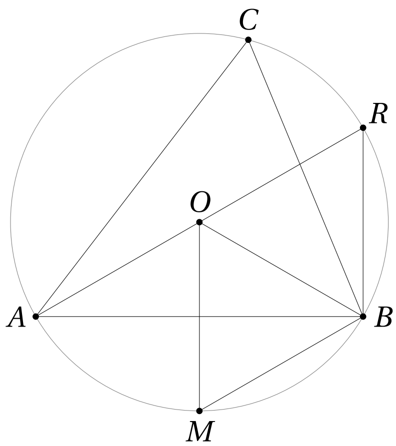
Kuna samale kõõlule toetuvad piirdenurgad on võrdsed, saame $\angle DAP = \angle DAC = \angle DBC = \angle PBC$. Kuna $\angle APD = 90^\circ = \angle BPC$, on kolmnurkades APD ja BPC kaks paari võrdseid nurki, mistõttu need kolmnurgad on sarnased. Kokkuvõttes oleme näidanud, et $\triangle CPD \sim \triangle APD \sim \triangle BPC \sim \triangle BPA$, nagu oligi tarvis.

26.5 Teeme joonise.



Kuna $\angle AQM = 90^\circ = \angle MPA$, asuvad punktid A, P, M, Q järelduse 26.3 alusel ühel ringjoonel. Niisiis toetuvad piirdenurgad QMA ja QPA samalt poolt samale ringjoone kõõlule AQ ning on järelduse 26.1 alusel võrdsed. Kuna ka $\angle AKP = 90^\circ$, on kolmnurgad AQM ja AKP tunnuse NN alusel sarnased, järelikult saame muuhulgas $\angle PAK = \angle MAQ$.

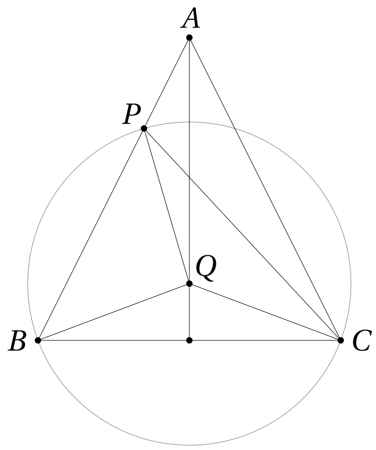
26.6 Teeme joonise.



Kesk- ja piirdenurga vahelisest seosest saame $\angle AOB = 2\angle ACB = 120^\circ$. OM on lõigu AB keskristsirge ja järelikult ka nurga AOB poolitaja, niisiis $\angle AOM = \angle MOB = 60^\circ$. Lisaks saame, et $\angle BOR = 180^\circ - \angle AOB = 60^\circ$. Kuna lõigud OM, OB ja OR on vaadeldava ringjoone raadiused, on MOB ja BOR võrdhaarsed kolmnurgad tipunurgaga 60°, st võrdkülgsed kolmnurgad. Järelikult on nelinurga $ROMB$ kõik küljed võrdsed, mistõttu nelinurk ise on romb.

26.7 Vastus: $\dfrac{\alpha}{2}$.

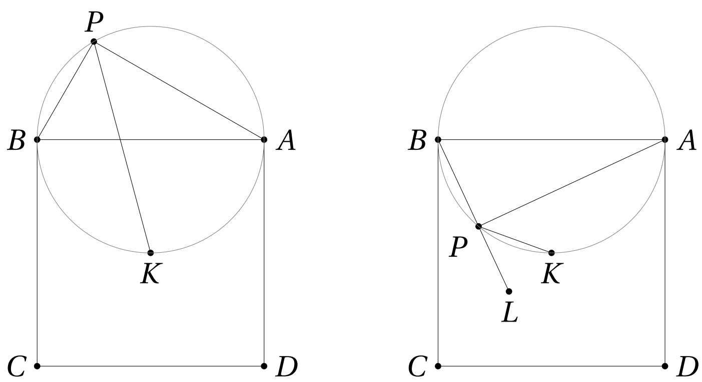
Võrdhaarses kolmnurgas ABC on tipust A tõmmatud kõrgus ühtlasi ka nurgapoolitaja ja külje BC keskristsirge (vt jaotis 31.1). Järelikult $|QB| = |QC|$, niisiis on Q kolmnurga BCP ümberringjoone keskpunkt.



Kesk-ja piirdenurga vahelisest seosest teame, et $\angle PQC = 2\angle PBC$. Kolmnurga ABC võrdhaarsus annab $\angle PBC = \dfrac{180^\circ - \angle BAC}{2} = 90^\circ - \dfrac{\alpha}{2}$. Kuna ka kolmnurk CPQ on võrdhaarne, saame nüüd leida

$$\angle QPC = \frac{180^\circ - \angle PQC}{2} = 90^\circ - \angle PBC = \frac{\alpha}{2}.$$

26.8 Kuna $\angle AKB = \angle APB = 90^\circ$, siis asuvad punktid K ja P ringjoonel diameetriga AB. Seejuures on võimalikud kaks põhimõtteliselt erinevat pilti sõltuvalt sellest, kas need punktid asuvad sirge AB suhtes samal või erineval pool.

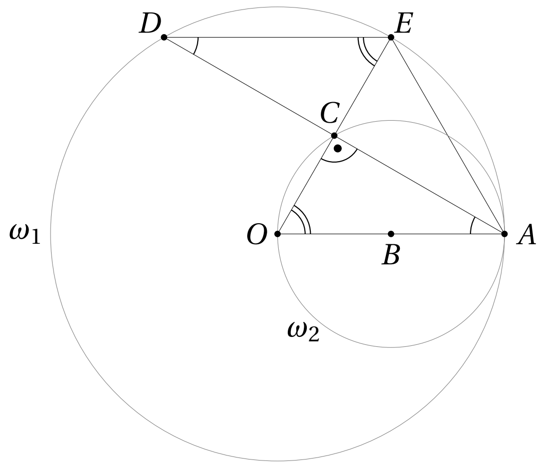


Vasakpoolsel joonisel näeme, et kaared BK ja KA on mõlemad võrdsed veerandiga täisringist, seega vastavad piirdenurgad $\angle BPK = \angle KPA = \dfrac{1}{2} \cdot 90^\circ = 45^\circ$.

Parempoolsel joonisel saame samuti $\angle KPA = 45^\circ$. Võtame sirgel BP suvalise punkti L nii, et P asub punktide B ja L vahel. Siis $\angle APL = 180^\circ - \angle APB = 90^\circ$, järelikult poolitab sirge PK ka sel juhul sirgete AP ja BP vahelise nurga.

26.9 Vastus: 30°.

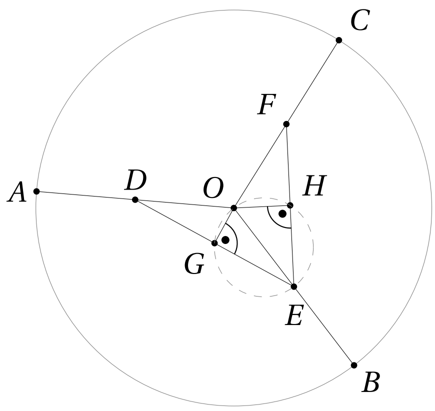
Teeme joonise.



OA on ringjoone ω_2 diameeter, seega Thalese teoreemi põhjal $\angle ACO = 90^\circ$. Kuna $DE \parallel AO$, saame põiknurkade võrdsusest $\angle OAD = \angle EDA$ ja $\angle EOA = \angle OED$. Kesk- ja piirdenurga vahelisest seosest ringjoonel ω_1 teame, et $\angle EOA = 2\angle EDA$; niisiis $\angle EOA = 2\angle OAD$. Kuna kolmnurk ACO on täisnurkne, peab muuhulgas kehtima võrdus $\angle EOA + \angle OAD = 90^\circ$. Järelikult $\angle OAD = 30^\circ$ ja $\angle EOA = 60^\circ$.

Kuivõrd $|OA| = |OE|$, on kolmnurk AEO võrdkülgne. Lõik AC tema tipust A tõmmatud kõrgusena on muuhulgas nurga OAE poolitaja (vt teoreem 31.1). Järelikult $\angle DAE = \dfrac{60^\circ}{2} = 30^\circ$.

26.10 Teeme joonise.

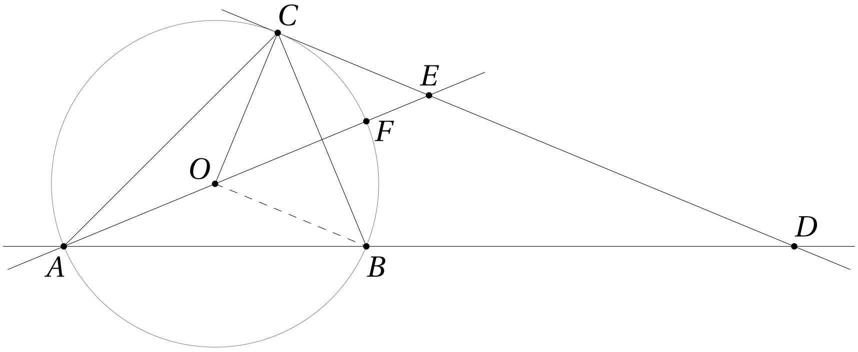


Olgu antud ringjoone raadius R, siis $|OD| = |OE| = |OF| = \dfrac{R}{2}$. Järelikult on kolmnurgad OFE ja OED võrdhaarsed ning mediaanid OH ja OG on ühtlasi nende kolmnurkade kõrgusteks (vt teoreem 31.1). Seega $\angle OHE = 90^\circ$ ja $\angle EGO = 90^\circ$, mistõttu punktid O, G, E ja H asuvad ühel ringjoonel.

26.11 Vastus: $\angle A = 45^\circ$ või $\angle A \in (60^\circ; 180^\circ)$.

On kaks võimaliust: kolmnurga ABC ümberringjoonele punktis C tõmmatud puutuja võib sirget AB lõigata kas lõigu AB pikendusel üle punkti A või pikendusel üle punkti B.

Vaatleme kõigepealt teist võimalust ja teeme joonise.

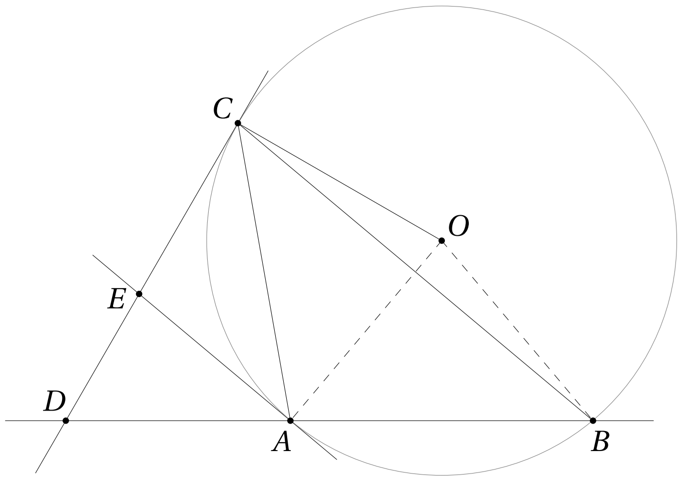


Lõigaku nurga DAC poolitaja kolmnurga ABC ümberringjoont teistkordselt punktis F. Kesk- ja piirdenurga vahelisest seosest teame, et $\angle COF = 2\angle CAF$. Teisest küljest aga $2\angle CAF = \angle CAB$, niisiis $\angle CAB = \angle COF = \angle COE$. Samas $\angle ECO = 90^\circ$, mistõttu

$$\angle CEA + \angle CAB = \angle CEO + \angle COE = 90^\circ .$$

Järelikult $\angle CEA = \angle CAB$ parajasti siis, kui $\angle CAB = 45^\circ$.

Vaatleme nüüd juhtu, kus kolmnurga ABC ümberringjoonele punktis C tõmmatud puutuja lõikab sirget AB lõigu AB pikendusel üle punkti A. Lihtne on mõista, et selline olukord esineb parajasti siis, kui $\angle CAB > 60^\circ$ (sest juhul $\angle CAB = 60^\circ$ on kolmnurk ABC võrdkülgne ning puntist C ümberringjoonele tõmmatud puutuja on paralleelne küljega AB).



AO on külje BC keskristsirge ja järelikult ka nurga CAB poolitaja (vt teoreem 31.1). Järelikult

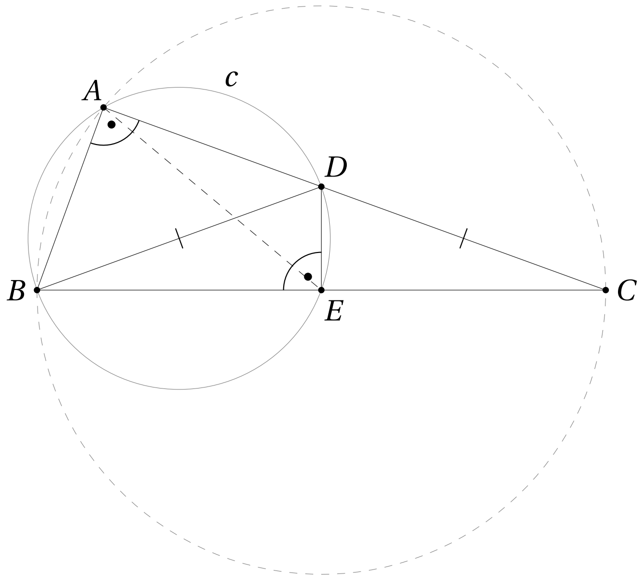
$$\angle EAD = \frac{1}{2}\angle DAC + \frac{1}{2}\angle CAB = \frac{1}{2} \cdot 180^\circ = 90^\circ ,$$

mistõttu AE on samuti kolmnurga ABC ümberringjoone puutuja. Puutujalõikude võrdsusest saame $|EA| = |EC|$, niisiis on CEA võrdhaarne kolmnurk.

Et EA ja BC on mõlemad risti sirgega AO, on nad omavahel paralleelsed ning põiknurkade võrdsusest järeldub $\angle BCA = \angle EAC$. Kokkuvõttes on CEA ja CAB võrdhaarsed kolmnurgad võrdsete alusnurkadega, mistõttu ka nende tipunurgad $\angle CEA$ ja CAB on võrdsed.

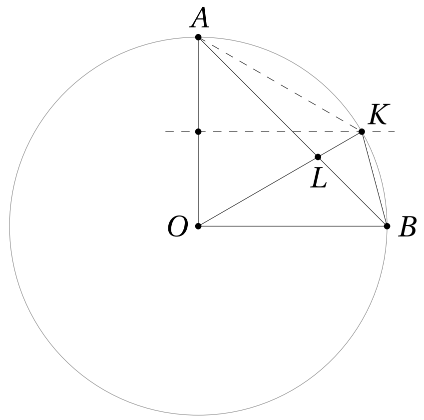
Teine võimalus näidata kolmnurkade CEA ja CAB alusnurkade võrdsust on kasutada puutuja ja kõõlu teoreemi 29.1 ning näidata selle abil, et $\angle ABC = \angle ACE$.

26.12 Teeme joonise.



Kuna $\angle BAD = \angle BAC = 90^\circ$, on BD ringjoone c diameeter. Järelikult on ka $\angle DEB$ diameetrile toetuv piirdenurk ja $\angle DEB = 90^\circ$. Kuna CD on pikkuselt võrdne ringjoone c diameetriga, saame $|CD| = |BD|$. Järelikult on kolmnurk BDC võrdhaarne ja tema kõrgus DE on ühtlasi ka mediaan (vt teoreem 31.1). Niisiis on E lõigu BC keskpunkt ja kuna BC on kolmnurga ABC hüpotenuus, osutub E ka selle kolmnurga ümberringjoone keskpunktiks. Järelikult $|AE| = |BE|$, mida oligi tarvis.

26.13 Kuna $|AO| = |BO|$, saab kolmnurgas AOB olla täisnurk ainult tipu O juures. Teeme joonise.



Kui joonis on vähegi korralik, on sellelt näha, et kolmnurk KBL saab olla võrdhaarne ainult tipunurgaga punkti B juures. Paneme lisaks tähele, et $|OB| = |OK|$, st kolmnurk BOK on võrdhaarne, kusjuures kolmnurkadel KBL ja BOK on üks ühine (alus)nurk.

Näitame, et kolmnurgad KBL ja BOK on sarnased. Selleks piisab, kui lisaks ühele ühisele nurgale tõestame, et $\angle KBL = \angle BOK$. Kesk- ja piirdenurga teoreemist teame, et $\angle KBA = \frac{1}{2}\angle KOA$, samas aga ka $\angle BOK = 90^\circ - \angle KOA$. Niisiis tuleb tõestada, et $\frac{1}{2}\angle KOA = 90^\circ - \angle KOA$ ehk $\angle KOA = 60^\circ$.

Kuna punkt K asub lõigu AO keskristsirgel, kehtib võrdus $|AK| = |OK|$. Et lisaks $|OA| = |OK|$, on kolmnurk AOK võrdkülgne, mistõttu saamegi $\angle KOA = 60^\circ$ ning järelikult $\angle KBL = 30^\circ = \angle BOK$.

26.14 Olgu sirgete y ja z lõikepunkt D. Järelduse 26.3 põhjal on $ABCD$ kõõlnelinurk diameetriga AD. Diameeter AD on aga kõõluga BC risti parajasti siis, kui AD on lõigu BC keskristsirge. See omakorda on nii parajasti siis, kui $|AB| = |AC|$.