

23. Euleri teoreem ja Fermat' väike teoreem

Olgu antud täisarv $n \geq 2$. Vaatleme kõiki arve hulgast $\{1, 2, \dots, n\}$, mis on arvuga n ühistegurita. Selliste arvude hulka tähistatakse \mathbb{Z}_n^* ; niisiis näiteks $\mathbb{Z}_5^* = \{1, 2, 3, 4\}$ ja $\mathbb{Z}_{10}^* = \{1, 3, 7, 9\}$.

Hulkadel \mathbb{Z}_n^* on üks väga huvitav omadus. Kui võtame suvalise $x \in \mathbb{Z}_n^*$, korrutame ta läbi hulga \mathbb{Z}_n^* kõigi elementidega (sealhulgas iseendaga!) ja leiame korrutiste jäägid jagamisel n -ga, saame uuesti kätte kõik hulga \mathbb{Z}_n^* elemendid, igauhe ühe korra.

Näiteks valides $7 \in \mathbb{Z}_{10}^*$, leiame

$$7 \cdot 1 \equiv 7 \pmod{10},$$

$$7 \cdot 3 \equiv 1 \pmod{10},$$

$$7 \cdot 7 \equiv 9 \pmod{10},$$

$$7 \cdot 9 \equiv 3 \pmod{10}.$$

Harjutus 23.1 Vali veel mõni täisarv $n \geq 2$ ja $x \in \mathbb{Z}_n^*$ ning kontrolli ülaltoodud omaduse kehtivust.

Tõestame, et see omadus kehtib ka üldiselt. Olgu meil siis antud täisarv $n \geq 2$ ja hulgas \mathbb{Z}_n^* mingi fikseeritud element x .

Valime samast hulgast veel ühe elemendi y (võib olla $y = x$) ning kontrollime kõigepealt, et $x \cdot y \pmod n \in \mathbb{Z}_n^*$. Kuna $x, y \in \mathbb{Z}_n^*$, siis on nad mõlemad n -iga ühistegurita. Järelikult on n -iga ühistegurita ka arv $x \cdot y$. Arvu $x \cdot y \pmod n$ definitsiooni järgi kehtib võrdus

$$x \cdot y \pmod n = x \cdot y - t \cdot n$$

mingi täisarvu t korral. Kui arvul $x \cdot y \pmod n$ oleks n -iga ühine tegur d , peaks see tegur jagama ka summat

$$x \cdot y \pmod n + t \cdot n = x \cdot y;$$

vastuolu, sest $x \cdot y$ on n -iga ühistegurita. Muuhulgas $x \cdot y \nmid n$, seega $x \cdot y \pmod n \neq 0$. Kokkuvõttes olemegi näidanud, et $x \cdot y \pmod n \in \mathbb{Z}_n^*$.

Näitame nüüd, et kui $y_1 \neq y_2$, siis ka $x \cdot y_1 \pmod n \neq x \cdot y_2 \pmod n$. Oletame vastuväitliselt, et $x \cdot y_1 \equiv x \cdot y_2 \pmod n$. Järelikult $x \cdot (y_1 - y_2) \equiv 0 \pmod n$ ehk $x \cdot (y_1 - y_2) : n$. Kuna

x on n -iga ühistegurita, järeldub siit $y_1 \equiv y_2 \pmod n$. Kuna aga y_1 ja y_2 on mõlemad hulgast \mathbb{Z}_n^* , saame $y_1 = y_2$; vastuolu.

Niisiis on kõik korrutised $x \cdot y_i \pmod n$ (kus y_i võtab kõik väärtused hulgast \mathbb{Z}_n^*) erinevad. Kuna \mathbb{Z}_n^* on lõplik hulk, on kõik tema elemendid muuhulgas saavutatavad kujul $x \cdot y_i \pmod n$.

Olgu $\mathbb{Z}_n^* = \{y_1, y_2, \dots, y_k\}$. Siis oleme näidanud, et suvalise fikseeritud $x \in \mathbb{Z}_n^*$ korral kehtib

$$\{x \cdot y_1 \pmod n, x \cdot y_2 \pmod n, \dots, x \cdot y_k \pmod n\} = \{y_1, y_2, \dots, y_k\}.$$

Tuletame meelde, et elementide järjestus pole hulga puhul oluline. Teisest küljest ei sõltu ka korrutise väärtus tegurite järjekorrast, niisiis saame tuletada järgmised seosed:

$$\begin{aligned} x \cdot y_1 \cdot x \cdot y_2 \cdot \dots \cdot x \cdot y_k &\equiv y_1 \cdot y_2 \cdot \dots \cdot y_k \pmod n, \\ x^k \cdot y_1 \cdot y_2 \cdot \dots \cdot y_k &\equiv y_1 \cdot y_2 \cdot \dots \cdot y_k \pmod n, \\ (x^k - 1) \cdot y_1 \cdot y_2 \cdot \dots \cdot y_k &\equiv 0 \pmod n, \end{aligned}$$

järelikult $(x^k - 1) \cdot y_1 \cdot y_2 \cdot \dots \cdot y_k \div n$. Kuna arvud y_1, y_2, \dots, y_k on kõik n -iga ühistegurita, peab järelikult kehtima ka seos $x^k - 1 \div n$ ehk $x^k \equiv 1 \pmod n$, kus k on hulga \mathbb{Z}_n^* elementide arv.

Kuna arvul $|\mathbb{Z}_n^*|$ on arvuteoorias tähtis roll, on selle jaoks kasutusele võetud eraldi tähis $\varphi(n)$. Funktsiooni φ tuntakse ka *Euleri funktsiooni*¹ nime all.

Kokkuvõtteks oleme tõestanud järgmise teoreemi.

Teoreem 23.1 (Euleri teoreem) Olgu antud täisarv $n \geq 2$ ja temaga ühistegurita arv x . Siis kehtib seos

$$x^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod n.$$

■ **Näide 23.1** Eelpool nägime, et $\varphi(10) = 4$. Kontrollime Euleri teoreemi kehtivust hulga \mathbb{Z}_{10}^* kõigi elementide jaoks:

$$\begin{aligned} 1^4 &= 1 \equiv 1 \pmod{10}, \\ 3^4 &= 81 \equiv 1 \pmod{10}, \\ 7^4 &= 2401 \equiv 1 \pmod{10}, \\ 9^4 &= 6561 \equiv 1 \pmod{10}. \end{aligned}$$

■

Ülesanne 23.1 (Lõppvoor 2000, 11. klass) Leia kõik algarvud, mille kuues aste ei anna 504-ga jagades jäägiks 1.

Lahendus. Vastus: 2, 3 ja 7.

Avaldades arvu 504 algtegurite korrutisena leiame, et $504 = 7 \times 8 \times 9$. See tähendab, et arvude 2, 3 ja 7 kuuenda astme jääk jagamisel 504-ga peab samuti jaguma vastavalt 2-e, 3-e ja 7-ga. Niisiis ei saa see jääk neil juhtudel olla 1.

Kõigi teiste algarvude p puhul saame kasutada Euleri teoreemi. Paneme tähele, et $\mathbb{Z}_7^* = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ja $\mathbb{Z}_9^* = \{1, 2, 4, 5, 7, 8\}$, järelikult $\varphi(7) = 6$ ja $\varphi(9) = 6$. Kuna

¹Leonhard Euler oli 18. sajandi šveitsi matemaatik, füüsik, astronoom ja insener, kes on pannud aluse paljudele tänapäevase matemaatika harudele.

$p \notin \{2, 3, 7\}$, saame Euleri teoreemi põhjal

$$p^6 \equiv 1 \pmod{7} \text{ ja}$$

$$p^6 \equiv 1 \pmod{9}$$

ehk $p^6 - 1 : 7$ ja $p^6 - 1 : 9$. Aga $n = 8$ jaoks $\mathbb{Z}_8^* = \{1, 3, 5, 7\}$, millest järeldub $\varphi(8) = 4$ ja eelpooltooduga analoogiliselt saame, et $p^4 - 1 : 8$. See pole päris see, mis vaja, sest vaja oleks $p^6 - 1 : 8$. Mida teha?

Siinkohal tuleb appi vana ja lihtne tulemus, mille järgi iga paaritu arvu ruudu jääk jagamisel 8-ga on 1. Tõepoolest, tõstes paaritu arvu $2m + 1$ ruutu, saame

$$(2m + 1)^2 = 4m^2 + 4m + 1 = 4m(m + 1) + 1.$$

Kuna arvudest m ja $m + 1$ on üks paaris, jagub $4m(m + 1)$ 8-ga, mida oligi tarvis. Et p on paaritu algarv siis on ka tema kuup paaritu ja

$$p^6 = (p^3)^2 \equiv 1 \pmod{8},$$

millest saamegi $p^6 - 1 : 8$. Kokkuvõttes jagub $p^6 - 1$ nii 7, 8 kui ka 9-ga, järelikult jagub ta ka nende korrutise ehk 504-ga.

Euleri teoreemi tähtsa erijuhu saame, kui n ise on algarv. Siis $\mathbb{Z}_n^* = \{1, 2, \dots, n - 1\}$ ja järelikult $\varphi(n) = n - 1$. Niisiis kehtib ka järgmine tulemus, mida nimetatakse Fermat' väikeseks teoreemiks.²

Teoreem 23.2 Olgu p algarv ja a mingi täisarv, mis ei jagu p -ga. Sel juhul kehtib seos

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}.$$

Fermat' väikest teoreemi kasutatakse sageli ka veidi teises sõnastuses.

Teoreem 23.3 Kui p on algarv, siis suvalise täisarvu a korral kehtib seos

$$a^p \equiv a \pmod{p}.$$

Tõestus. Kui $a : p$, siis $a \equiv 0 \pmod{p}$ ja $a^p \equiv 0 \pmod{p}$, järelikult teoreem sel juhul kehtib.

Kui $a \not\equiv 0 \pmod{p}$, siis saame kasutada teoreemi 23.2, mille alusel $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$. Korrutades selle ekvivalentsi mõlemad pooli a -ga, saame, et tõestatav väide kehtib ka sellel juhul. \square

Teoreemi 23.3 veel ühe tõestuse leiab lugeja jaotisest 23.1.

Euleri teoreem ja Fermat' väike teoreem aitavad meil arvutada suurte arvude suurte astmete jääke. Me juba teame, et $a^b \pmod{n}$ arvutamiseks tohime me a asendada jäägiga, mis tekib tema jagamisel n -ga (ja seda suvalise positiivse mooduli n korral). Euleri teoreem ütleb meile, et kui a ja n on ühistegurita, tohime me lisaks b asendada jäägiga, mis tekib tema jagamisel $\varphi(n)$ -iga. Tõepoolest, paneme tähele, et teoreem 23.1 lubab meil $a^{\varphi(n)}$ asendada arvuga $1 = a^0$, st vähendada astendajat $\varphi(n)$ võrra. Seda operatsiooni võime a^b puhul teha mitu korda, kuni alles jääb ainult b jääk jagamisel $\varphi(n)$ -iga.

Kui n on algarv, siis Fermat' väikese teoreemi 23.3 alusel pole isegi vaja kontrollida, et a ja n oleksid ühistegurita, ja astendajat tohib $\varphi(n) = n - 1$ järgi taandada igal juhul.

²Pierre de Fermat [ferma:] oli 17. sajandi prantsuse matemaatik.

Ülesanne 23.2 (Piirkonnavoor 1993, 10. klass) Tõesta, et $101^{100} - 1$ jagub arvuga 24.

Lahendus. 24 on küll kordarv, aga 101 on temaga ühistegurita, niisiis saame rakendada Euleri teoreemi. Selleks tuleb leida $\varphi(24)$. Kuna $24 = 2^3 \cdot 3$, peame hulgast $\{1, 2, \dots, 24\}$ jätma välja kõik 2-e ja 3-ga jaguvad elemendid. Saame $\mathbb{Z}_{24}^* = \{1, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23\}$, järelikult $\varphi(24) = 8$ ja me tohime astendajat taandada mooduli 8 järgi. Kuna $101 \equiv 5 \pmod{24}$ ja $100 \equiv 4 \pmod{8}$, saame

$$101^{100} \equiv 5^4 = 625 \equiv 1 \pmod{24},$$

millest järeldubki, et $101^{100} - 1 \div 24$.

Ülesanded

Ülesanne 23.3 (Talvine lahtine võistlus 2020, vanem rühm) Olgu a täisarv. Tõesta, et $a^{2020} + 10a^{1010} + 1001$ ei ole algarv.

Ülesanne 23.4 (Lõppvoor 2019, 11. klass) Mari kirjutab tahvlile algarvu, mis on suurem kui 10^{17} , aga väiksem kui $10^{17} + 10$. Leia Mari kirjutatud arv.

Ülesanne 23.5 (Lõppvoor 2021, 11. klass) Tõesta, et arv $2021^{2020} + 5$ jagub arvuga 63.

Ülesanne 23.6 (Lõppvoor 2005, 11. klass) Kas leidub selline täisarv $n > 1$, et arv

$$2^{2^n - 1} - 7$$

ei ole ühegi täisarvu ruut?

Lahendused

23.3 Proovime leida algarvu, millega ülesande avaldis kindlasti jagub. Paneme tähele, et $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$. Ülesande avaldises jaguvad muutuja a astmed 10-ga; see tähelepanek viib Fermat' väikesele teoreemile mõeldes ideele proovida jaguvust 11-ga.

Näitame, et ülesande avaldis jagub tõepoolest alati 11-ga. Kuna tema väärtus on iga täisarvu a korral vähemalt 1001, ei saa ta seega olla algarv.

Kui $a \div 11$, on tõestatav väide ilmne, sest $1001 \div 11$. Kui aga a ei jagu 11-ga, saame teoreemist 23.2, et $a^{10} \equiv 1 \pmod{11}$. Järelikult ka $a^{2020} = (a^{10})^{202} \equiv 1 \pmod{11}$ ja samuti $a^{1010} = (a^{10})^{101} \equiv 1 \pmod{11}$. Kokkuvõttes saame

$$a^{2020} + 10a^{1010} + 1001 \equiv 1 + 10 \cdot 1 + 1001 \equiv 0 \pmod{11}.$$

23.4 Paarisnumbriga ja 5-ga lõppevad arvud ei saa olla algarvud, seega tuleb läbi vaadata arvud $10^{17} + 1$, $10^{17} + 3$, $10^{17} + 7$ ja $10^{17} + 9$.

Arv $10^{17} + 1$ rahuldab 11-ga jagumise tunnust ja on järelikult kordarv.

Arvu $10^{17} + 7$ jaoks saame Fermat' väikesest teoreemist $10^{17} \equiv 10 \pmod{17}$, seega $10^{17} + 7 \equiv 10 + 7 \equiv 0 \pmod{17}$.

Arv $10^{17} + 9$ ei rahulda 2-ga, 3-ga ega 5-ga jagumise tunnust. 7-ga jaguvust uurides saame, et $10^{17} + 9 \equiv 3^{17} + 2 \pmod{7}$. Fermat' väikesest teoreemist teame, et

$3^6 \equiv 1 \pmod{7}$, järelikult ka $3^{12} \equiv 1 \pmod{7}$ ja

$$3^{17} + 2 \equiv 3^{12} \cdot 3^5 + 2 \equiv 3^5 + 2 = 245 \equiv 0 \pmod{7}.$$

Järelikult saab algarv olla ainult $10^{17} + 3$.

Arvutiülesanne 23.1 Kontrolli arvuti abil, et $10^{17} + 3$ on algarv. Kui paremat kohta ei leia, siis võid minna aadressile <https://www.wolframalpha.com/> ja tippida küsimuse

Is $10^{17} + 3$ a prime number?

23.5 Me peame näitama, et $2021^{2020} + 5$ jagub 7-ga ja 9-ga. Kuna $2021 \equiv 5 \pmod{7}$, $2020 \equiv 4 \pmod{6}$, $2021 \equiv 5 \pmod{9}$ ja $2020 \equiv 4 \pmod{8}$, siis saame Fermat' väikese teoreemi abil

$$2021^{2020} + 5 \equiv 5^4 + 5 = 630 \equiv 0 \pmod{7}$$

ja

$$2021^{2020} + 5 \equiv 5^4 + 5 = 630 \equiv 0 \pmod{9},$$

mida oligi tarvis.

Seda ülesannet saab lahendada ka Euleri teoreemiga. Teoreemi 23.1 tähistes võime võtta $x = 2021$ ja $n = 63$; kuna $2021 = 43 \cdot 47$ ja $63 = 3^2 \cdot 7$, siis on x ja n ühistegurita. Teoreemi rakendamiseks on vaja leida $\varphi(63)$, st 63-ga ühistegurita arvude arv hulgas $\{1, 2, \dots, 63\}$.

Selleks võime kasutada otsest loendamist. Algtegurit 3 omab hulgas $\{1, 2, \dots, 63\}$ täpselt $\frac{1}{3}$ osa ehk 21 arvu, algtegurit 7 aga $\frac{1}{7}$ osa ehk 9 arvu. Lisaks tuleb arvestada, et nii 3-e kui 7-ga jagub vaadeldavast hulgast 3 arvu, niisiis saame kokkuvõttes $\varphi(63) = 63 - 21 - 9 + 3 = 36$.

Niisiis võime jäägiga 63 astendades taandada astendatava modulo 63, astendaja aga modulo 36. Kuna $2021 \equiv 5 \pmod{63}$ ja $2020 \equiv 4 \pmod{36}$, saamegi vajaliku

$$2021^{2020} + 5 \equiv 5^4 + 5 = 630 \equiv 0 \pmod{63}.$$

Euleri φ -funktsiooni arvutamiseks saab anda ka üldise valemi, vt jaotist 23.2.

23.6 Vastus: jah.

Tegemist on teise võimaliku lahendusega ülesandele 17.20. Näitame, et $2^{2^7-1} - 7 = 2^{127} - 7$ jagub arvuga 11, aga mitte arvuga 121.

Fermat' väikese teoreemi põhjal teame, et $2^{10} \equiv 1 \pmod{11}$, seega

$$2^{127} - 7 = (2^{10})^{12} \cdot 2^7 - 7 \equiv 1^{12} \cdot 128 - 7 = 121 \equiv 0 \pmod{11}.$$

Mooduli 121 järgi saame kasutada Euleri teoreemi. Hulgas $\{1, 2, \dots, 121\}$ on arvuga 11 ühistegurita täpselt $121 - 11 = 110$ elementi, seega Euleri teoreemi põhjal $2^{110} \equiv 1 \pmod{121}$. Nüüd võime lihtsustada

$$2^{127} - 7 = 2^{110} \cdot 2^{17} - 7 \equiv 1 \cdot 2^{17} - 7 \pmod{121}.$$

Kuna $2^7 = 128 \equiv 7 \pmod{121}$, saame edasi

$$2^{17} - 7 = (2^7)^2 \cdot 2^3 - 7 \equiv 7^2 \cdot 2^3 - 7 = 49 \cdot 8 - 7 = 385 \equiv 22 \pmod{121}.$$

Kokkuvõttes jagub $2^{2^7-1} - 7 = 2^{127} - 7$ arvuga 11, aga mitte arvuga 121, niisiis ei saa ta olla täisruut.

23.1 Fermat' väikese teoreemi kombinatorne tõestus

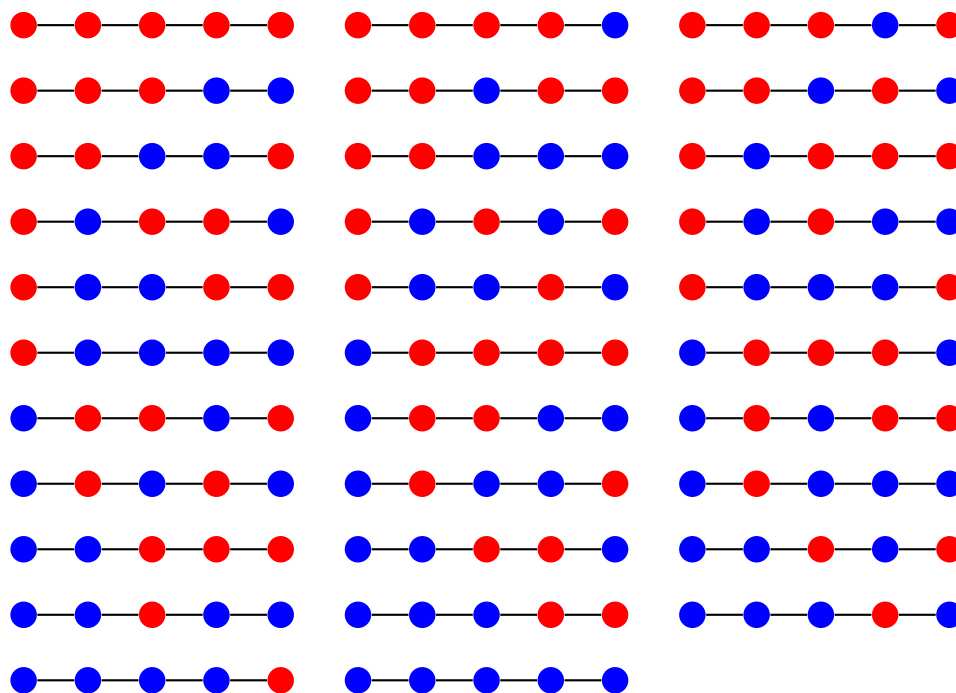
Selles jaotises anname Fermat' väikesele teoreemile (vt teoreem 23.3) veel ühe ilusa ja õpetliku tõestuse.

Teoreem 23.4 Kui p on algarv, siis suvalise täisarvu a korral kehtib seos

$$a^p \equiv a \pmod{p}.$$

Tõestus. Paneme tähele, et väites veendumiseks piisab a kohal vaadelda ainult kõiki algarvuga p jagamisel tekkivaid (mittenegatiivseid!) jääke $0, 1, 2, \dots, p-1$. Lisaks on teoreemi väide $a=0$ ja $a=1$ puhul triviaalselt tõene, niisiis võime vaadelda ainult juhtu $a \geq 2$.

Anname Fermat' väikesele teoreemile tõestuse kaelakeede loendamise abil. Olgu meil a erinevat värvi helmeid, millest moodustame kette pikkusega p . Erinevaid võimalikke ketimustreid on siis kokku a^p . Joonisel 23.1 on näitena toodud kõikvõimalikud 5-lülilised ketid, mida saab moodustada kahte värvi helmestest (st $a=2$ ja $p=5$).



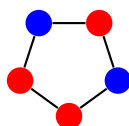
Joonis 23.1

Paneme tähele, et täpselt a nendest kettidest koosnevad ainult ühevärvilistest helmestest. Seega $a^p - a$ ketis on vähemalt kahte värvi helmeid. Teoreem on tõestatud, kui me näitame, et $a^p - a : p$. Selleks jagame kõik mitmevärvilised ketid p kaupa gruppidesse nii, et iga kett kuulub täpselt ühte gruppi ja ühtegi ketti ei jää üle.

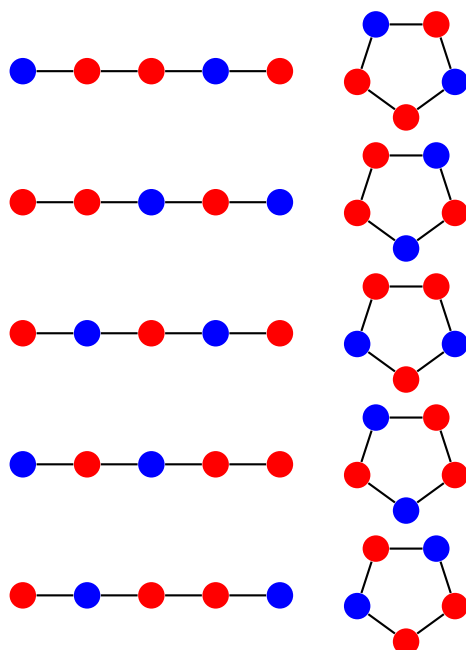
Teeme kõigist kettidest kaelakeed, ühendades omavahel nende vabad otsad. Näiteks ketist



saab kee



Ühte ja samasse gruppi võtame ketid, milledest tehtud keesid saab muuta samasugusteks pööramise abil (aga keed peegeldada st ümber keerata ei tohi!). Meie näite puhul kuuluvad ühte gruppi näiteks joonisel 23.2 kujutatud ketid ja neile vastavad keed.



Joonis 23.2

On selge, et igas grupis on vähemalt 1 ja ülimalt p ketti. Meie eesmärk on tõestada, et iga grupis on täpselt p ketti.

Oletame vastuväiteliselt, et leidub grupp, milles on vähem kui p ketti. See tähendab, et mingile selle grupi ketile vastavat keed pöörates jõuame me algsega võrreldes samasse seisuga tagasi vähem kui p pöördega. Olgu q vähim pöörde arv, mis tuleb teha, et see kee algsega võrreldes samasugusesse seisuga tagasi jõuaks. Siis kehtib $p > q$. Kuna kees on vähemalt kahte värvi helmeid, siis peab kehtima ka võrratus $q \geq 2$.

Pöörame nüüd keed järjest k korda q positsiooni kaupa kuni hetkeni, mil oleme teinud vähemalt täispöörde. Kuna iga pööre q positsiooni kaupa jätab kee seisuga samaks, on meil ka lõpuks algsega sama seis. Et p on algarv, ei saa kehtida võrdus $k \cdot q = p$. Järelikult peame me olema keed pööranud rohkem kui täispöörde võrra, st $k \cdot q > p$.

Olgu $r = p - k \cdot q$ nende positsioonide arv, mille võrra me oleme täispööret ületanud. Ühest küljest on selge, et $r < q$, sest enne viimast pööret q positsiooni võrra polnud täispööre veel täis. Teisest küljest aga annaks pööre algseisust r positsiooni võrra meile algsega sama seisuga. See aga on vastuolu q valikuga, sest q oli vähim niisuguste omadustega positiivne arv. \square

23.2 Euleri φ -funktsiooni arvutamine

Siinses jaotises tuletame üldise valemi Euleri φ -funktsiooni arvutamiseks. Selleks sõnastame ja tõestame kaks teoreemi.

Teoreem 23.5 Kui p on algarv ja k positiivne täisarv, siis

$$\varphi(p^k) = p^k - p^{k-1}.$$

Tõestus. Hulgaks $\{1, 2, \dots, p^k\}$ on p^k arvu. Nende seast jagub p -ga iga p -s arv, niisiis on vaadeldavad hulgaks p -ga jaguvaid elemente kokku $\frac{1}{p} \cdot p^k = p^{k-1}$ tükki. Kuna p on algarv, on p -ga ühistegurita parajasti kõik need arvud, mis temaga ei jagu. Järelikult $\varphi(p^k) = |\mathbb{Z}_{p^k}^*| = p^k - p^{k-1}$. \square

Teoreem 23.6 Kui m ja n on ühistegurita positiivsed täisarvud, siis

$$\varphi(m \cdot n) = \varphi(m) \cdot \varphi(n).$$

Tõestus. Definiitsiooni järgi on $\varphi(m \cdot n)$ selliste arvude arv hulgaks $\{1, 2, \dots, m \cdot n\}$, mis on ühistegurita arvuga $m \cdot n$. Paneme tähele, et $\text{SÜT}(a, m \cdot n) = 1$ parajasti siis, kui $\text{SÜT}(a, m) = 1$ ja $\text{SÜT}(a, n) = 1$.

Kirjutame kõik arvud $1, 2, \dots, m \cdot n$ järjest veergude kaupa tabelisse mõõtmetega $m \times n$:

$$\begin{array}{cccccc} 1 & m+1 & 2m+1 & 3m+1 & \dots & (n-1)m+1 \\ 2 & m+2 & 2m+2 & 3m+2 & \dots & (n-1)m+2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ k & m+k & 2m+k & 3m+k & \dots & (n-1)m+k \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ m & 2m & 3m & 4m & \dots & nm \end{array}$$

Vaatleme rida järjekorranumbriga k . On kaks võimalust: kas $\text{SÜT}(k, m) = d > 1$ või $\text{SÜT}(k, m) = 1$.

Esimesel juhul jagab d kõiki k . rea elemente (sest nad on kujul $\ell \cdot m + k$). Niisiis pole ükski neist ühistegurita arvuga m ega järelikult ka arvuga $m \cdot n$.

Teisel juhul $\text{SÜT}(k, m) = 1$ on kõik k . rea elemendid ühistegurita arvuga m . Tõepoolest, kui arvudel $\ell \cdot m + k$ ka m leiduks ühine tegur $e > 1$, peaks see tegur jagama ka arvu $(\ell \cdot m + k) - \ell \cdot m = k$; vastuolu.

Jääb üle leida, mitu arvu tabeli k . reas on ühistegutita arvuga n .

Väidame, et vaadeldava k . rea n arvu annavad n -ga jagades kõikvõimalikud erinevad jäägid. Kuna võimalikke jääke ongi kokku n tükki, piisab tõestada, et k . rea arvude jäägid jagamisel n -ga on erinevad. Oletame vastuväiteliselt, et leiduvad $\ell_1 \neq \ell_2 \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ nii, et

$$\begin{aligned} \ell_1 \cdot m + k &\equiv \ell_2 \cdot m + k \pmod{n}, \\ (\ell_1 \cdot m + k) - (\ell_2 \cdot m + k) &: n, \\ (\ell_1 - \ell_2) \cdot m &: n. \end{aligned}$$

Kuna m ja n on eelduse järgi ühistegurita, järeldub siit $\ell_1 - \ell_2 : n$; vastuolu eeldustega $\ell_1, \ell_2 \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ ja $\ell_1 \neq \ell_2$.

Jääb veel tähele panna, et arvud n ja a on ühistegurita parajasti siis, kui ühistegurita on n ja $a \bmod n$ (sest $a \bmod n$ saab esitada kujul $a - \ell \cdot m$ mingi täisarvu ℓ korral). Niisiis on vaadeldavas k . reas n -ga ühistegurita arve täpselt $\varphi(n)$ tükki. Kuna ridu, mille jaoks $\text{SÜT}(k, m) = 1$, on omakorda täpselt $\varphi(m)$ tükki, olemegi näidanud, et arvude $\{1, 2, \dots, m \cdot n\}$ seas on $\varphi(m) \cdot \varphi(n)$ arvu, mis on ühistegurita arvuga $m \cdot n$. \square

■ **Näide 23.2** $m = 4$ ja $n = 15$ korral näeb teoreemi 23.6 tabel välja järgmine (punasega on märgitud arvud, mis on ühistegurita arvuga $4 \cdot 15 = 60$):

1	5	9	13	17	21	25	29	33	37	41	45	49	53	57
2	6	10	14	18	22	26	30	34	38	42	46	50	54	58
3	7	11	15	19	23	27	31	35	39	43	47	51	55	59
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44	48	52	56	60

■

Teoreemid 23.5 ja 23.6 võimaldavad Euleri φ -funktsiooni arvutada argumendi kanoonilise esituse kaudu. Nii näiteks saame ülesandes 23.5 leida

$$\varphi(63) = \varphi(7^1 \cdot 3^2) = \varphi(7^1) \cdot \varphi(3^2) = (7^1 - 7^0) \cdot (3^2 - 3^1) = 6 \cdot 6 = 36.$$

Üldisemalt saame induktsiooniga erinevate algtegurite arvu s järgi tõestada järgmise reegli:

Kui arv n on antud oma kanoonilise esitusega $n = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot \dots \cdot p_s^{a_s}$, siis

$$\varphi(n) = (p_1^{a_1} - p_1^{a_1-1}) \cdot (p_2^{a_2} - p_2^{a_2-1}) \cdot \dots \cdot (p_s^{a_s} - p_s^{a_s-1}).$$

Geomeetria

24	Sarnased kolmnurgad	271
25	Uurime pindalaid!	281
26	Kesk- ja piirdenurk. Thalese teoreem	291
27	Neli punkti ühel ringjoonel	303
27.1	Köölnelinurga tarvilikud ja piisavad tingimused	303
27.2	Kõrguste lõikepunkti omadus	316
28	Kolm punkti ühel sirgel	323
29	Puutuja ja kõõlu teoreem	333
30	Punkti potents ringjoone suhtes	341
30.1	Radikaaltelg ja radikaalkese	351
31	Kõrgus, mediaan ja nurgapoolitaja võrdhaarses kolmnurgas	357
31.1	Võrdhaarse kolmnurga teoreem	357
31.2	Võrdhaarse kolmnurga teoreemi pöördteoreem	362
32	Nurgapoolitaja omadused	371
32.1	Nurgapoolitaja (esimene) omadus	371
32.2	Nurgapoolitaja teine omadus	378
33	Homoteetia	383
34	Tasandi pöörded	395
35	Kombinatoorne geomeetria	401
36	Geomeetrilised võrratused	409
36.1	Kolmnurgavõrratus	409
36.2	Mitmesuguseid geomeetrilisi võrratusi	414
37	Meetrilised seosed kolmnurgas	431
38	Apolloniose ringjoon	443

