22. Ratsionaalarvud ja irratsionaalarvud

Definitsioon 22.1 Reaalarvu r nimetame *ratsionaalarvuks*, kui leiduvad täisarv a ja positiivne täisarv b nii, et $r = \frac{a}{b}$. Kui niisuguseid täisarve a ja b ei leidu, nimetame arvu r *irratsionaalarvuks*. Kõigi ratsionaalarvude hulka tähistame $\mathbb{Q}$ ja kõigi irratsionaalarvude hulka $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \mathbb{I}$.

Klassikaline võte tõestamaks, et mingi reaalarv ei saa olla ratsionaalne, on kasutada vastuväitelist arutelu, saades vastolu eeldusega, et leidub definitsioonis 22.1 nõutud esitus täisarvude jagatisena.

Harjutus 22.1 Tõesta, et $\sqrt{2}$ on irratsionaalarv.

Tõestus. Oletame vastuväiteliselt, et $\sqrt{2}$ on ratsionaalarv. Vaatleme $\sqrt{2}$ positiivset väärtust; siis võime definitsioonis 22.1 eeldada, et leiduvad positiivsed täisarvud a ja b nii, et $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$. Olgu $d = \text{SÜT}(a, b)$ ning $m = \frac{a}{d}$ ja $n = \frac{b}{d}$. Järelikult $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$, kus m ja n on positiivsed ühistegurita täisarvud. Tõstame viimase võrduse mõlemad pooled ruutu:

$$2 = \frac{m^2}{n^2},$$
$$2n^2 = m^2.$$

Viimase võrduse vasak pool on paaris, järelikult peab paarisarv olema ka m. Sel juhul aga jagub saadud võrduse parem pool m^2 lausa 4-ga, seega peab ka n olema paarisarv. Saime vastuolu tingimusega, et m ja n on ühistegurita, mistõttu peab $\sqrt{2}$ olema irratsionaalarv. $\square$

Harjutuse 22.1 väite saab üldistada kõigile mittenegatiivsetele täisarvudele.

Teoreem 22.1 Kui mittenegatiivne täisarv n pole täisruut, siis on $\sqrt{n}$ irratsionaalne. Teisisõnu, mittenegatiivse täisarvu n korral on $\sqrt{n}$ kas täisarv või irratsionaalarv.

Harjutus 22.2 Tõesta teoreem 22.1.

Ratsionaal- ja irratsionaalarvude üle arutledes on kasulik meeles pidada, et ratsionaalarvude hulk $\mathbb{Q}$ on *kinnine* aritmeetika nelja põhitehte suhtes, st

Kahe ratsionaalarvu summa, vahe, korrutis ja jagatis (kui jagaja ei ole 0) on samuti ratsionaalarv.

Irratsionaalarvude puhul sarnast üldist reeglit anda ei saa – kahe irratsionaalarvu summa, vahe, korrutis ja jagatis võivad olla nii ratsionaalsed kui irratsionaalsed.

Küll aga võib väita, et ratsionaalarvu ja irratsionaalarvu summa, vahe, korrutis ja jagatis peavad olema irratsionaalsed. Näiteks kui $a \in \mathbb{Q}$, $b \in \mathbb{I}$ ja $a + b = c$, siis peab $c \in \mathbb{I}$, sest kui kehtiks $c \in \mathbb{Q}$, siis peaks $b = c - a$ olema samuti ratsionaalarv; vastuolu. Samasugune arutelu kehtib ka teiste põhitehete puhul.

Ülesanne 22.1 (Piirkonnavoor 2020, 10. klass) Kas leidub positiivne täisarv n, mille korral $\sqrt{n} + \sqrt{2n} + \sqrt{4n}$ on ratsionaalarv?

Lahendus. Vastus: ei.

Oletame, et $\sqrt{n}+\sqrt{2n}+\sqrt{4n} = \sqrt{n}(3+\sqrt{2})$ on mõne positiivse täisarvu n korral ratsionaalarv. Siis peavad leiduma positiivsed täisarvud a ja b nii, et

$$\sqrt{n}(3+\sqrt{2}) = \frac{a}{b}.$$

Selle võrduse mõlemaid pooli ruutu tõstes ja teisendades saame

$$\begin{aligned} n(9+6\sqrt{2}+2) &= \frac{a^2}{b^2} \\ 11+6\sqrt{2} &= \frac{a^2}{b^2 n} \\ \sqrt{2} &= \frac{1}{6}\cdot\left(\frac{a^2}{b^2 n} - 11\right). \end{aligned}$$

Viimase võrduse vasak pool on irratsionaalarv, parem pool aga ratsionaalne, sest ta on saadud ratsionaalarvudest aritmeetika põhitehteid rakendades. See vastuolu näitab, et ülesandes nõutud täisarve n ei leidu.

Ülesanded

Ülesanne 22.2 (Piirkonnavoor 2011, 10. klass) Olgu x ja y sellised erinevad positiivsed reaalarvud, et $x - \sqrt{xy}$ ja $y - \sqrt{xy}$ on ratsionaalarvud. Tõesta, et ka x ja y on ratsionaalarvud.

Ülesanne 22.3 (Piirkonnavoor 2002, 10. klass) Kas leidub täisnurkne kolmnurk, mille külgede pikkusteks on:

a) üks täisarv ja kaks ratsionaalarvu, mis ei ole täisarvud;
b) kaks täisarvu ja üks ratsionaalarv, mis ei ole täisarv;
c) üks ratsionaalarv ja kaks irratsionaalarvu;
d) kaks ratsionaalarvu ja üks irratsionaalarv?

Iga alapunkti kohta too näide või põhjenda, miks niisugust kolmnurka ei leidu.

Ülesanne 22.4 (Lõppvoor 2009, 10. klass) Olgu kolmnurga nurkade suurused x, y, z kraadi.

a) Tõesta, et kui $\frac{x}{y}, \frac{y}{z}, \frac{z}{x}$ on kõik ratsionaalarvud, siis x, y, z on kõik ratsionaalarvud.

b) Tõesta, et kui arvudest $\frac{x}{y}, \frac{y}{z}, \frac{z}{x}$ täpselt üks on ratsionaalarv, siis x, y, z on kõik irratsionaalarvud.

Ülesanne 22.5 (Piirkonnavoor 2013, 11. klass) Leia kõik sellised täisarvud n, mille korral $\sqrt{n+2013} - \sqrt{n}$ on täisarv.

Ülesanne 22.6 (Piirkonnavoor 1994, 11. klass) Tõesta, et $\sqrt{2} + \sqrt{n}$ ei ole ratsionaalarv ühegi naturaalarvu n korral.

Ülesanne 22.7 (Piirkonnavoor 2023, 12. klass) Positiivsed täisarvud n ja m on sellised, et $\sqrt{n} + \sqrt{m}$ on ratsionaalarv. Tõesta, et n ja m on täisarvude ruudud.

Ülesanne 22.8 (Lõppvoor 1998, 11. klass) Reaalarvu a pöördarv on võrdne arvu a ja selle täisosa $[a]$ vahega. Tõesta, et a ei ole ratsionaalarv.

Märkus: arvu x täisosaks $[x]$ nimetatakse suurimat täisarvu, mis ei ületa arvu x: näiteks $[2{,}7] = 2$, $[-2{,}7] = -3$.

Ülesanne 22.9 (Lõppvoor 2009, 11. klass) Nimetame koordinaattasandi punkti *ratsionaalseks*, kui tema mõlemad koordinaadid on ratsionaalarvud, ning *irratsionaalseks*, kui tema mõlemad koordinaadid on irratsionaalarvud.

a) Kas tasandi iga punkt asub mingi kahe ratsionaalse punkti poolt määratud sirgel?

b) Kas tasandi iga punkt asub mingi kahe irratsionaalse punkti poolt määratud sirgel?

Ülesanne 22.10 (Piirkonnavoor 1997, 12. klass) Olgu m ja n ühest suuremad ühistegurita täisarvud. Tõesta, et arv $\log_n m$ ei ole esitatav kahe täisarvu suhtena.

Ülesanne 22.11 (Talvine lahtine võistlus 2007, vanem rühm) Olgu x ja y suvalised reaalarvud.

a) Kas sellest, et $x + y$ ja $x + y^2$ on ratsionaalarvud, järeldub, et x ja y on ratsionaalarvud?

b) Kas sellest, et $x + y$, $x + y^2$ ja $x + y^3$ on ratsionaalarvud, järeldub, et x ja y on ratsionaalarvud?

Ülesanne 22.12 (Talvine lahtine võistlus 2006, vanem rühm) Vaatleme kolmnurki, mille iga külje pikkuse ruut on ratsionaalarv. Kas on õige, et iga sellise kolmnurga

a) ümberringjoone raadiuse ruut on ratsionaalarv;

b) siseringjoone raadiuse ruut on ratsionaalarv?

Ülesanne 22.13 (Lõppvoor 1994, 12. klass) Milline vähim arv punkte tuleb tasandil märgistada, et tasandi mistahes punkti kaugus vähemalt ühest märgistatud punktist oleks irratsionaalarv?

Lahendused

22.2 Lahenduse võti on avaldada x ja y antud suuruste $x-\sqrt{xy}$ ja $y-\sqrt{xy}$ kaudu kasutades liitmist, lahutamist, korrutamist ja jagamist, st tehteid, mis säilitavad ratsionaalsuse.

Paneme tähele, et $(x-\sqrt{xy})-(y-\sqrt{xy})=x-y$, järelikult on $x-y$ ratsionaalarv. Teisest küljest $x \neq y$ ja $y>0$, mistõttu $y-\sqrt{xy}\neq 0$ ja seega on

$$\frac{x-\sqrt{xy}}{y-\sqrt{xy}}=\frac{\sqrt{x}\cdot(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{\sqrt{y}\cdot(\sqrt{y}-\sqrt{x})}=-\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$$

ratsionaalarv. Järelikult on ratsionaalarv ka $\left(-\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}\right)^2=\frac{x}{y}$.

Lahendame võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} x+y=a \\ \dfrac{x}{y}=b \end{cases},$$

kus a ja b on mingid ratsionaalarvud ($b\neq 1$). Teisest võrrandist saame $x=by$ ning esimesse võrrandisse asendades $by-y=a$, kust $y=\frac{a}{b-1}$. Järelikult on nii y kui ka $x=a-y$ ratsionaalarvud.

22.3 Vastus: a) jah, b) ei, c) jah, d) jah.

a) Sobib näiteks kolmnurk küljepikkustega $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{5}$ ja 1, mis on täisnurkne, sest

$$\left(\frac{3}{5}\right)^2+\left(\frac{4}{5}\right)^2=\frac{9+16}{25}=1^2.$$

b) Olgu kolmnurga kaatetid a ja b ning hüpotenuus c, st $a^2+b^2=c^2$. Kui a on ratsionaalarv, mis ei ole täisarv, siis peab ta avalduma kujul $a=\frac{m}{n}$, kus m ja n on ühistegurita positiivsed täisarvud ning $n\geqslant 2$. Saame

$$\left(\frac{m}{n}\right)^2+b^2=c^2,$$
$$m^2+b^2n^2=c^2n^2.$$

Kui b ja c on täisarvud, jaguvad b^2n^2 ja c^2n^2 arvuga n, järelikult peab n-ga jaguma ka m^2; vastuolu eeldusega SÜT$(m,n)=1$. Analoogilise vastuolu saame ka juhtudel kui b või c on ratsionaalarv, aga mitte täisarv.

c) Sobib kolmnurk küljepikkustega $\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$ ja 2, mis on täisnurkne, sest $(\sqrt{2})^2+(\sqrt{2})^2=2+2=4=2^2$.

d) Sobib kolmnurk küljepikkustega $1, 1$ ja $\sqrt{2}$, mis on täisnurkne, sest $1^2+1^2=2=(\sqrt{2})^2$.

22.4 Tingimusest, et x, y ja z on ühe kolmnurga nurkade suurused kraadides, on oluline tegelikult ainult see, et nad on positiivsed ning annavad kokku liites ratsionaalarvu (antud juhul 180).

a) Kui $\frac{y}{z}$ on ratsionaalarv, on seda ka $\frac{z}{y}$ (tuletame meelde, et $y \neq 0$). Järelikult on $\frac{x}{y} + \frac{z}{y}$ samuti ratsionaalne. Tähistame seda suurust r ja teisendame:

$$r = \frac{x}{y} + \frac{z}{y} = \frac{x+z}{y} = \frac{180-y}{y} = \frac{180}{y} - 1\,.$$

Kuna ka $r > 0$, saame, et $y = \frac{180}{r+1}$ on ratsionaalarv. Arvude x ja z ratsionaalsuse tõestame analoogiliselt.

b) Eeldame üldisust kitsendamata, et $\frac{x}{y}$ on ratsionaalarv ning $\frac{y}{z}$ ning $\frac{z}{x}$ on irratsionaalarvud (kui see nii ei ole, saame muutujad sobivalt ümber nimetada). Järelikult on irratsionaalsed ka $\frac{z}{y}$ ning $\frac{x}{y} + \frac{z}{y} = \frac{180}{y} - 1$. Kui y oleks ratsionaalarv, peaks ka viimane avaldis olema ratsionaalne; vastuolu. Järelikult on y irratsionaalarv.

Analoogiliselt saame, et $\frac{y}{x} + \frac{z}{x} = \frac{180}{x} - 1$ on irratsionaalarv, millest omakorda järeldub x-i irratsionaalsus. Kui z oleks ratsionaalarv, peaks ratsionaalne olema ka $x + y = 180 - z$.

Uurime võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} x + y = a \\ \frac{x}{y} = b \end{cases},$$

kus a ja b on ratsionaalarvud. Teisest võrrandist saame $x = by$ ning esimesse võrrandisse asendades $by - y = a$, kust $y = \frac{a}{b-1}$. Kui $b \neq 1$, järelduks siit arvu y ratsionaalsus ja tekiks vastuolu eeldusega, et z on ratsionaalarv.

Võimalus $b = 1$ aga tähendaks, et $x = y$, millest omakorda saame, et $a = 2x$ peaks olema irratsionaalne. Niisiis tekib vastuolu ka sellel juhul ja järelikult peab z alati irratsionaalarv olema.

22.5 Vastus: $14^2, 86^2, 334^2$ ja 1006^2.

Kui $\sqrt{n+2013} - \sqrt{n}$ on täisarv, peab

$$\frac{n+2013-n}{\sqrt{n+2013}-\sqrt{n}} = \frac{(\sqrt{n+2013})^2 - (\sqrt{n})^2}{\sqrt{n+2013}-\sqrt{n}} = \sqrt{n+2013} + \sqrt{n}$$

olema ratsionaalarv. Järelikult peavad ratsionaalarvud olema ka

$$\frac{(\sqrt{n+2013}+\sqrt{n}) + (\sqrt{n+2013}-\sqrt{n})}{2} = \sqrt{n+2013}$$

ja

$$\frac{(\sqrt{n+2013}+\sqrt{n}) - (\sqrt{n+2013}-\sqrt{n})}{2} = \sqrt{n}\,.$$

Teoreemi 22.1 põhjal peavad n ja $n + 2013$ seega olema täisruudud. Olgu siis $n = a^2$ ja $n + 2013 = b^2$ mingite mittenegatiivsete täisarvude a ja b jaoks.

Kuna
$$2013 = 2013 + n - n = b^2 - a^2 = (b+a)(b-a),$$
tasub uurida arvu 2013 teguritekslahutusi. Tegurdades leiame, et $2013 = 3 \cdot 11 \cdot 61$. Kuivõrd $b + a \geqslant b - a$, jäävad läbi vaadata järgmised võimalused.

- $b - a = 1$ ja $b + a = 2013$ annab $b = 1007$ ja $a = 1006$.
- $b - a = 3$ ja $b + a = 671$ annab $b = 337$ ja $a = 334$.
- $b - a = 11$ ja $b + a = 183$ annab $b = 97$ ja $a = 86$.
- $b - a = 33$ ja $b + a = 61$ annab $b = 47$ ja $a = 14$.

Teisest küljest, valides $a \in \{14, 86, 334, 1006\}$ kindlustame, et nii $n = a^2$ kui $n + 2013 = a^2 + (b+a)(b-a) = b^2$ on täisruudud, mistõttu $\sqrt{n+2013} - \sqrt{n}$ on täisarv.

22.6 Oletame, et mingi naturaalarvu n korral on $\sqrt{2} + \sqrt{n} = q$ ratsionaalarv. Teisendame võrdust

$$\begin{aligned} \sqrt{2} + \sqrt{n} &= q\,, \\ (\sqrt{2} + \sqrt{n})^2 &= q^2, \\ 2 + 2\sqrt{2n} + n &= q^2\,, \\ 2\sqrt{2n} &= q^2 - 2 - n\,. \end{aligned}$$

Viimase võrduse parem pool on ratsionaalne, järelikult peab seda olema ka vasak pool. Teoreemi 22.1 põhjal teame, et $2n$ peab siis olema täisruut. Järelikult esitub n kujul $n = 2m^2$, kus m on mingi mittenegatiivne täisarv. Siis teiseneb ülalsaadud võrdus kujule

$$\begin{aligned} 4m &= q^2 - 2 - 2m^2\,, \\ 2m^2 + 4m + 2 &= q^2\,, \\ 2(m+1)^2 &= q^2\,, \\ 2 &= \left(\frac{q}{m+1}\right)^2. \end{aligned}$$

Viimane võrdus annab vastuolu, sest teoreemi 22.1 (või harjutuse 22.1) põhjal ei saa 2 olla ratsionaalarvu ruut.

Teine võimalus seda ülesannet lahendada on kasutada sarnast võtet kui ülesande 22.5 lahenduses.

Kui $\sqrt{2} + \sqrt{n}$ oleks mingi naturaalarvu n korral ratsionaalarv, peaks ratsionaalne olema ka

$$\frac{n-2}{\sqrt{2}+\sqrt{n}} = \frac{(\sqrt{n})^2 - (\sqrt{2})^2}{\sqrt{2}+\sqrt{n}} = \frac{(\sqrt{n}-\sqrt{2})(\sqrt{n}+\sqrt{2})}{\sqrt{2}+\sqrt{n}} = \sqrt{n} - \sqrt{2}\,.$$

Sel juhul aga peaks
$$\frac{(\sqrt{2}+\sqrt{n}) - (\sqrt{n}-\sqrt{2})}{2} = \sqrt{2}$$
samuti ratsionaalne olema; vastuolu.

22.7 Võime jälle kasutada sama murru nimetajast irratsionaalsuse kaotamise võtet kui ülesannetes 22.5 ja 22.6.

Kui $\sqrt{n}+\sqrt{m}$ on ratsionaalarv, peab seda olema ka

$$\frac{n-m}{\sqrt{n}+\sqrt{m}}=\frac{(\sqrt{n})^2-(\sqrt{m})^2}{\sqrt{n}+\sqrt{m}}=\frac{(\sqrt{n}+\sqrt{m})(\sqrt{n}-\sqrt{m})}{\sqrt{n}+\sqrt{m}}=\sqrt{n}-\sqrt{m}.$$

Niisiis on ratsionaalarvud ka

$$\frac{(\sqrt{n}+\sqrt{m})+(\sqrt{n}-\sqrt{m})}{2}=\sqrt{n}$$

ja

$$\frac{(\sqrt{n}+\sqrt{m})-(\sqrt{n}-\sqrt{m})}{2}=\sqrt{m},$$

järelikult peavad n ja m teoreemi 22.1 põhjal olema täisruudud.

Teine võimalus on ülesande avaldis ruutu tõsta. Olgu $\sqrt{n}+\sqrt{m}=p\in\mathbb{Q}$, siis

$$\begin{aligned}(\sqrt{n}+\sqrt{m})^2&=p^2,\\ n+2\sqrt{nm}+m&=p^2,\\ \sqrt{n}\cdot\sqrt{m}&=\frac{p^2-n-m}{2},\end{aligned}$$

mis on ratsionaalarv. Tähistame $\sqrt{n}\cdot\sqrt{m}=q\in\mathbb{Q}$ ja asendame $\sqrt{m}=p-\sqrt{n}$, mis annab

$$q=\sqrt{n}\cdot(p-\sqrt{n})=p\sqrt{n}+n,$$

kust omakorda

$$\sqrt{n}=\frac{q-n}{p}.$$

Kuna $p>0$, esitab viimane avaldis ratsionaalarvu. Analoogiliselt tõestame, et ka $\sqrt{m}$ on ratsionaalne. Nagu eespoolgi saame kokkuvõttes, et n ja m on täisruudud.

22.8 Oletame vastuväiteliselt, et a avaldub kujul $a=\frac{b}{c}$, kus $b,c\in\mathbb{Z}$ ja lisaks ülesande tingimuste põhjal $b,c\neq 0$. Täiendavalt võime eeldada, et murd $\frac{b}{c}$ on taandatud, st arvud b ja c on ühistegurita. Siis saame võrdusest $\frac{1}{a}=a-[a]$ avaldada

$$[a]=a-\frac{1}{a}=\frac{b}{c}-\frac{c}{b}=\frac{b^2-c^2}{bc}.$$

Kuna $[a]$ on definitsiooni järgi täisarv, peab kehtima $b^2-c^2 \,\vdots\, b$, millest järeldub, et $c^2 \,\vdots\, b$. Kuna b ja c on ühistegurita, saab see nii olla vaid juhul $b\in\{1,-1\}$. Täpselt sama moodi tõestame, et $c\in\{1,-1\}$, mistõttu ka $a\in\{1,-1\}$. Teisest küljest on lihtne veenduda, et 1 ja -1 ei rahulda ülesande tingimusi, sest $1-[1]=0$ ja $-1-[-1]=-2$.

22.9 Vastus: a) ei, b) jah.

a) Näitame, et ükski punkt, mille üks koordinaat on ratsionaalne ja teine irratsionaalne, ei saa asuda kahe ratsionaalse punkti poolt määratud sirgel.

Oletame vastuväiteliselt, et leidub punkt $P(x_0, y_0)$ $(x_0 \in \mathbb{Q}, y_0 \in \mathbb{I})$, mis asub sirgel AB, kus A ja B on ratsionaalsed punktid. Paneme tähele, et vektori $\overrightarrow{AB}$ mõlemad koordinaadid peavad samuti ratsionaalsed olema. Kui punkt P asub sirgel AB, siis on vektorid $\overrightarrow{AB}$ ja $\overrightarrow{AP}$ paralleelsed (või $A = P$, mida ei saa praegu juhtuda, sest punkt P pole ratsionaalne). Järelikult peab leiduma niisugune reaalarv k, et $\overrightarrow{AP} = k \cdot \overrightarrow{AB}$.

Paneme tähele, et vektori $\overrightarrow{AP}$ x-koordinaat on ratsionaalne ja y-koordinaat irratsionaalne. Kui k oleks ratsionaalarv, järelduks võrdusest et $\overrightarrow{AP} = k \cdot \overrightarrow{AB}$, et vektori $\overrightarrow{AP}$ y-koordinaat peaks olema ratsionaalarv. Kui k oleks aga irratsionaalarv, järelduks samast võrdusest, et vektori $\overrightarrow{AP}$ x-koordinaat peaks olema irratsionaalarv. Mõlemal juhul saime vastuolu, järelikult ei saa valitud omadustega punkti P eksisteerida.

b) Olgu antud tasandi suvaline punkt $P(x_0, y_0)$. Vaatame läbi neli võimalikku juhtu.

- $x_0 \in \mathbb{Q}, y_0 \in \mathbb{Q}$. Sel juhul asub punkt P näiteks sirgel, mille määravad irratsionaalsed punktid $(x_0 - \sqrt{2}, y_0 - \sqrt{2})$ ja $(x_0 + \sqrt{2}, y_0 + \sqrt{2})$.
- $x_0 \in \mathbb{Q}, y_0 \in \mathbb{I}$. Sel juhul asub punkt P näiteks sirgel, mille määravad irratsionaalsed punktid $(x_0 - \sqrt{2}, y_0)$ ja $(x_0 + \sqrt{2}, y_0)$.
- $x_0 \in \mathbb{I}, y_0 \in \mathbb{Q}$. Sel juhul asub punkt P näiteks sirgel, mille määravad irratsionaalsed punktid $(x_0, y_0 - \sqrt{2})$ ja $(x_0, y_0 + \sqrt{2})$.
- $x_0 \in \mathbb{I}, y_0 \in \mathbb{I}$. Sel juhul asub punkt P igal sirgel PQ, kus Q on suvaline P-st erinev irratsionaalne punkt.

22.10 Oletame, et $\log_n m = \dfrac{a}{b}$, kus $a, b \in \mathbb{Z}$. Kuna $m, n > 1$, võime eeldada, et a ja b on positiivsed. Tesiendame võrdust

$$\log_n m = \frac{a}{b},$$
$$n^{\frac{a}{b}} = m,$$
$$n^a = m^b.$$

Viimane võrdus aga ei saa kehtida, kui m ja n on ühistegurita.

22.11 Vastus: a) ei, b) jah.

a) Konstruktsiooni idee on otsida y väärtust kujul $y = a + \sqrt{b}$, kus a ja b on mingid ratsionaalarvud. Sel juhul $y^2 = a^2 + 2a\sqrt{b} + b$. Kui nüüd valida a nii, et $2a = 1$, jääb nii y kui y^2 irratsionaalseks osaks $\sqrt{b}$, mille saab valikuga $x = -\sqrt{b}$ summadest $x + y$ ja $x + y^2$ välja koondada.

Kokkuvõttes võime valida näiteks $x = -\sqrt{2}$ ja $y = \dfrac{1}{2} + \sqrt{2}$, mis on mõlemad irratsionaalarvud. Samas $x + y = \dfrac{1}{2}$ ja

$$x + y^2 = -\sqrt{2} + \left(\frac{1}{2} + \sqrt{2}\right)^2 = -\sqrt{2} + \frac{1}{4} + \sqrt{2} + 2 = 2\frac{1}{4}$$

on ratsionaalarvud.

b) Olgu $x + y = p$, $x + y^2 = q$ ja $x + y^3 = r$ mingid ratsionaalarvud. Teisest võrdusest esimest lahutades saame $y(y-1) = q - p$ ning kolmandast võrdusest teist lahutades saame $y^2(y-1) = r - q$.

Kui $p = q$, siis $y = y^2$, millest järeldub, et y on ratsionaalarv 0 või 1. Järelikult peab sel juhul ratsionaalne olema ka $x = p - y$.

Kui $p \neq q$, saame leida jagatise

$$\frac{r-q}{q-p} = \frac{y^2(y-1)}{y(y-1)} = y.$$

Niisiis on y ka sel juhul ratsionaalarv, millest omakorda järeldub jälle arvu $x = p - y$ ratsionaalsus.

22.12 Vastus: a) jah, b) ei.

a) Olgu kolmnurga külgede pikkused a, b ja c, Näitame, et selle kolmnurga ümberringjoone raadiuse R ruudu saab avaldada suuruste a^2, b^2 ja c^2 kaudu kasutades tehteid, mis säilitavad ratsionaalarvulisuse. Selleks on mitu võimalust.

Kõigepealt võime kasutada trigonomeetriat. Olgu külje a vastas nurk suurusega α. Siis teame siinusteoreemist, et $\dfrac{a}{\sin\alpha} = 2R$, millest omakorda $R^2 = \dfrac{a^2}{4\sin^2\alpha}$. Näitame, et suuruse $\sin^2\alpha$ saab avaldada a^2, b^2 ja c^2 kaudu.

Koosinusteoreem annab $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$, kust saame

$$\begin{aligned}
\cos\alpha &= \frac{a^2-b^2-c^2}{2bc},\\
\cos^2\alpha &= \frac{(a^2-b^2-c^2)^2}{4b^2c^2},\\
\sin^2\alpha &= 1-\cos^2\alpha = 1-\frac{(a^2-b^2-c^2)^2}{4b^2c^2},
\end{aligned}$$

millest järeldubki vajalik väide.

Teine võimalus on kasutada kolmnurga pindala valemit $S = \dfrac{abc}{4R}$, millest saame avaldada $R^2 = \dfrac{a^2b^2c^2}{16S^2}$. Heroni valemist (vaata teoreemi 37.3) teame, et $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, kus $p = \dfrac{a+b+c}{2}$. Järelikult

$$\begin{aligned}
16S^2 &= 16\cdot\frac{a+b+c}{2}\cdot\frac{-a+b+c}{2}\cdot\frac{a-b+c}{2}\cdot\frac{a+b-c}{2} =\\
&= (a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c) =\\
&= (a^2-(b+c)^2)(a^2-(b-c)^2) =\\
&= (a^2-b^2-c^2-2bc)(a^2-b^2-c^2+2bc) =\\
&= (a^2-b^2-c^2)^2-4b^2c^2.
\end{aligned}$$

Kokkuvõttes

$$R^2 = \frac{a^2b^2c^2}{(a^2-b^2-c^2)^2-4b^2c^2}.$$

b) Proovime hakatuseks mõnda lihtsat kolmnuka, näiteks võrdkülgset küljepikkusega 1. Kõikide tema külgede pikkuste ruudud on siis samuti võrdsed 1-ga. Selle kolmnurga siseringjoone raadiuse võime avaldada näiteks pindala kaudu valemist $S = pr$, kus $p = \dfrac{a+b+c}{2}$; antud juhul siis $p = \dfrac{3}{2}$. Kolmnurga pindala saame arvutada kahe külje ja nendevahelise nurga siinuse abil: $S = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4}$, mistõttu $r = \frac{S}{p} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{\sqrt{3}}{6}$. Kuna $r^2 = \frac{3}{36}$ on ratsionaalarv, siis vaadeldav kolmnurk ei sobi.

Proovime järgmiseks võrdhaarset täisnurkset kolmnurka haara pikkusega 1. Siis tema hüpotenuusi pikkus on Pythagorase teoreemi põhjal $\sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$, poolümbermõõt $p = \frac{2+\sqrt{2}}{2}$ ja pindala $S = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \sin 90^\circ = \frac{1}{2}$. Nüüd saame

$$r = \frac{S}{p} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{2+\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{2+\sqrt{2}} = \frac{2-\sqrt{2}}{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})} = \frac{2-\sqrt{2}}{2},$$

kust omakorda

$$r^2 = \frac{(2-\sqrt{2})^2}{2^2} = \frac{4-4\sqrt{2}+2}{4} = \frac{3-2\sqrt{2}}{2},$$

mis on irratsionaalne. Järelikult sobib b)-osa konstruktsiooniks kolmnurk küljepikkustega $1, 1$ ja $\sqrt{2}$, kuivõrd tema kõigi külgede pikkuste ruudud on muuhulgas ratsionaalarvud.

22.13 Vastus: 3.

Lihtne on näha, et kahest punktist ei piisa. Olgu O_1 ja O_2 tasandi kaks suvalist erinevat punkti vahekaugusega d. Valime mingi ratsionaalarvu $r > d$ ja joonestame kaks ringjoont keskpunktidega vastavalt O_1 ja O_2 ning võrdsete raadiustega r. Nende ringjoonte lõikepunkt (mis kindlasti eksisteerib) on nii punktist O_1 kui ka punktist O_2 ratsionaalarvulisel kaugusel r.

Lahenduse lõpuleviimiseks piisab leida tasandil kolm punkti nii, et selle tasandi suvalise punkti kaugus vähemalt ühest neist oleks irratsionaalne. Viime tasandil sisse koordinaatteljed ning tuletame meelde, et punktide koordinaatidega $(x_1; y_1)$ ja $(x_2; y_2)$ omavaheline kaugus avaldub valemiga

$$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Proovime leida niisuguseid punkte, et tasandi suvalise punkti $P(x; y)$ kauguse avaldis neist oleks võimalikult lihtne. Esimeseks punktiks saame valida $A(0; 0)$, siis $|PA| = \sqrt{x^2 + y^2}$. “Lihtsuselt” järgmine punkt võiks olla näiteks $B(1; 0)$, siis $|PB| = \sqrt{(x-1)^2 + y^2}$.

Paneme tähele, et kui $|PA|$ ja $|PB|$ on ratsionaalarvud, siis on seda ka

$$\begin{aligned} |PA|^2 &= x^2 + y^2, \\ |PB|^2 &= (x-1)^2 + y^2 = x^2 - 2x + 1 + y^2 \text{ ja} \\ |PB|^2 - |PA|^2 &= -2x + 1. \end{aligned}$$

Viimasest seosest järeldub aga, et x peab samuti ratsionaalne olema.

Nüüd on kolmandat punkti lihtne valida; sobib näiteks $C(\sqrt{2}, 0)$. Siis saame

$$\begin{aligned} |PC| &= \sqrt{(x-\sqrt{2})^2 + y^2}, \\ |PC|^2 &= x^2 - 2\sqrt{2}x + 2 + y^2 \text{ ja} \\ |PC|^2 - |PA|^2 &= -2\sqrt{2}x + 2. \end{aligned}$$

Kui $|PC|$ oleks samuti ratsionaalne, peaks seda olema ka $|PC|^2 - |PA|^2$. Äsjatõestatud võrduse põhjal tähendaks see omakorda, et x on irratsionaalne; vastuolu. Seega peab vähemalt üks suurustest $|PA|, |PB|$ ja $|PC|$ olema irratsionaalarv.