25. Uurime pindalasid!

Pindalade uurimise meetodi peamine idee on siduda omavahel pindalade ja joonmõõtmete suhted. Seda lähenemist ilmestab järgmine lihtne, kuid väga kasulik tulemus.

Teoreem 25.1 Võrdsete kõrgustega kolmnurkade pindalad suhtuvad sama moodi nagu nende alused.

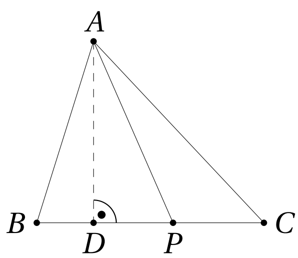
Tõestus. Olgu vaadeldavate kolmnurkade alused vastavalt a ja b ning kõrgused h. Siis nende pindalad S_1 ja S_2 suhtuvad nagu

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{\frac{a \cdot h}{2}}{\frac{b \cdot h}{2}} = \frac{a}{b}.$$

□

Seda teoreemi kasutatakse sageli olukorras, kus vaadeldavate kolmnurkade alused asuvad ühel sirgel ja kõrgused langevad kokku. Näiteks kui kolmnurga ABC küljel BC on võetud punkt P, kehtib võrdus

$$\frac{S_{ABP}}{S_{APC}} = \frac{|BP|}{|PC|}.$$



Ülesanded

Ülesanne 25.1 (Piirkonnavoor 2006, 9. klass) Kumera nelinurga diagonaalid jaotavad nelinurga neljaks kolmnurgaks, millest kolm on võrdse pindalaga S. Tõesta, et ka neljanda kolmnurga pindala on S.

Ülesanne 25.2 (Lõppvoor 2017, 9. klass) Kumera nelinurga $ABCD$ külgede AB ja CD keskpunktid on vastavalt M ja N. Punktid K ja L valitakse vastavalt külgedel BC ja AD nii, et $|CK| = 2|KB|$ ja $|AL| = 2|LD|$. Kui suure osa moodustab nelinurga $KMLN$ pindala nelinurga $ABCD$ pindalast?

Ülesanne 25.3 (Lõppvoor 2015, 10. klass) Kolmnurga ABC küljel BC valitakse selline punkt P, et $|BP| : |PC| = 2 : 1$. Tõesta, et lõik AP poolitab kolmnurga ABC tipust C tõmmatud mediaani.

Ülesanne 25.4 (Lõppvoor 2022, 9. klass) Kolmnurgas ABC valitakse küljel AC punkt M ja seejärel lõigul BM punkt K nii, et $|AM| = \frac{1}{3}|AC|$ ja $|BK| = \frac{1}{4}|BM|$. Olgu N sirge AK lõikepunkt küljega BC. Mitu protsenti moodustab nelinurga $MKNC$ pindala kolmnurga ABC pindalast?

Ülesanne 25.5 (Piirkonnavoor 2001, 11. klass) Olgu D kolmnurga ABC külje AB keskpunkt ja E selline punkt küljel BC, et $|BE| = 2\cdot|EC|$, kusjuures $\angle ADC = \angle BAE$. Tõesta, et kolmnurk ABC on täisnurkne.

Ülesanne 25.6 (Lõppvoor 2004, 9. klass) Kumera nelinurga $ABCD$ külgedel AB ja BC võetakse vastavalt punktid M ja N nii, et kumbki lõikudest AN ja CM jaotab nelinurga $ABCD$ kaheks võrdse pindalaga osaks. Tõesta, et lõigud MN ja AC on paralleelsed.

Ülesanne 25.7 (Sügisene lahtine võistlus 2001, noorem rühm) Kolmnurga ABC sisepiirkonnas võetakse punkt M nii, et kolmnurgad ABM, BCM ja CAM on võrdse pindalaga. Tõesta, et M on kolmnurga ABC mediaanide lõikepunkt.

Ülesanne 25.8 (Talvine lahtine võistlus 2008, noorem rühm) Kolmnurgas ABC on $|BC| = a$ ja $|AC| = b$. Tippu C ja külje AB keskpunkti läbival sirgel valitakse suvaline tipust C erinev punkt D. Olgu punktist D sirgetele AC ja BC tõmmatud ristlõikude aluspunktid vastavalt K ja L. Leia suhe $|DK| : |DL|$.

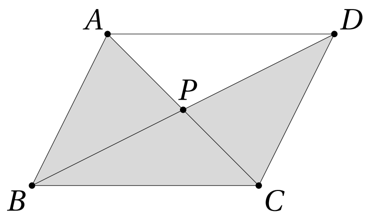
Ülesanne 25.9 (Lõppvoor 2004, 10. klass) Rööpküliku $ABCD$ külgedel BC ja AB võetakse vastavalt punktid M ja N nii, et $|AM| = |CN|$. Olgu P lõikude AM ja CN lõikepunkt. Tõesta, et nurga APC poolitaja läbib tippu D.

Ülesanne 25.10 (Lõppvoor 2010, 11. klass) Kolmnurga ABC külje BC keskpunkt on D. Tõesta, et kolmnurkade ABD ja ACD mediaanide lõikepunktid paiknevad sirgest AD võrdsel kaugusel.

Ülesanne 25.11 (Lõppvoor 2011, 12. klass) Korrapärase $2n$-nurga sees valitakse vabalt üks punkt ja ühendatakse see kõigi $2n$-nurga tippudega. Saadud kolmnurgad värvitakse vaheldumisi mustaks ja valgeks nii, et ühise küljega kolmnurgad on erinevat värvi. Tõesta, et valgete kolmnurkade pindalade summa on võrdne mustade kolmnurkade pindalade summaga.

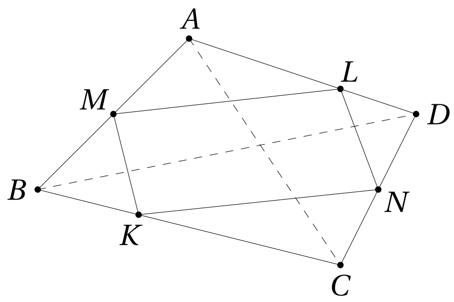
Lahendused

25.1 Tähistame nelinurga tipud A, B, C, D ja diagonaalide lõikepunkti P nii, et $S_{ABP} = S_{BCP} = S_{CDP} = S$. Teoreemi 25.1 põhjal järeldub võrdusest $S_{ABP} = S_{BCP}$ lõikude võrdus $|AP| = |PC|$ ning võrdusest $S_{BCP} = S_{CDP}$ lõikude võrdus $|BP| = |PD|$. Seega poolitavad nelinurga $ABCD$ diagonaalid teineteist, mistõttu see nelinurk on tegelikult rööpkülik. Järelikult on kolmnurgad BCP ja DAP sümmeetrilised punkti P suhtes, niisiis $S_{DAP} = S_{BCP} = S$.



25.2 Vastus: pool.

Teeme joonise.



Näeme, et

$$S_{KMNL} = S_{ABCD} - S_{AML} - S_{BKM} - S_{CNK} - S_{DLN}\,.$$

Lahenduse ideeks on kasutada teoreemi 25.1 ning avaldada kolmnurkade AML, BKM, CNK ja DLN pindalad nelinurga $ABCD$ tippudest moodustatud kolmnurkade pindalade kaudu. Saame

$$\begin{aligned}
S_{AML} &= \frac{1}{2}S_{ABL} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}S_{ABD} = \frac{1}{3}S_{ABD}\,,\\
S_{BKM} &= \frac{1}{2}S_{BKA} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}S_{BCA} = \frac{1}{6}S_{BCA}\,,\\
S_{CNK} &= \frac{1}{2}S_{CDK} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}S_{CDB} = \frac{1}{3}S_{CDB}\,,\\
S_{DLN} &= \frac{1}{2}S_{DLC} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}S_{DAC} = \frac{1}{6}S_{DAC}\,.
\end{aligned}$$

Nende võrduste kahekaupa liitmine annab

$$\begin{aligned}
S_{AML} + S_{CNK} &= \frac{1}{3}S_{ABD} + \frac{1}{3}S_{CDB} = \frac{1}{3}S_{ABCD}\,,\\
S_{BKM} + S_{DLN} &= \frac{1}{6}S_{BCA} + \frac{1}{6}S_{DAC} = \frac{1}{6}S_{ABCD}\,.
\end{aligned}$$

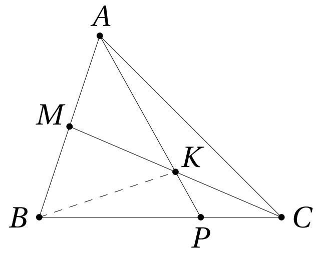
Niisiis

$$S_{AML} + S_{BKM} + S_{CNK} + S_{DLN} = \frac{1}{3}S_{ABCD} + \frac{1}{6}S_{ABCD} = \frac{1}{2}S_{ABCD},$$

järelikult

$$S_{KMNL} = S_{ABCD} - \frac{1}{2}S_{ABCD} = \frac{1}{2}S_{ABCD}.$$

25.3 Olgu külje AB keskpunt M ning lõigu AP ja mediaani CM lõikepunkt K.



Meie eesmärk on tõestada võrdus $|MK| = |KC|$. Teoreemi 25.1 põhjal piisab selleks näidata, et $S_{AMK} = S_{AKC}$.

Kuna M on külje AB keskpunkt, siis $S_{AMK} = \frac{1}{2}S_{ABK}$. Samas kehtivad võrdused

$$S_{ABK} = S_{ABP} - S_{KBP} \quad \text{ja} \quad S_{AKC} = S_{APC} - S_{KPC}.$$

Kuna ülesande tingimuste kohaselt $|BP| = 2|PC|$, saame (jällegi teoreemist 25.1)

$$S_{ABP} = 2S_{APC} \quad \text{ja} \quad S_{KBP} = 2S_{KPC},$$

järelikult

$$S_{ABK} = S_{ABP} - S_{KBP} = 2S_{APC} - 2S_{KPC} = 2(S_{APC} - S_{KPC}) = 2S_{AKC}.$$

Kokkuvõtteks

$$S_{AMK} = \frac{1}{2}S_{ABK} = S_{AKC},$$

mida oligi tarvis tõestada.

Tähelepanu tasub pöörata lõigule BK, mis algses ülesandepüstituses ei esine, kuid mis on vajalik kolmnurkade ABK ja KBP moodustamiseks. Selle lisakonstruktsiooniga kohtume uuesti ülesande 25.4 lahenduses.

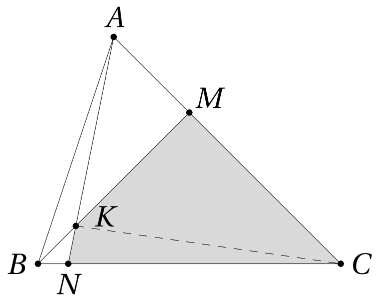
Siinsele ülesandele saab aga anda ka füüsikalise lahenduse. Vaatleme kolmnurga ABC tippe punktmasside süsteemina, kusjuures tippudesse A ja B rakendame massid 1 ning tippu C massi 2.

Alamsüsteemi $\{A, B\}$ massikeskmeks on siis M, alamsüsteemi $\{B, C\}$ massikeskmeks kangi reegli järgi aga P. Järelikult asub kogu süsteemi massikese sirgete CM ja AP lõikepunktis K. Seejuures peab kang CM toetuspunktiga K tasakaalu jääma, kui punktidesse C ja M on rakendatud vastavalt alamsüsteemide $\{C\}$ ja $\{A, B\}$ kogumassid. Et mõlema süsteemi massid moodustavad 2 kaaluühikut, peab kangi CM toetuspunkt K asuma vastava lõigu keskpunktis.[1]

[1] Selle lahenduse meetodi põhjal saab tasandil defineerida *barütsentrilise* koordinaatsüsteemi. Kui

25.4 Vastus: $\frac{13}{20}$ ehk 65%.

Teeme joonise.



Kuna $\frac{|MC|}{|AC|} = \frac{2}{3}$, saame teoreemist 25.1, et $\frac{S_{MBC}}{S_{ABC}} = \frac{2}{3}$. Veel oleks tarvis hinnata, kui suure osa moodustab kolmnurga KBN pindala kolmnurga MBC pindalast. Seda saame teha kolmnurga KBC pindala kaudu. (Pane tähele tekkivat lisakonstruktsiooni lõigu KC näol ning võrdle seda ülesande 25.3 lõiguga KB.)

Kuna $\frac{|KB|}{|MB|} = \frac{1}{4}$, siis teoreemi 25.1 põhjal $\frac{S_{KBC}}{S_{MBC}} = \frac{1}{4}$. Samast teoreemist saame $\frac{S_{KBN}}{S_{KBC}} = \frac{|BN|}{|BC|}$.

Hindame suhet $\frac{|BN|}{|BC|}$. Selleks võime kasutada ülesandest 25.3 tuttavat massikeskme meetodit. Valime tippudesse A ja C vastavat massid 2 ja 1; siis satub punktisüsteemi $\{A, C\}$ massikese punkti M. Selleks, et süsteemi $\{A, B, C\}$ massikese oleks punktis K, peame tippu B valima niisuguse massi, et kang BM toetuspunktiga K jääb tasakaalu, kui punkti M on rakendatud alamsüsteemi $\{A, C\}$ kogumass 3. Et $\frac{|BK|}{|KM|} = \frac{1}{3}$, tuleb tippu B selleks rakendada mass $3 \cdot 3 = 9$ ühikut.[2] Kuna N on sirgete AK ja BC lõikepunkt, peab ta olema alamsüsteemi $\{B, C\}$ massikese. Siit aga saame, et $\frac{|BN|}{|NC|} = \frac{1}{9}$ ja järelikult $\frac{|BN|}{|BC|} = \frac{1}{10}$.

Nüüd saame leida suhte

$$\frac{S_{KBN}}{S_{ABC}} = \frac{S_{KBN}}{S_{KBC}} \cdot \frac{S_{KBC}}{S_{MBC}} \cdot \frac{S_{MBC}}{S_{ABC}} = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{60}.$$

Järelikult

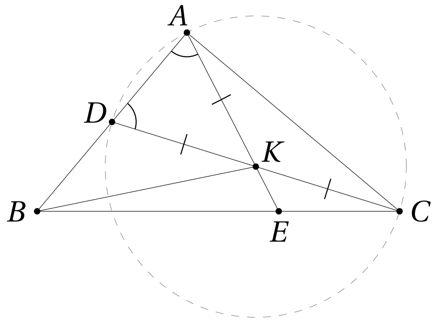
$$\frac{S_{MKNC}}{S_{ABC}} = \frac{S_{MBC} - S_{KBN}}{S_{ABC}} = \frac{S_{MBC}}{S_{ABC}} - \frac{S_{KBN}}{S_{ABC}} = \frac{2}{3} - \frac{1}{60} = \frac{40-1}{60} = \frac{39}{60} = \frac{13}{20}.$$

25.5 Ülesande 25.3 tulemuse põhjal poolitab lõik AE lõigu CD. Tähistame tekkivat lõikepunkti K; siis $|DK| = |KC|$ ja $|AK| = |DK|$ (sest $\angle KAD = \angle ADK$). Järelikult on

kooliõpikust tuttav ristkoordinaatide süsteem võtab aluseks kaks ristuvat (arv)sirget, siis barütsentrilise süsteemi alusena vaatleme kolmnurka ABC, mille tippudesse on rakendatud punktmassid m_A, m_B, m_C. Need massid võivad olla ka negatiivsed; küll aga nõuame, et $m_A + m_B + m_C \neq 0$. Selle punktisüsteemi massikeskme barütsentrilisteks koordinaatideks nimetamegi kolmikut $(m_A : m_B : m_C)$. Osutub, et paljude huvitavate punktide esitused barütsentrilistes koordinaatides on palju lihtsamad kui ristkoordinaatides. Nii näiteks on kolmnurga mediaanide lõikepunkti koordinaadid (selle kolmnurga enda suhtes) lihtsalt $(1:1:1)$ (või üldisemalt $(m:m:m)$), kolmnurga siseringjoone keskpunkti koordinaadid aga $(|BC| : |CA| : |AB|)$.

[2]Niisiis on punkti K barütsentrilised koordinaadid kolmnurga ABC suhtes $(2:9:1)$.

K kolmnurga ADC ümberringjoone keskpunkt. Muuhulgas on CD selle ringjoone diameeter, nurk $\angle CAD$ aga on siis diameetrile toetuva piirdenurgana täisnurk (vt Thalese teoreem 26.2).



Teise võimaliku lahenduse annab ülesanne 31.4.

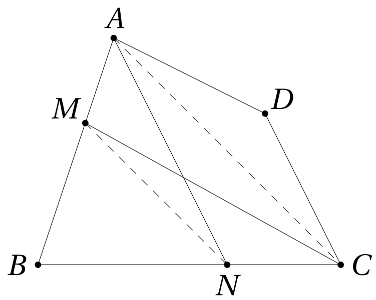
25.6 Vastavalt ülesande tingimustele

$$S_{ABN} = \frac{1}{2} S_{ABCD} = S_{BCM}.$$

Teoreemi 25.1 abil võrdleme kolmnurkade ABN ja BCM pindalasid nüüd kolmnurga ABC pindalaga:

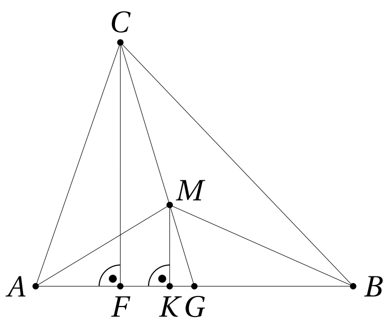
$$\frac{|BM|}{|BA|} = \frac{S_{BCM}}{S_{ABC}} = \frac{S_{ABN}}{S_{ABC}} = \frac{|BN|}{|BC|}.$$

Võrdusest $\dfrac{|BM|}{|BA|} = \dfrac{|BN|}{|BC|}$ järeldub aga kiirteteoreemi pöördteoreemi (vt teoreem 24.3) põhjal, et lõigud MN ja AC on paralleelsed.



25.7 Ülesande tingimused on samaväärsed võrdustega $S_{ABM} = S_{BCM} = S_{CAM} = \frac{1}{3} S_{ABC}$. Näitame, et mediaanide lõikepunkt rahuldab ülesande tingimusi ning et sellised punkte saab olla ainult üks.

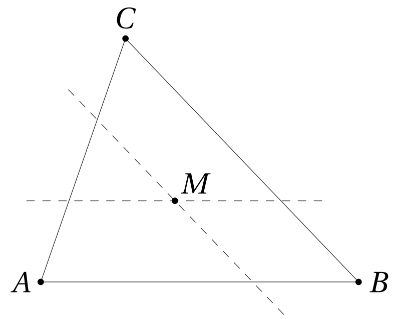
Olgu M kõigepealt mediaanide lõikepunkt, G külje AB keskpunkt ning F ja K vastavalt punktide C ja M ristprojektsioonid sirgele AB.



Kolmnurkadel MKG ja CFG on kaks võrdset nurka, niisiis on need kolmnurgad sarnased. Kuivõrd $\frac{|MG|}{|CG|} = \frac{1}{3}$, saame $\frac{|MK|}{|CF|} = \frac{1}{3}$ ning järelikult $S_{ABM} = \frac{1}{3}S_{ABC}$. (Saadud võrdused kehtivad ka erijuhul, kui M asub tipust C tõmmatud kõrgusel.) Sama moodi tõestame ka, et $S_{BCM} = \frac{1}{3}S_{ABC}$ ja $S_{CAM} = \frac{1}{3}S_{ABC}$.

Uurime nüüd, kus saavad asuda punktid M, mille korral $S_{ABM} = \frac{1}{3}S_{ABC}$. Kuna külg AB on kolmnurkadel ABM ja ABC ühine, peab kolmnurga ABM tipust M tõmmatud kõrgus moodustama $\frac{1}{3}$ kolmnurga ABC tipust C tõmmatud kõrgusest h_C. Järelikult peab punkt M asuma sirgel, mis on paralleelne sirgega AB ning mille kaugus sirgest AB on $\frac{1}{3}h_C$. (Niisuguseid sirgeid on tegelikult kaks, aga kuna M peab asuma kolmnurga ABC sisepiirkonnas, jääb neist alles see, mis asub sirge AB suhtes tipuga C samas pooltasandis.)

Sama moodi arutledes leiame, et punkt M peab asuma sirgel, mis on paralleelne sirgega BC ning mille kaugus sirgest BC on $\frac{1}{3}h_A$ (kus h_A on tipust A kolmnurgale ABC tõmmatud kõrgus). Nendel kahel sirgel on aga täpselt üks ühine punkt, mis peab järelikult olema kolmnurga ABC mediaanide lõikepunkt.



25.8 Vastus: $\frac{a}{b}$.

Lõigud DK ja DL on vastavalt kolmnurkadele DCA ja DBC tipust D tõmmatud kõrgused. Niisiis

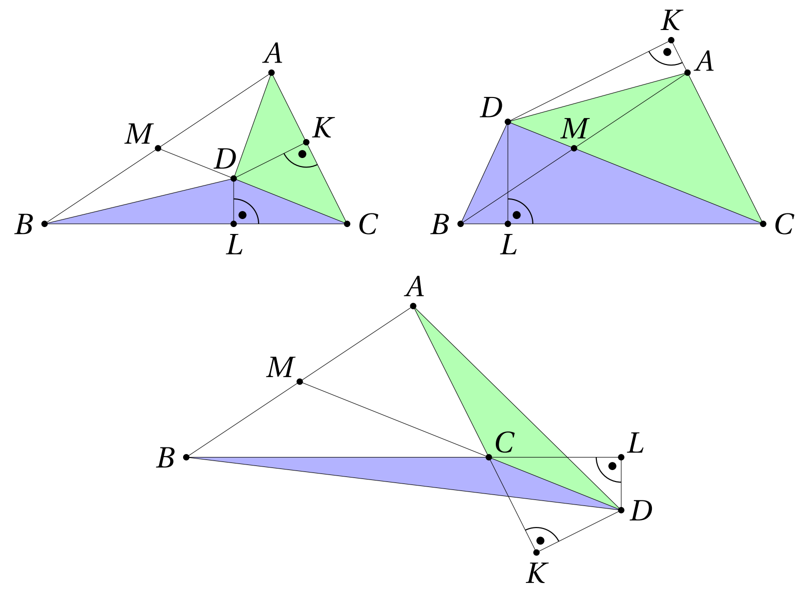
$$S_{DCA} = \frac{b \cdot |DK|}{2} \quad \text{ja} \quad S_{DBC} = \frac{a \cdot |DL|}{2}.$$

Lahenduse võtmesamm on tõestada, et $S_{DCA} = S_{DBC}$. Olgu M külje AB keskpunkt; siis teoreemist 25.1 järelduvad võrdused $S_{CAM} = S_{CBM}$ ning $S_{DAM} = S_{DBM}$.

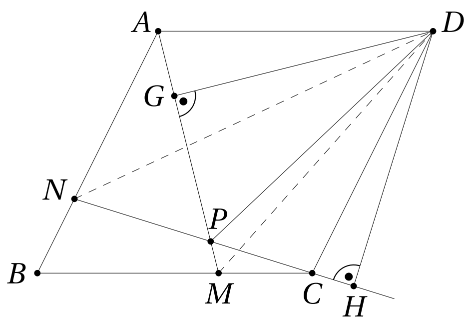
Edasi vaatleme kolme juhtu.

1. Kui punkt D asub lõigu CM (ja kolmnurga ABC) sisepiirkonnas, saame
$$S_{DCA} = S_{CAM} - S_{DAM} = S_{CBM} - S_{DBM} = S_{DBC}.$$
2. Kui punkt D asub lõigu CM pikendusel üle punkti M (või erijuhul $D = M$), saame
$$S_{DCA} = S_{CAM} + S_{DAM} = S_{CBM} + S_{DBM} = S_{DBC}.$$
3. Kui punkt D asub lõigu CM pikendusel üle punkti C, saame
$$S_{DCA} = S_{DAM} - S_{CAM} = S_{DBM} - S_{CBM} = S_{DBC}.$$

Igal juhul $S_{DCA} = S_{DBC}$ ehk $\dfrac{b \cdot |DK|}{2} = \dfrac{a \cdot |DL|}{2}$, millest järeldub $\dfrac{|DK|}{|DL|} = \dfrac{a}{b}$.



25.9 Nurga poolitaja on parajasti kõikide niisuguste punktide hulk, mis asuvad nurga haaradest samal kaugusel. Niisiis piisab tõestada, et punkti D kaugus sirgest AM on sama suur kui sirgest CN. Olgu G ja H punktist D vastavalt sirgetele AM ja CN tõmmatud ristlõikude aluspunktid. Teeme joonise.



Tuleb tõestada võrdus $|DG| = |DH|$. Paneme tähele, et tegemist on kõrgustega kolmnurkades AMD ja CND, mis on tõmmatud vastavalt külgedele AM ja CN. Kuna

$$S_{AMD} = \frac{|AM| \cdot |DG|}{2} \quad \text{ja} \quad S_{CND} = \frac{|CN| \cdot |DH|}{2} \quad \text{ning} \quad |AM| = |CN|\,,$$

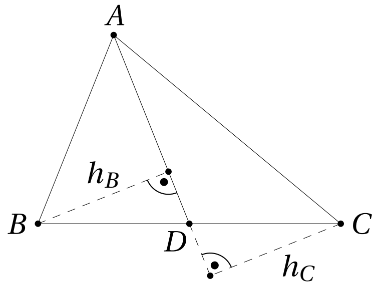
siis on võrdus $|DG| = |DH|$ samaväärne võrdusega $S_{AMD} = S_{CND}$. Viimane võrdus aga kehtib, sest mõlemad kolmnurgad moodustavad poole rööpküliku $ABCD$ pindalast.

33.6 Ülesande 25.7 lahenduses nägime, et mediaanide lõikepunkti kaugus küljest on $\frac{1}{3}$ vastavale küljele tõmmatud kõrguse pikkusest. Niisiis piisab tõestada, et kolmnurkade ABD ja ABC ühisele küljele AD tippudest B ja C tõmmatud kõrgused h_B ja h_C on võrdsed.

Kuna $|BD| = |DC|$, järeldub teoreemist 25.1, et $S_{ABD} = S_{ACD}$. Teisest küljest teame, et

$$S_{ABD} = \frac{|AD| \cdot h_B}{2} \quad \text{ja} \quad S_{ACD} = \frac{|AD| \cdot h_C}{2}.$$

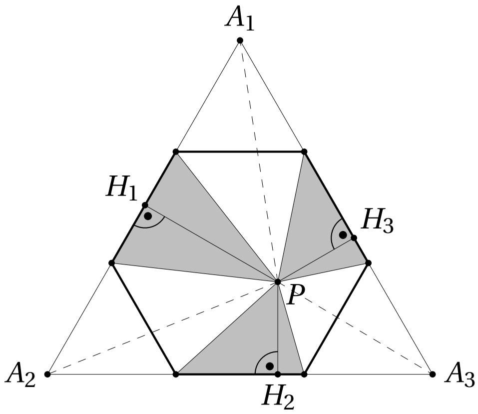
Järelikult $h_B = h_C$, mida oligi tarvis.



25.11 Tõmbame valitud punktist P kõigile kolmnurkadele kõrgused. Kuna antud hulknurk on korrapärane, on kõikide kolmnurkade alused võrdse pikkusega. Järelikult piisab tõestada, et valgetele kolmnurkadele tõmmatud kõrguste pikkuste summa on võrdne mustadele kolmnurkadele tõmmatud kõrguste pikkuste summaga.

Kui $n = 2$ (st antud on ruut), on see väide ilmne, sest vastavate kõrguste pikkuste summa võrdub mõlemal juhul ruudu küljepikkusega.

Kui $n \geqslant 3$, pikendame mustade kolmnurkade aluseid kuni lõikumiseni nii, et tekib korrapärane n-nurk $A_1 A_2 \ldots A_n$.



Paneme tähele, et mustade kolmnurkade kõrgused $PH_1, PH_2, \ldots, PH_n$ on ühtlasi kolmnurkade $PA_1A_2, PA_2A_3, \ldots, PA_nA_1$ kõrgused. Teisest küljest aga on kolmnurkade PA_1A_2, $PA_2A_3, \ldots, PA_nA_1$ pindalade summa võrdne korrapärase hulknurga $A_1A_2 \ldots A_n$ pindalaga, st

$$S_{A_1A_2\ldots A_n} = \frac{|A_1A_2| \cdot |PH_1|}{2} + \frac{|A_2A_3| \cdot |PH_2|}{2} + \ldots + \frac{|A_nA_1| \cdot |PH_n|}{2} = \\ = \frac{a}{2}(|PH_1| + |PH_2| + \ldots + |PH_n|),$$

kus a on hulknurga $A_1A_2 \ldots A_n$ küljepikkus. Järelikult

$$|PH_1| + |PH_2| + \ldots + |PH_n| = \frac{2S_{A_1A_2\ldots A_n}}{a}.$$

Nüüd on aga lihtne mõista, et valgete kolmnurkade aluseid pikendades saame täpselt sama suure korrapärase n-nurga, mistõttu ka vastavate kõrguste summa avaldub sama moodi.