

## 22. Suurim ühistegur, vähim ühiskordne

Täisarvude suurima ühisteguri ja vähima ühiskordsega toimetamiseks on sageli kasulik vaadelda nende täisarvude kanoonilisi esitusi.

**Teoreem 22.1** Vaatleme positiivseid täisarve  $m$  ja  $n$  ning olgu  $p_1, p_2, \dots, p_s$  kõik algarvud, mis esinevad neist vähemalt ühe algteguriteks lahutuses. Olgu

$$m = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_s^{a_s} \quad \text{ja} \quad n = p_1^{b_1} p_2^{b_2} \dots p_s^{b_s}$$

arvude  $m$  ja  $n$  kanoonilised esitused (kus mõned astendajatest  $a_i$  ja  $b_i$  võivad olla nullid). Siis

$$\text{SÜT}(m, n) = p_1^{c_1} p_2^{c_2} \dots p_s^{c_s} \quad \text{ja} \quad \text{VÜK}(m, n) = p_1^{d_1} p_2^{d_2} \dots p_s^{d_s},$$

kus  $c_i = \min(a_i, b_i)$  ja  $d_i = \max(a_i, b_i)$  ( $i = 1, 2, \dots, s$ ).

*Tõestus.* Arvude  $m$  ja  $n$  suvaline ühine tegur  $t$  saab kanoonilises esituses nullist suuremal astmel omada ainult neid algarve, mis esinevad nii  $m$ -i kui  $n$ -i algteguriteks lahutuses. Seega peab ta avalduma kujul  $t = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_s^{k_s}$ , kus  $k_i \geq 0$  ( $i = 1, 2, \dots, s$ ). Teisest küljest, kuna  $m : t$  ja  $n : t$ , peavad kehtima ka võrratused  $k_i \leq a_i$  ja  $k_i \leq b_i$  ( $i = 1, 2, \dots, s$ ). Järelikult peavad kehtima ka võrratused  $k_i \leq \min(a_i, b_i)$  ( $i = 1, 2, \dots, s$ ). Suurima ühisteguri saame, kui kõigis neis võrratustes kehvivad võrdused, st  $k_i = \min(a_i, b_i)$  ( $i = 1, 2, \dots, s$ ).

Arvude  $m$  ja  $n$  suvaline ühine kordne  $u$  võib peale algtegurite  $p_1, p_2, \dots, p_s$  omada veel tegureid. Olgu siis

$$u = w \cdot p_1^{\ell_1} p_2^{\ell_2} \dots p_s^{\ell_s},$$

kus  $w$  ei sisalda ühtki teguritest  $p_1, p_2, \dots, p_s$ . Kuna  $u : m$  ja  $u : n$ , peavad kehtima võrratused  $\ell_i \geq a_i$  ja  $\ell_i \geq b_i$  ( $i = 1, 2, \dots, s$ ). Järelikult peavad kehtima ka võrratused  $\ell_i \geq \max(a_i, b_i)$  ( $i = 1, 2, \dots, s$ ). Vähima ühise kordse saame, kui  $w = 1$  ja kõigis viimastes võrratustes kehvivad võrdused, st  $\ell_i = \max(a_i, b_i)$  ( $i = 1, 2, \dots, s$ ).  $\square$

■ **Näide 22.1** Arvude  $m = 882 = 2^1 3^2 7^2$  ja  $n = 49000 = 2^3 5^3 7^2$  suurim ühistegur on  $2^1 3^0 5^0 7^2 = 98$  ning vähim ühiskordne  $2^3 3^2 5^3 7^2 = 441000$ . ■

Paljusid suurima ühisteguri ja vähima ühiskordse kohta käivaid väiteid saab tõestada väga lihtsal ja loomulikul moel, vaadeldes iga kanoonilises esituses esineva algarvu astmeid eraldi.

**Teoreem 22.2** Iga positiivse täisarvu  $m$  ja  $n$  korral kehtib võrdus

$$\text{SÜT}(m, n) \cdot \text{VÜK}(m, n) = m \cdot n.$$

*Tõestus.* Vaatleme suvalist algarvu  $p$ , mis esineb vähemalt ühe antud arvu kanoonilises esituses. Olgu tema astendaja arvude  $m$  ja  $n$  kanoonilises esituses vastavalt  $a$  ja  $b$ . Teoreemi 22.1 põhjal teame, et  $p$  astendaja arvus  $\text{SÜT}(m, n)$  on  $\min(a, b)$  ja astendaja arvus  $\text{VÜK}(m, n)$  on  $\max(a, b)$ . On selge, et

$$\min(a, b) + \max(a, b) = a + b,$$

järelikult on  $p$  aste nii arvus  $\text{SÜT}(m, n) \cdot \text{VÜK}(m, n)$  kui ka arvus  $m \cdot n$  täpselt  $a + b$ . Kuna see arutelu kehtib suvalise algteguri  $p$  korral, oleme tõestanud teoreemi võrduse.  $\square$

**Ülesanne 22.1** (Sügisene lahtine võistlus 2018, noorem rühm) Positiivsed täisarvud  $n$ ,  $m$  ja  $k$  on sellised, et arv  $\text{VÜK}(m, k)$  jagub arvuga  $n$  ning arv  $\text{VÜK}(n, k)$  jagub arvuga  $m$ . Tõesta, et  $n \cdot \text{SÜT}(m, k) = m \cdot \text{SÜT}(n, k)$ .

*Lahendus.* Vaatleme suvalist algarvu  $p$ , mis esineb vähemalt ühe antud arvu kanoonilises esituses. Olgu tema astendaja arvude  $n$ ,  $m$  ja  $k$  kanoonilises esituses vastavalt  $c$ ,  $b$  ja  $a$ . Kuna  $\text{VÜK}(m, k) : n$ , peab kehtima võrratus  $\max(b, a) \geq c$ , ja kuna  $\text{VÜK}(n, k) : m$ , peab kehtima võrratus  $\max(c, a) \geq b$ .

Ülesande väite tõestamiseks näitame, et kehtib võrdus

$$c + \min(b, a) = b + \min(c, a). \quad (22.1)$$

Vaatleme kahte juhtu. Kui  $a < b$ , siis  $\max(b, a) = b$  ja järelikult  $b \geq c$ . Kuna ka  $\max(c, a) \geq b$ , siis järelikult  $b = c$  ja võrdus (22.1) kehtib.

Kui aga  $a \geq b$ , siis  $\max(b, a) = a$  ja järelikult ka  $a \geq c$ . Siis  $\min(b, a) = b$  ja  $\min(c, a) = c$ , mistõttu võrdus (22.1) kehtib ka sel juhul.

Kuna toodud arutelu kehtib suvalise algteguri  $p$  korral, järeldubki siit ülesande võrdus.

## Ülesanded

**Ülesanne 22.2** (Sügisene lahtine võistlus 2016, noorem rühm) Juku püstitas matemaatika-ringis järgmise hüpoteesi: alati, kui mingi kahe ühistegurita täisarvu  $x$  ja  $y$  korrutis jagub mingi kahe ühistegurita täisarvu  $a$  ja  $b$  korrutisega, siis vähemalt üks arvudest  $x$  ja  $y$  jagub arvuga  $a$  või  $b$ . Kas Juku hüpotees peab paika?

Märkus. Öeldakse, et täisarvud  $a$  ja  $b$  on *ühistegurita*, kui  $\text{SÜT}(a, b) = 1$ .

**Ülesanne 22.3** (Lõppvoor 2009, 9. klass) Leia kõik positiivsete täisarvude paarid  $(a, b)$ , mille korral

$$ab = \text{SÜT}(a, b) + \text{VÜK}(a, b).$$

**Ülesanne 22.4** (Talvine lahtine võistlus 2014, noorem rühm) Tõesta, et mistahes positiivsete täisarvude  $n$  ja  $m$  vähima ühiskordse ruut jagub korrutisega  $nm$  ning  $nm$  omakorda jagub arvude  $n$  ja  $m$  suurima ühisteguri ruuduga.

**Ülesanne 22.5** (Piirkonnavoore 2020, 10. klass)

- a) Kas leiduvad erinevad positiivsed täisarvud  $a$ ,  $b$  ja  $c$ , mille korral

$$VÜK(SÜT(a, b), c) = VÜK(SÜT(b, c), a) = VÜK(SÜT(c, a), b)?$$

- b) Kas leiduvad (mitte tingimata erinevad) positiivsed täisarvud  $a$ ,  $b$  ja  $c$ , mille korral

$$VÜK(SÜT(a, b), c) = VÜK(SÜT(b, c), a) = VÜK(SÜT(c, a), b) = m,$$

kus  $m \neq VÜK(a, b, c)$ ?

**Ülesanne 22.6** (Lõppvoor 2007, 12. klass) Olgu  $a$ ,  $b$  ja  $c$  niisugused positiivsed täisarvud, et  $SÜT(a, b, c) = 1$  ning iga kahe arvu korrutis jagub kolmanda arvuga.

- a) Tõesta, et igaüks neist arvudest on võrdne kahe ülejäänud arvu vähima ühiskordse ja suurima ühisteguri jagatisega.  
b) Too näide sellistest ühest suurematest arvudest  $a$ ,  $b$  ja  $c$ .

**Ülesanne 22.7** (Lõppvoor 1998, 11. klass) Olgu arvud  $d_1$  ja  $d_2$  positiivse täisarvu  $n$  positiivsed jagajad, kusjuures arvude  $\frac{n}{d_1}$  ja  $d_2$  suurim ühistegur on võrdne arvude  $\frac{n}{d_2}$  ja  $d_1$  suurima ühisteguriga. Tõesta, et  $\bar{d}_1 = d_2$ .

**Ülesanne 22.8** (Lõppvoor 1997, 12. klass) Mistahes positiivsete täisarvude  $m$  ja  $n$  korral tähistame

$$T(m, n) = SÜT\left(m, \frac{n}{SÜT(m, n)}\right),$$

kus  $SÜT(x, y)$  on arvude  $x$  ja  $y$  suurim ühistegur.

- a) Tõesta, et leidub lõpmata palju selliseid arvupaare  $(m, n)$ , mille korral  $T(m, n) > 1$  ja  $T(n, m) > 1$ .  
b) Kas leiduvad arvud  $m$  ja  $n$ , mille korral  $T(m, n) = T(n, m) > 1$ ?

**Ülesanne 22.9** (Sügisene lahtine võistlus 2022, vanem rühm) Olgu  $m$ ,  $n$ ,  $a$  ja  $b$  erinevad positiivsed täisarvud, mille korral  $ab = mn$ . Joonisel oleva  $2 \times 2$ -tabeli igasse lahtrisse kirjutatakse vastava rea ees ja vastava veeru kohal oleva arvu suurim ühistegur.

- a) Kas võib juhtuda, et tabeli ühegi rea arvude korrutis ei võrdu vastava rea ette kirjutatud arvuga ega tabeli ühegi veeru arvude korrutis vastava veeru kohale kirjutatud arvuga?  
b) Kas võib kindlalt väita, et kui  $SÜT(m, n) = 1$ , siis tabeli iga rea arvude korrutis võrdub vastava rea ette kirjutatud arvuga ja tabeli iga veeru arvude korrutis

võrdub vastava veeru kohale kirjutatud arvuga?

	$m$	$n$
$a$		
$b$		

**Ülesanne 22.10** (Talvine lahtine võistlus 2016, noorem rühm) Olgu  $n$  positiivne täisarv. Tõesta, et mistahes  $n$  järjestikuse positiivse täisarvu vähim ühiskordne jagub arvude  $1, 2, \dots, n$  vähima ühiskordsega.

Vaata ka ülesannet 8.10.

## Lahendused

22.2 Vastus: ei.

Valime neli erinevat algarvu  $p, q, r, s$  ning võtame  $x = pq, y = rs, a = pr$  ja  $b = qs$ . Siis  $SÜT(x, y) = 1$  ja  $xy = pqrs = ab$ , järelkult  $xy : ab$ . Samas ei jagu ei  $x$  ega  $y$  ei  $a$ -ga ega  $b$ -ga.

22.3 Vastus:  $a = b = 2$  on ainus lahend.

Tähistame  $SÜT(a, b) = m$  ja  $VÜK(a, b) = n$ . Teoreemist 22.2 teame siis, et  $ab = mn$ , järelkult ülesande tingimuste põhjal saame

$$\begin{aligned} mn &= m + n, \\ mn - m - n + 1 &= 1, \\ (m - 1)(n - 1) &= 1. \end{aligned}$$

Kuna  $m$  ja  $n$  on positiivsed täisarvud, saab viimane võrdus kehtida ainult siis, kui  $m = n = 2$ , mis omakorda saab nii olla ainult siis, kui  $a = b = 2$ .

22.4 Olgu suvalise algteguri  $p$  astendajad arvude  $m$  ja  $n$  kanoonilises esituses vastavalt  $a$  ja  $b$ . Algteguri  $p$  astendaja nende arvude vähima ühiskordse ruudus on  $2 \max(a, b)$ , nende korrutises  $a + b$  ning nende suurima ühisteguri ruudus  $2 \min(a, b)$ . Tänu võrratustele

$$2 \min(a, b) \leq a + b \leq 2 \max(a, b)$$

saame

$$p^{2 \min(a, b)} \mid p^{a+b} \mid p^{2 \max(a, b)}.$$

Kuna need seosed kehtivad suvalise algteguri  $p$  jaoks, järelkult siit ülesande väide.

22.5 Vastus: a) jah, b) ei.

Olgu suvalise algteguri  $p$  astendajad arvude  $a, b$  ja  $c$  kanoonilises esituses vastavalt  $x, y$  ja  $z$ . Ülesande võrdustest järelduvad siis võrdused

$$\max(\min(x, y), z) = \max(\min(y, z), x) = \max(\min(z, x), y). \quad (22.2)$$

Vaatleme kõigepealt juhtu, kui üks arvudest  $x, y, z$  on teistest rangelt suurem; üldsust kitsendamata olgu näiteks  $z > x$  ja  $z > y$ . Siis  $\max(\min(x, y), z) = z$ , aga  $\max(\min(y, z), x) = \max(y, x) < z$ , vastuolu ülesande tingimustega.

Järelkult peavad kaks arvudest  $x, y, z$  olema võrdsed ja kolmas nendest väiksem või samuti nendega võrdne. Lihtne on kontrollida, et kõigil neil juhtudel võrdus (22.2) kehtib.

NB!

Selle koha peal tuleb olla tähelepanelik. Me oleme tõestanud, et iga algteguri  $p$  jaoks leidub arvude  $a$ ,  $b$  ja  $c$  seas kaks, mille esituses on selle algarvu astmed võrdsed, aga need kaks arvu võivad erinevate algtegurite jaoks olla erinevad!

Ülesande a) osa konstruktsiooni andmiseks võime valida näiteks astendajad  $1, 1, 0$ . Selleks, et arvud  $a$ ,  $b$  ja  $c$  tuleksid erinevad, võime astendaja  $0$  valida erinevatele algteguritele. Olgu  $p, q, r$  kolm erinevat algarvu, sel juhul sobivad otsitavateks arvudeks näiteks  $a = pq$ ,  $b = qr$  ja  $c = pr$ .

Ülesande b) osa lahendamiseks tuletame meelde, et kaks algteguri  $p$  astendajatest  $x, y, z$  peavad olema võrdsed ja kolmas nendest väiksem või samuti nendega võrdne. Igal juhul saame võrdused

$$\max(\min(x, y), z) = \max(\min(y, z), x) = \max(\min(z, x), y) = \max(x, y, z).$$

Kuna see võrdus kehtib iga algteguri jaoks, peab ülesande avaldise väärtus olema  $VÜK(a, b, c)$ .

- 22.6 a) Olgu suvalise algteguri  $p$  astendajad arvude  $a$ ,  $b$  ja  $c$  kanoonilises esituses vastavalt  $x, y$  ja  $z$ . Ülesande tingimustest järelduvad nii võrdus  $\min(x, y, z) = 0$  kui ka võrratused  $x + y \geq z$ ,  $y + z \geq x$  ja  $z + x \geq y$ . Võrdus  $\min(x, y, z) = 0$  kehtib parajasti siis, kui üks arvudest  $x, y, z$  on  $0$ ; olgu selleks üldsust kitsendamata  $x$ . Võrratusest  $x + y \geq z$  järeldub sel juhul  $y \geq z$  ja võrratusest  $z + x \geq y$  järeldub  $z \geq y$ ; kokkuvõttes saame  $y = z$ . See tähendab, et kehtivad võrdused

$$x = y - y = \max(y, z) - \min(y, z),$$

$$y = z - 0 = \max(z, x) - \min(z, x),$$

$$z = y - 0 = \max(x, y) - \min(x, y).$$

Järelikult ka

$$p^x = \frac{p^{\max(y, z)}}{p^{\min(y, z)}}, \quad p^y = \frac{p^{\max(z, x)}}{p^{\min(z, x)}} \quad \text{ja} \quad p^z = \frac{p^{\max(x, y)}}{p^{\min(x, y)}}.$$

Kuna algtegur  $p$  oli suvaline, esitub igaks antud arvudest kahe ülejäänud arvu vähima ühiskordse ja suurima ühisteguri jagatisena.

b) Kõige lihtsama konstruktsiooni saame, kui valime astendajateks  $1, 1, 0$ . Et arvud tuleksid erinevad, võtame astmele  $0$  iga kord erineva algarvu. Konkreetsemalt, vaatleme kolme erinevat algarvu  $p, q, r$  ning valime  $a = pq$ ,  $b = qr$  ja  $c = pr$ . Siis näiteks

$$\frac{VÜK(a, b)}{SÜT(a, b)} = \frac{pqr}{q} = pr = c$$

ja sama moodi teiste arvupaaridega.

- 22.7 Vaatleme arvu  $n$  mingit algtegurit  $p$ . Olgu tema astendajad arvude  $n, d_1$  ja  $d_2$  kanoonilises esituses vastavalt  $k, a_1$  ja  $a_2$ . Ülesande võrdusest

$$SÜT\left(\frac{n}{d_1}, d_2\right) = SÜT\left(\frac{n}{d_2}, d_1\right)$$

saame  $\min(k - a_1, a_2) = \min(k - a_2, a_1)$ .

Vaatleme kahte juhtu. Kui  $k - a_1 < a_2$ , siis ka  $k - a_2 < a_1$ . Järelikult

$$k - a_1 = \min(k - a_1, a_2) = \min(k - a_2, a_1) = k - a_2,$$

kust saame  $a_1 = a_2$ . Kui aga  $k - a_1 \geq a_2$ , siis ka  $k - a_2 \geq a_1$  ja järelikult

$$a_2 = \min(k - a_1, a_2) = \min(k - a_2, a_1) = a_1.$$

Kokkuvõtteks saame mõlemal juhul  $a_1 = a_2$ . Kuna vaadeldud algtegur  $p$  oli suvaline, peab kehtima ka võrdus  $d_1 = d_2$ .

22.8 Vastus: b) ei.

Olgu suvalise algteguri  $p$  astendajad arvude  $m$  ja  $n$  kanoonilises esituses vastavalt  $a$  ja  $b$ . Leiame  $p$  astendaja arvu  $T(m, n)$  kanoonilises esituses. Selleks vaatleme eraldi kahte juhtu.

Kui  $a \geq b$ , siis on otsitavaks astendajaks

$$\min(a, b - \min(a, b)) = \min(a, b - b) = \min(a, 0) = 0.$$

Kui aga  $a < b$ , saame astendajaks

$$\min(a, b - (\min(a, b))) = \min(a, b - a).$$

a) Sobivaks konstruktsiooniks saame valida kaks erinevat algarvu  $p$  ja  $q$ , kaks positiivset täisarvu  $k$  ja  $\ell$  ning  $m = p^k q^{\ell+1}$  ja  $n = p^{k+1} q^\ell$ . Siis

$$T(m, n) = p^{\min(k, (k+1)-k)} q^0 = p \quad \text{ja} \quad T(n, m) = p^0 q^{\min(\ell, (\ell+1)-\ell)} = q.$$

On selge, et sobivaid  $p, q, k$  ja  $\ell$  valikuid on lõpmatult.

b) Kui  $T(m, n) = T(n, m) > 1$ , peab leiduma niisugune algarv  $p$ , mille astendaja arvude  $T(m, n)$  ja  $T(n, m)$  kanoonilises esituses on sama positiivne täisarv. See aga pole võimalik, sest eelpooltõestatu põhjal on iga algteguri astendaja kas  $T(m, n)$  või  $T(n, m)$  kanoonilises esituses 0.

22.9 Vastus: a) jah, b) jah.

a) Võimalikke konstruktsioone on palju ja väikese proovimise järel on lihtne mõnda neist leida; üks võimalus on toodud joonisel.

	2	16
4	2	4
8	2	8

b) Vaatleme suvalist algtegurit  $p$ , mis esineb vähemalt ühes arvudest  $a, b, m, n$ . Et  $SÜT(m, n) = 1$ , peab selle algteguri aste kas  $m$ -i või  $n$ -i kanoonilises esituses olema 0. Olgu siis näiteks  $p$  aste  $m$ -i ja  $n$ -i kanoonilises esituses vastavalt 0 ja  $i > 0$ ; teisel võimalikul juhul on lahendus analoogiline.

Samuti olgu  $p$  aste  $a$  ja  $b$  kanoonilises esituses vastavalt  $k$  ja  $\ell$ . Kuna  $ab = mn$ , peab kehtima võrdus  $k + \ell = i$ . Muuhulgas tähendab see, et  $k, \ell \leq i$ . Täidame ülesande tabeli algarvu  $p$  astmete jaoks vastavate arvude kanoonilistes esitustes.

	$p^i$	$p^0$
$p^k$	$p^k$	$p^0$
$p^\ell$	$p^\ell$	$p^0$

---

Tabelist on näha, et algarvu  $p$  korral ülesandes nõutud tingimus kehtib. Kuna  $p$  oli suvaline algtegur, peab tingimus kehtima kõigi valitud arvude  $a, b, m, n$  korral.

- 22.10 Vaatleme algarvu  $p$ , mis jagab mõnda arvudest  $1, 2, \dots, n$ , ja olgu  $k$  kõrgeim aste, millel  $p$  vastavates algteguriteks lahtustes esineb. Muuhulgas saame, et  $p^k \leq n$ . Samuti näeme, et  $p$  esineb täpselt astmel  $k$  ka arvu  $VÜK(1, 2, \dots, n)$  kanoonilises esituses.

Vaatleme nüüd  $n$  järjestikust positiivset täisarvu. Kuna  $p^k \leq n$ , peab nende seas leiduma mõni, mis jagub arvuga  $p^k$ . Järelikult esineb  $p$  nende arvude vähima ühiskordse kanoonilises esituses vähemalt astmel  $k$ .

Kuna see arutelu kehtib kõigi algarvude  $p$  korral, on ülesande väide tõestatud.

