24. Sarnased kolmnurgad

Kolmnurkade sarnasus on omadus, mis leiab matemaatikavõistlustel sagedast kasutamist. Võtame kooliõpikust tuttavad tulemused lühidalt kokku teoreemi vormis.

Teoreem 24.1 Kahe kolmnurga jaoks on järgmised väited samaväärsed:

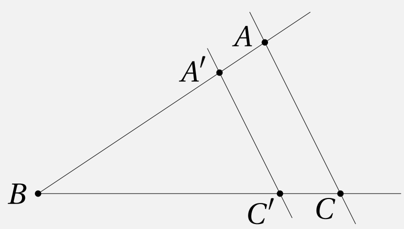
1. nende kolmnurkade küljed on vastavalt võrdelised (tunnus KKK),
2. nende kolmnurkade nurgad on vastavalt võrdsed (tunnus NNN),
3. nende kolmnurkade kaks paari külgi on vastavalt võrdelised ning nende külgede vahelised nurgad on võrdsed (tunnus KNK).

Definitsioon 24.1 Kui teoreemi 24.1 tingimused on täidetud, ütleme, et vaadeldavad kolmnurgad on *sarnased*. Kolmnurkade ABC ja $A'B'C'$ sarnasust tähistame $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

Teoreemi 24.1 kasutatakse tüüpiliselt nii, et tõestatakse kahe kolmnurga sarnasus mingi tunnuse alusel ja siis kasutatakse mõnda teist tunnust uute seoste tuletamiseks. Kuna iga kolmnurga nurkade summa on $180°$, piisab tunnuse NNN puhul muidugi ainult kahe nurga vastava võrdsuse näitamisest (mistõttu seda nimetatakse sageli ka lihtsalt NN tunnuseks).

Kolmnurkade sarnasuse tõestamisel on sageli kasu kiirteteoreemist, mille siinkohal anname järgmises sõnastuses.

Teoreem 24.2 Kui nurga haarasid lõigata paralleelsete sirgetega, tekivad sarnased kolmnurgad. Joonise tähistes $\triangle ABC \sim \triangle A'BC'$.



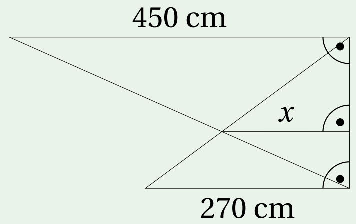
Kehtib ka kiirteteoreemi pöördteoreem.

Teoreem 24.3 Kui sirged lõikavad nurga haarasid nii, et ühel haaral tekkinud lõigud on võrdelised teise haara vastavate lõikudega, siis on lõikesirged paralleelsed.

Teoreemi 24.2 joonise tähistes järeldub siis võrdusest $\frac{|AB|}{|A'B|} = \frac{|CB|}{|C'B|}$ seos $AC \parallel A'C'$.

Ülesanded

Ülesanne 24.1 (Piirkonnavoor 1999, 9. klass) Arvuta joonisel märgitud lõigu x pikkus.



Ülesanne 24.2 (Piirkonnavoor 1998, 10. klass) Trapetsi $ABCD$ alustega AB ja CD paralleelne sirge lõikab selle haarasid AD ja BC vastavalt punktides E ja F. Trapetsi diagonaal AC poolitab lõigu EF. Tõesta, et lõik EF läbib trapetsi diagonaalide lõikepunkti.

Ülesanne 24.3 (Piirkonnavoor 1998, 11. klass) Võrdhaarses kolmnurgas ABC on aluse BC ja haara pikkuste suhe k. Sirgel AB võetakse punktist B erinev punkt D nii, et lõik CD on pikkuselt võrdne kolmnurga ABC alusega. Leia lõigu BD ja kolmnurga ABC haara pikkuste suhe.

Ülesanne 24.4 (Piirkonnavoor 2017, 11. klass) Kolmnurgas ABC kehtib $|BC| = 2|AB|$. Olgu D lõigu BC keskpunkt ja K lõigu BD keskpunkt. Tõesta, et $|AC| = 2|AK|$.

Ülesanne 24.5 (Piirkonnavoor 2002, 11. klass) Võrdhaarse kolmnurga haarale tõmmatud kõrgus jaotab haara suhtes $1:2$. Milline võib olla selle kolmnurga haara ja aluse pikkuste suhe?

Ülesanne 24.6 (Lõppvoor 2003, 12. klass) Kolmnurgas ABC on $\angle C = 90°$. Kiirel CB võetakse punkt D nii, et $|AC| \cdot |CD| = |BC|^2$. Läbi punkti D paralleelselt hüpotenuusiga AB tõmmatud sirge lõikab kiirt CA punktis E. Leia nurga BEC suurus.

Ülesanne 24.7 (Lõppvoor 1999, 12. klass) Tõesta, et teravnurkse kolmnurga ABC kõrguste lõikepunkti ja mediaanide lõikepunkti ühendav lõik on paralleelne kolmnurga küljega AB siis ja ainult siis, kui $\tan\angle A \cdot \tan\angle B = 3$.

Märkus: lõigu pikkusega 0 loeme paralleelseks mistahes sirgega.

Ülesanne 24.8 (Lõppvoor 2001, 11. klass) Kolmnurga ABC külgedel BC, CA ja AB võetakse vastavalt punktid D, E ja F nii, et lõikudel AD, BE ja CF on ühine punkt O. Tõesta, et

$$\frac{|AO|}{|OD|} = \frac{|AE|}{|EC|} + \frac{|AF|}{|FB|}.$$

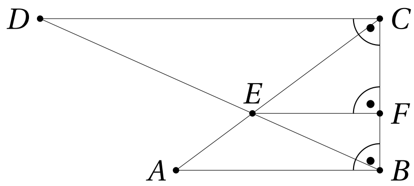
Ülesanne 24.9 (Lõppvoor 2009, 12. klass) Tõesta, et rööpküliku diagonaalide pikkuste suhe on võrdne külgede pikkuste suhtega parajasti siis, kui diagonaalide lõikumisel tekkivad nurgad on võrdsed rööpküliku sisenurkadega.

Vaata ka ülesandeid 25.7, 27.8, 27.9, 34.2, 37.6, 27.11 ja 30.9.

Lahendused

24.1 Vastus: $x = 168{,}75$ cm.

Tähistame punktid nii nagu näidatud joonisel.



Kuna $AB \parallel EF \parallel DC$, saame kiirteteoreemist, et $\triangle CEF \sim \triangle CAB$ ja $\triangle BEF \sim \triangle BDC$. Kolmnurkade CEF ja CAB sarnasusest saame

$$\frac{|EF|}{|AB|} = \frac{|CF|}{|CB|},$$

kolmnurkade BEF ja BDC sarnasusest aga

$$\frac{|EF|}{|DC|} = \frac{|FB|}{|CB|}.$$

Tuletatud võrduste liitmine annab

$$\frac{|EF|}{|AB|} + \frac{|EF|}{|DC|} = \frac{|CF|}{|CB|} + \frac{|FB|}{|CB|} = \frac{|CF| + |FB|}{|CB|} = \frac{|CB|}{|CB|} = 1,$$

kust leiame

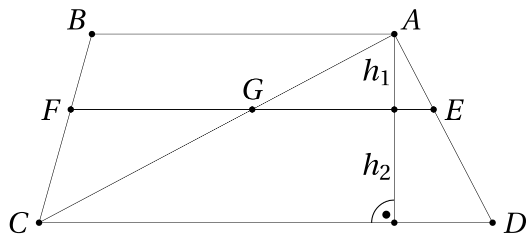
$$|EF|\left(\frac{1}{|AB|} + \frac{1}{|CD|}\right) = 1.$$

Järelikult

$$x = |EF| = \frac{1}{\frac{1}{|AB|} + \frac{1}{|CD|}} = \frac{1}{\frac{1}{270} + \frac{1}{450}} = \frac{1}{\frac{5+3}{1350}} = \frac{1350}{8} = 168{,}75 \text{ cm}.$$

24.2 Liigutades lõiku EF paralleelselt trapetsi ühe või teise aluse poole, on selge, et leidub täpselt üks asend, kus diagonaal selle lõigu poolitab. Uurime, kui kaugel lõik EF selles asendis alustest on.

Tõmbame trapetsile kõrguse ning jagagu lõik EF selle kõrguse lõikudeks pikkustega h_1 ja h_2.



Kiirteteoreemi põhjal on $\triangle AGE \sim \triangle ACD$, mistõttu $\dfrac{|GE|}{|CD|} = \dfrac{h_1}{h_1+h_2}$ ehk $|GE| \cdot (h_1+h_2) = |CD| \cdot h_1$. Sama moodi kehtib ka $\triangle CGF \sim \triangle CAB$, millest järeldub võrdus $\dfrac{|GF|}{|AB|} = \dfrac{h_2}{h_1+h_2}$ ehk $|GF| \cdot (h_1+h_2) = |AB| \cdot h_2$.

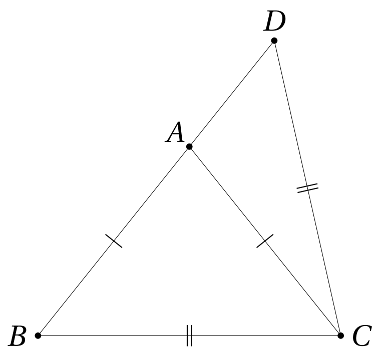
Diagonaal AC poolitab lõigu EF parajasti siis, kui $|GE| = |GF|$, mis on omakorda samaväärne võrdustega

$$|GE| \cdot (h_1+h_2) = |GF| \cdot (h_1+h_2)\,,$$
$$|CD| \cdot h_1 = |AB| \cdot h_2\,,$$
$$\frac{|AB|}{|CD|} = \frac{h_1}{h_2}\,.$$

Viimane võrdus ei sõltu diagonaali valikust, st ka diagonaal BD poolitab lõigu EF parajasti siis, kui $\dfrac{|AB|}{|CD|} = \dfrac{h_1}{h_2}$. See aga tähendab, et diagonaalid AC ja BD lõikuvad lõigu EF keskpunktis, millest järeldubki ülesande väide.

24.3 Vastus: k^2.

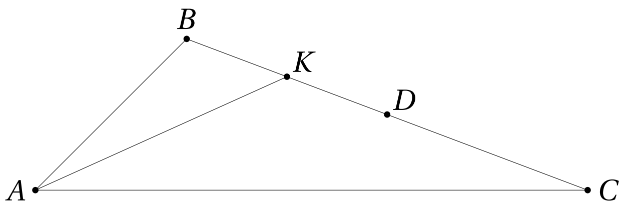
Teeme joonise.



Ülesande tingimuste põhjal on ABC ja CBD võrdhaarsed kolmnurgad, kusjuures neil on tipu B juures ühine alusnurk. Järelikult on nende kolmnurkade nurgad paarikaupa võrdsed ja NNN tunnuse alusel saame $\triangle ABC \sim \triangle CBD$. Seega

$$\frac{|BD|}{|BC|} = \frac{|BC|}{|BA|}\,, \quad \text{millest} \quad \frac{|BD|}{|BA|} = \frac{|BC|^2}{|BA|^2} = k^2\,.$$

24.4 Teeme joonise.



Ülesande tingimuste põhjal

$$|KB| = \frac{|BD|}{2} = \frac{|BC|}{4} = \frac{|AB|}{2}\,.$$

Kolmnurkadel ABC ja KBA on ühine nurk tipu B juures ning lisaks

$$\frac{|AB|}{|KB|} = 2 = \frac{|BC|}{|BA|}.$$

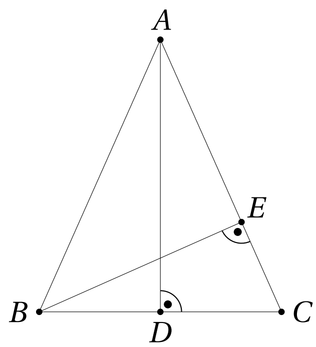
Järelikult on need kolmnurgad sarnased tunnuse KNK põhjal, mistõttu ka

$$\frac{|AC|}{|KA|} = \frac{|AB|}{|KB|} = 2.$$

24.5 Vastus: $\sqrt{\frac{3}{2}}$ ja $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Olgu vaadeldav võrdhaarne kolmnurk ABC. Olgu tema tipunurgast A tõmmatud kõrguse aluspunkt D ning tipust B tõmmatud kõrguse aluspunkt E. Kuna kolmnurk on võrdhaarne, poolitab kõrgus AD ühtlasi aluse BC (vt teoreem 31.1).

Ülesande tekstile vastab kaks võimalikku olukorda. Vaatleme kõigepealt juhtu $|AE| = 2|EC|$ (ehk $|AC| = 3|EC|$).



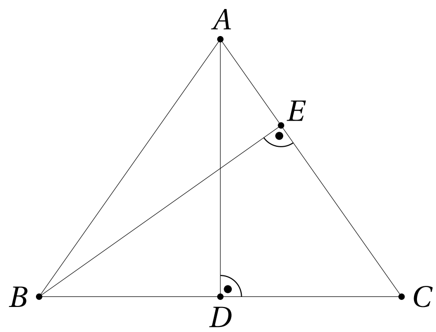
Kolmnurkadel ADC ja BEC on üks ühine nurk tipu C juures ning kummalgi on ka üks täisnurk. Seega on need kolmnurgad sarnased ja vastavate külgede võrdelisusest saame

$$\frac{|DC|}{|EC|} = \frac{|AC|}{|BC|} = \frac{3|EC|}{2|DC|}.$$

Järelikult $2|DC|^2 = 3|EC|^2$, millest $\frac{|EC|}{|DC|} = \sqrt{\frac{2}{3}}$ ja

$$\frac{|AC|}{|BC|} = \frac{3}{2} \cdot \frac{|EC|}{|DC|} = \frac{3}{2} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} = \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Teine võimalus on $2|AE| = |EC|$ (ehk $|AC| = 1{,}5|EC|$).



Analoogiliselt esimese juhuga saame $\triangle ADC \sim \triangle BEC$, mis nüüd annab

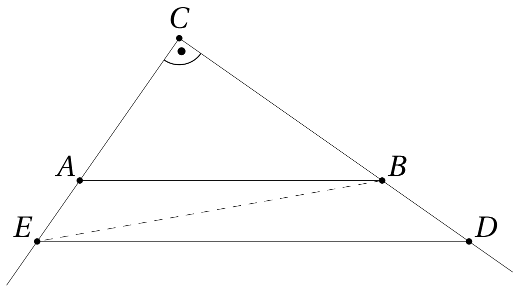
$$\frac{|DC|}{|EC|} = \frac{|AC|}{|BC|} = \frac{1{,}5|EC|}{2|DC|} = \frac{3|EC|}{4|DC|}.$$

Järelikult $4|DC|^2 = 3|EC|^2$, millest $\frac{|EC|}{|DC|} = \frac{2}{\sqrt{3}}$ ja

$$\frac{|AC|}{|BC|} = \frac{1{,}5}{2} \cdot \frac{|EC|}{|DC|} = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

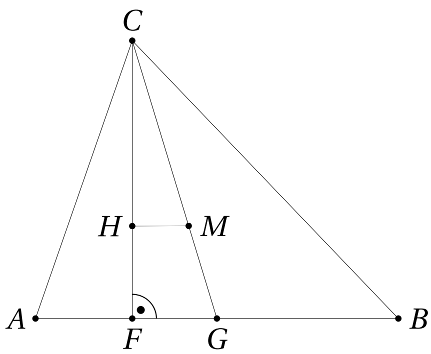
24.6 Vastus: 45°.

Teeme joonise.



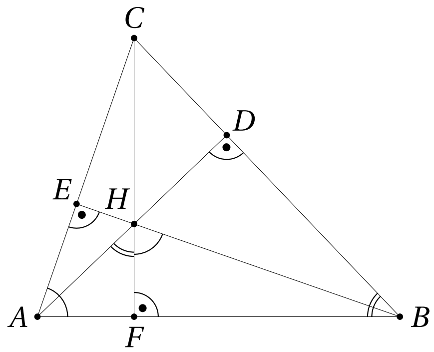
Vastavalt ülesande tingimustele $\frac{|AC|}{|BC|} = \frac{|BC|}{|CD|}$. Kiirteteoreemi põhjal $\triangle ABC \sim \triangle EDC$, mistõttu $\frac{|BC|}{|CD|} = \frac{|AC|}{|CE|}$. Kokkuvõttes $\frac{|AC|}{|BC|} = \frac{|AC|}{|CE|}$, millest järeldub $|BC| = |CE|$. Niisiis on BCE täisnurkne võrdhaarne kolmnurk teravnurgaga $\angle BEC = 45^\circ$.

24.7 Olgu kolmnurga ABC kõrguste lõikepunkt H, mediaanide lõikepunkt M, tipust C tõmmatud kõrguse aluspunkt F ning külje AB keskpunkt G.



Näeme, et $HM \parallel AB$ parajasti siis, kui kolmnurgad CHM ja CFG on sarnased. Kuna M on mediaanide lõikepunkt, siis $\frac{|CG|}{|MG|} = 3$. Järelikult $\triangle CHM \sim \triangle CFG$ parajasti siis, kui $\frac{|CF|}{|HF|} = 3$. (Erijuhul, kui tipust C tõmmatud kõrgus ja mediaan langevad kokku, saame $H = M$, mis annab samuti sama võrduse.)

Vaatleme nüüd lisaks kolmnurga tippudest A ja B tõmmatud kõrgusi; olgu nende aluspunktid vastavalt D ja E.



Suuruse $\tan\angle A$ saame leida täisnurkse kolmnurga kaatetite suhtena, kui selle kolmnurga üks teravnurk on $\angle A$. Esimese hooga hakkab sobivaid kolmnurki joonisel silma kaks: ACF ja ABE. Hoolikamal uurimisel leiame aga veel kolmandagi nendega sarnase kolmnurga, nimelt HBF. Tõepoolest,

$$\angle BHF = 90^\circ - \angle FBH = 90^\circ - \angle ABE = \angle A,$$

lisaks muidugi $\angle HFB = 90^\circ$. Niisiis saame

$$\tan\angle A = \frac{|CF|}{|AF|} = \frac{|BE|}{|AE|} = \frac{|BF|}{|HF|}.$$

Analoogiliselt näeme, et $\triangle BCF \sim \triangle BAD \sim \triangle HAF$ on täisnurksed kolmnurgad teravnurgaga $\angle B$, mistõttu

$$\tan\angle B = \frac{|CF|}{|BF|} = \frac{|AD|}{|BD|} = \frac{|AF|}{|HF|}.$$

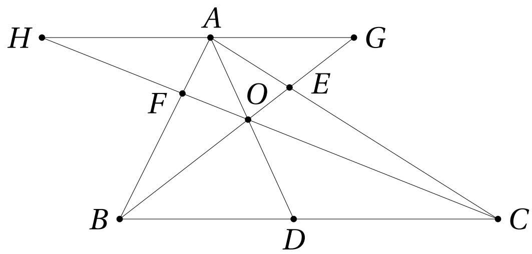
Võrduste $\tan\angle A = \frac{|CF|}{|AF|}$ ja $\tan\angle B = \frac{|AF|}{|HF|}$ korrutamine annab

$$\tan\angle A \cdot \tan\angle B = \frac{|CF|}{|HF|}.$$

Eespool nägime, et tingimus $HM \parallel AB$ on samaväärne tingimusega $\frac{|CF|}{|HF|} = 3$, mistõttu ta on samaväärne ka tingimusega $\tan\angle A \cdot \tan\angle B = 3$.

24.8 Üldjuhul ei teki selle ülesande joonist tehes ühtegi paari sarnaseid kolmnurki. Küll aga esinevad tekstis lõikude suhted, mis viitab, et kuidagimoodi peaks sarnastest kolmnurkadest olema võimalik kasu lõigata.

Lahenduse võtmeks on leida lisakonstruktsioon, mis tekitab joonisele kaks sarnast kolmnurka, milledes AO ja OD on vastavad lõigud. Sobiva konstruktsiooni annab homoteetne teisendus keskpunktiga O ning kordajaga $-\frac{|AO|}{|OD|}$ (homoteetia kohta loe rohkem jaotisest 33). See teisendus viib punkti D punktiks A; viigu ta lisaks punktid B ja C vastavalt punktideks G ja H. Siis muuhulgas $GH \parallel BC$ ja $\frac{|AO|}{|OD|} = \frac{|GH|}{|BC|}$.

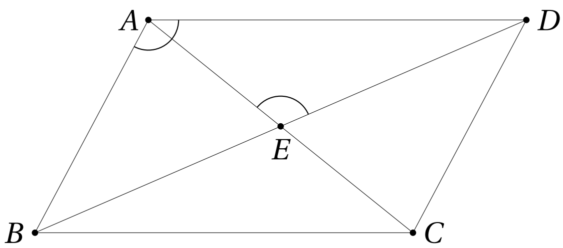


Põiknurkade võrdsusest saame $\angle EGA = \angle EBC$ ja $\angle GAE = \angle BCE$. Järelikult on kolmnurgad EGA ja EBC sarnased, mistõttu $\frac{|AE|}{|EC|} = \frac{|GA|}{|BC|}$. Sama moodi on sarnased ka kolmnurgad FAH ja FBC, kust saame $\frac{|AF|}{|FB|} = \frac{|AH|}{|BC|}$. Kokkuvõttes

$$\frac{|AO|}{|OD|} = \frac{|GH|}{|BC|} = \frac{|GA| + |AH|}{|BC|} = \frac{|GA|}{|BC|} + \frac{|AH|}{|BC|} = \frac{|AE|}{|EC|} + \frac{|AF|}{|FB|},$$

mida oligi tarvis tõestada.

24.9 Tähistame rööpküliku tipud A, B, C, D nii, et $|AB| \leqslant |AD|$ ja $|AC| \leqslant |BD|$. Siis $\angle ABC \leqslant 90^\circ \leqslant \angle DAB$. Tähistame rööpküliku diagonaalide lõikepunkti E, mis on muidugi ka mõlema diagonaali keskpunkt.



Koosinusteoreemi põhjal

$$\begin{aligned}
|AB|^2 &= |AE|^2 + |BE|^2 - 2 \cdot |AE| \cdot |BE| \cdot \cos\angle BEA, \\
|AD|^2 &= |AE|^2 + |DE|^2 - 2 \cdot |AE| \cdot |DE| \cdot \cos\angle AED = \\
&= |AE|^2 + |BE|^2 - 2 \cdot |AE| \cdot |BE| \cdot \cos(180^\circ \angle BEA) = \\
&= |AE|^2 + |BE|^2 + 2 \cdot |AE| \cdot |BE| \cdot \cos\angle BEA.
\end{aligned}$$

Kuna $|AB|^2 \leqslant |AD|^2$, siis $\cos\angle BEA \geqslant 0$, millest järeldub, et $\angle BEA \leqslant 90^\circ \leqslant \angle AED$.

Seega juhul, kui rööpküliku sisenurgad on võrdsed diagonaalide lõikumisel tekkivate nurkadega, peab kehtima võrdus $\angle AED = \angle DAB$. Kuna kolmnurkadel AED ja BAD on tipu D juures sama nurk, saame vaadeldaval juhul $\triangle AED \sim \triangle BAD$. Järelikult peavad nende kolmnurkade vastavad küljed olema võrdelised, st

$$\frac{|AB|}{|AD|} = \frac{|EA|}{|ED|} = \frac{|AC|}{|BD|},$$

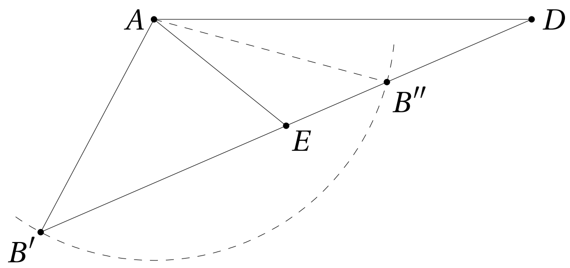
nagu oligi tarvis.

Veel tuleb tõestada vastupidine järeldus. Eeldame võrdust

$$\frac{|AB|}{|AD|} = \frac{|AC|}{|BD|} = \frac{|EA|}{|ED|}$$

ning näitame, et $\angle AED = \angle DAB$. Selleks piisab tõestada, et kolmnurgad AED ja BAD on sarnased. Nende nurgad tipu D juures on jällegi samad, kuid sellest ei piisa teoreemi 24.1 kasutamiseks, sest tegemist pole võrde $\frac{|AB|}{|AD|} = \frac{|EA|}{|ED|}$ vastavate külgede vahelise nurgaga.

Uurime olukorda lähemalt. Olgu nurk tipu D juures fikseeritud ning fikseerime ka punktid A ja E selle nurga erinevatel haaradel. Mitu erinevat punkti B saab sirgel ED valida nii, et $\frac{|AB|}{|AD|} = \frac{|EA|}{|ED|}$? Kuna punktid A, D ja E on fikseeritud, saab $|AB| = |AD| \cdot \frac{|EA|}{|ED|}$ omada vaid üht võimalikku väärtust. See tähendab, et punkt B saab olla ainult sirge ED lõikepunkt ringjoonega, mille keskpunkt on A ning raadius $|AB|$. Järelikult saab leiduda ülimalt kaks niisugust punkti; tähistame neid B' ja B''.



On selge, et kiirel DE leidub parajasti üks punkt B, mille korral $\triangle AED \sim \triangle BAD$. Kuna sellise punkti B jaoks kehtib võrdus $\frac{|AB|}{|AD|} = \frac{|EA|}{|ED|}$, peab B langema kokku ühega punktidest B' ja B''. Tuletame meelde, et tänu rööpküliku tippude tähistuste valikule saime $\angle AED \geqslant 90^\circ$ ja $\angle DAB \geqslant 90^\circ$. Jääb veel tähele panna, et võrratustest $\angle DAB' \geqslant 90^\circ$ ja $\angle DAB'' \geqslant 90^\circ$ saab kehtida ainult üks. Niisiis peab joonise tähistes kehtima $B = B'$ ja ühtlasi ka $\triangle AED \sim \triangle BAD$.