21. Suurim ühistegur, vähim ühiskordne

Täisarvude suurima ühisteguri ja vähima ühiskordsega toimetamiseks on sageli kasulik vaadelda nende täisarvude kanoonilisi esitusi.

Teoreem 21.1 Vaatleme positiivseid täisarve m ja n ning olgu $p_1, p_2, \ldots, p_s$ kõik algarvud, mis esinevad neist vähemalt ühe algteguriteks lahutuses. Olgu

$$m = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \ldots p_s^{a_s} \quad \text{ja} \quad n = p_1^{b_1} p_2^{b_2} \ldots p_s^{b_s}$$

arvude m ja n kanoonilised esitused (kus mõned astendajatest a_i ja b_i võivad olla nullid). Siis

$$\text{SÜT}(m,n) = p_1^{c_1} p_2^{c_2} \ldots p_s^{c_s} \quad \text{ja} \quad \text{VÜK}(m,n) = p_1^{d_1} p_2^{d_2} \ldots p_s^{d_s},$$

kus $c_i = \min(a_i, b_i)$ ja $d_i = \max(a_i, b_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, s)$.

Tõestus. Arvude m ja n suvaline ühine tegur t saab kanoonilises esituses nullist suuremal astmel omada ainult neid algarve, mis esinevad nii m-i kui n-i algteguriteks lahutuses. Seega peab ta avalduma kujul $t = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \ldots p_s^{k_s}$, kus $k_i \geqslant 0$ $(i = 1, 2, \ldots, s)$. Teisest küljest, kuna $m \vdots t$ ja $n \vdots t$, peavad kehtima ka võrratused $k_i \leqslant a_i$ ja $k_i \leqslant b_i$ $(i = 1, 2, \ldots, s)$. Järelikult peavad kehtima ka võrratused $k_i \leqslant \min(a_i, b_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, s)$. Suurima ühisteguri saame, kui kõigis neis võrratustes kehivad võrdused, st $k_i = \min(a_i, b_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, s)$.

Arvude m ja n suvaline ühine kordne u võib peale algtegurite $p_1, p_2, \ldots, p_s$ omada veel tegureid. Olgu siis

$$u = w \cdot p_1^{\ell_1} p_2^{\ell_2} \ldots p_s^{\ell_s},$$

kus w ei sisalda ühtki teguritest $p_1, p_2, \ldots, p_s$. Kuna $u \vdots m$ ja $u \vdots n$, peavad kehtima võrratused $\ell_i \geqslant a_i$ ja $\ell_i \geqslant b_i$ $(i = 1, 2, \ldots, s)$. Järelikult peavad kehtima ka võrratused $\ell_i \geqslant \max(a_i, b_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, s)$. Vähima ühise kordse saame, kui $w = 1$ ja kõigis viimastes võrratustes kehivad võrdused, st $\ell_i = \max(a_i, b_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, s)$. □

■ **Näide 21.1** Arvude $m = 882 = 2^1 3^2 7^2$ ja $n = 49000 = 2^3 5^3 7^2$ suurim ühistegur on $2^1 3^0 5^0 7^2 = 98$ ning vähim ühiskordne $2^3 3^2 5^3 7^2 = 441000$. ■

Paljusid suurima ühisteguri ja vähima ühiskordse kohta käivaid väiteid saab tõestada väga lihtsal ja loomulikul moel, vaadeldes iga kanoonilises esituses esineva algarvu astmeid eraldi.

Teoreem 21.2 Iga positiivse täisarvu m ja n korral kehtib võrdus

$$\mathrm{SÜT}(m,n)\cdot\mathrm{VÜK}(m,n)=m\cdot n.$$

Tõestus. Vaatleme suvalist algarvu p, mis esineb vähemalt ühe antud arvu kanoonilises esituses. Olgu tema astendaja arvude m ja n kanoonilises esituses vastavalt a ja b. Teoreemi 21.1 põhjal teame, et p astendaja arvus $\mathrm{SÜT}(m,n)$ on $\min(a,b)$ ja astendaja arvus $\mathrm{VÜK}(m,n)$ on $\max(a,b)$. On selge, et

$$\min(a,b)+\max(a,b)=a+b,$$

järelikult on p aste nii arvus $\mathrm{SÜT}(m,n)\cdot\mathrm{VÜK}(m,n)$ kui ka arvus $m\cdot n$ täpselt $a+b$. Kuna see arutelu kehtib suvalise algteguri p korral, oleme tõestanud teoreemi võrduse. □

Ülesanne 21.1 (Sügisene lahtine võistlus 2018, noorem rühm) Positiivsed täisarvud n, m ja k on sellised, et arv $\mathrm{VÜK}(m,k)$ jagub arvuga n ning arv $\mathrm{VÜK}(n,k)$ jagub arvuga m. Tõesta, et $n\cdot\mathrm{SÜT}(m,k)=m\cdot\mathrm{SÜT}(n,k)$.

Lahendus. Vaatleme suvalist algarvu p, mis esineb vähemalt ühe antud arvu kanoonilises esituses. Olgu tema astendaja arvude n, m ja k kanoonilises esituses vastavalt c, b ja a. Kuna $\mathrm{VÜK}(m,k)\,\vdots\,n$, peab kehtima võrratus $\max(b,a)\geqslant c$, ja kuna $\mathrm{VÜK}(n,k)\,\vdots\,m$, peab kehtima võrratus $\max(c,a)\geqslant b$.

Ülesande väite tõestamiseks näitame, et kehtib võrdus

$$c+\min(b,a)=b+\min(c,a). \tag{21.1}$$

Vaatleme kahte juhtu. Kui $a<b$, siis $\max(b,a)=b$ ja järelikult $b\geqslant c$. Kuna ka $\max(c,a)\geqslant b$, siis järelikult $b=c$ ja võrdus (21.1) kehtib.

Kui aga $a\geqslant b$, siis $\max(b,a)=a$ ja järelikult ka $a\geqslant c$. Siis $\min(b,a)=b$ ja $\min(c,a)=c$, mistõttu võrdus (21.1) kehtib ka sel juhul.

Kuna toodud arutelu kehtib suvalise algteguri p korral, järeldubki siit ülesande võrdus.

Ülesanded

Ülesanne 21.2 (Sügisene lahtine võistlus 2016, noorem rühm) Juku püstitas matemaatikaringis järgmise hüpoteesi: alati, kui mingi kahe ühistegurita täisarvu x ja y korrutis jagub mingi kahe ühistegurita täisarvu a ja b korrutisega, siis vähemalt üks arvudest x ja y jagub arvuga a või b. Kas Juku hüpotees peab paika?

Märkus. Öeldakse, et täisarvud a ja b on *ühistegurita*, kui $\mathrm{SÜT}(a,b)=1$.

Ülesanne 21.3 (Lõppvoor 2009, 9. klass) Leia kõik positiivsete täisarvude paarid (a,b), mille korral

$$ab=\mathrm{SÜT}(a,b)+\mathrm{VÜK}(a,b).$$

Ülesanne 21.4 (Talvine lahtine võistlus 2014, noorem rühm) Tõesta, et mistahes positiivsete täisarvude n ja m vähima ühiskordse ruut jagub korrutisega nm ning nm omakorda jagub arvude n ja m suurima ühisteguri ruuduga.

Ülesanne 21.5 (Piirkonnavoor 2020, 10. klass)

a) Kas leiduvad erinevad positiivsed täisarvud a, b ja c, mille korral

$$\text{VÜK}(\text{SÜT}(a,b),c) = \text{VÜK}(\text{SÜT}(b,c),a) = \text{VÜK}(\text{SÜT}(c,a),b)?$$

b) Kas leiduvad (mitte tingimata erinevad) positiivsed täisarvud a, b ja c, mille korral

$$\text{VÜK}(\text{SÜT}(a,b),c) = \text{VÜK}(\text{SÜT}(b,c),a) = \text{VÜK}(\text{SÜT}(c,a),b) = m,$$

kus $m \neq \text{VÜK}(a,b,c)$?

Ülesanne 21.6 (Lõppvoor 2007, 12. klass) Olgu a, b ja c niisugused positiivsed täisarvud, et $\text{SÜT}(a,b,c) = 1$ ning iga kahe arvu korrutis jagub kolmanda arvuga.

a) Tõesta, et igaüks neist arvudest on võrdne kahe ülejäänud arvu vähima ühiskordse ja suurima ühisteguri jagatisega.

b) Too näide sellistest ühest suurematest arvudest a, b ja c.

Ülesanne 21.7 (Lõppvoor 1998, 11. klass) Olgu arvud d_1 ja d_2 positiivse täisarvu n positiivsed jagajad, kusjuures arvude $\frac{n}{d_1}$ ja d_2 suurim ühistegur on võrdne arvude $\frac{n}{d_2}$ ja d_1 suurima ühisteguriga. Tõesta, et $d_1 = d_2$.

Ülesanne 21.8 (Lõppvoor 1997, 12. klass) Mistahes positiivsete täisarvude m ja n korral tähistame

$$T(m,n) = \text{SÜT}\left(m, \frac{n}{\text{SÜT}(m,n)}\right),$$

kus $\text{SÜT}(x,y)$ on arvude x ja y suurim ühistegur.

a) Tõesta, et leidub lõpmata palju selliseid arvupaare (m,n), mille korral $T(m,n) > 1$ ja $T(n,m) > 1$.

b) Kas leiduvad arvud m ja n, mille korral $T(m,n) = T(n,m) > 1$?

Ülesanne 21.9 (Sügisene lahtine võistlus 2022, vanem rühm) Olgu m, n, a ja b erinevad positiivsed täisarvud, mille korral $ab = mn$. Joonisel oleva 2×2-tabeli igasse lahtrisse kirjutatakse vastava rea ees ja vastava veeru kohal oleva arvu suurim ühistegur.

a) Kas võib juhtuda, et tabeli ühegi rea arvude korrutis ei võrdu vastava rea ette kirjutatud arvuga ega tabeli ühegi veeru arvude korrutis vastava veeru kohale kirjutatud arvuga?

b) Kas võib kindlalt väita, et kui $\text{SÜT}(m,n) = 1$, siis tabeli iga rea arvude korrutis võrdub vastava rea ette kirjutatud arvuga ja tabeli iga veeru arvude korrutis võrdub vastava veeru kohale kirjutatud arvuga?

	m	n
a		
b		

Ülesanne 21.10 (Talvine lahtine võistlus 2016, noorem rühm) Olgu n positiivne täisarv. Tõesta, et mistahes n järjestikuse positiivse täisarvu vähim ühiskordne jagub arvude $1, 2, \ldots, n$ vähima ühiskordsega.

Vaata ka ülesannet 8.10.

Lahendused

21.2 Vastus: ei.

Valime neli erinevat algarvu p, q, r, s ning võtame $x = pq$, $y = rs$, $a = pr$ ja $b = qs$. Siis SÜT$(x, y) = 1$ ja $xy = pqrs = ab$, järelikult $xy \vdots ab$. Samas ei jagu ei x ega y ei a-ga ega b-ga.

21.3 Vastus: $a = b = 2$ on ainus lahend.

Tähistame SÜT$(a, b) = m$ ja VÜK$(a, b) = n$. Teoreemist 21.2 teame siis, et $ab = mn$, järelikult ülesande tingimuste põhjal saame

$$\begin{aligned} mn &= m + n, \\ mn - m - n + 1 &= 1, \\ (m-1)(n-1) &= 1. \end{aligned}$$

Kuna m ja n on positiivsed täisarvud, saab viimane võrdus kehtida ainult siis, kui $m = n = 2$, mis omakorda saab nii olla ainult siis, kui $a = b = 2$.

21.4 Olgu suvalise algteguri p astendajad arvude m ja n kanoonilises esituses vastavalt a ja b. Algteguri p astendaja nende arvude vähima ühiskordse ruudus on $2\max(a, b)$, nende korrutises $a + b$ ning nende suurima ühisteguri ruudus $2\min(a, b)$. Tänu võrratustele

$$2\min(a, b) \leqslant a + b \leqslant 2\max(a, b)$$

saame

$$p^{2\min(a,b)} \mid p^{a+b} \mid p^{2\max(a,b)}.$$

Kuna need seosed kehtivad suvalise algteguri p jaoks, järeldub siit ülesande väide.

21.5 Vastus: a) jah, b) ei.

Olgu suvalise algteguri p astendajad arvude a, b ja c kanoonilises esituses vastavalt x, y ja z. Ülesande võrdustest järelduvad siis võrdused

$$\max(\min(x, y), z) = \max(\min(y, z), x) = \max(\min(z, x), y). \qquad (21.2)$$

Vaatleme kõigepealt juhtu, kui üks arvudest x, y, z on teistest rangelt suurem; üldsust kitsendamata olgu näiteks $z > x$ ja $z > y$. Siis $\max(\min(x, y), z) = z$, aga $\max(\min(y, z), x) = \max(y, x) < z$, vastuolu ülesande tingimustega.

Järelikult peavad kaks arvudest x, y, z olema võrdsed ja kolmas nendest väiksem või samuti nendega võrdne. Lihtne on kontrollida, et kõigil neil juhtudel võrdus (21.2) kehtib.

NB! Selle koha peal tuleb olla tähelepanelik. Me oleme tõestanud, et iga algteguri p jaoks leidub arvude a, b ja c seas kaks, mille esituses on selle algarvu astmed võrdsed, aga need kaks arvu võivad erinevate algtegurite jaoks olla erinevad!

Ülesande a) osa konstruktsiooni andmiseks võime valida näiteks astendajad $1, 1, 0$. Selleks, et arvud a, b ja c tuleksid erinevad, võime astendaja 0 valida erinevatele algteguritele. Olgu p, q, r kolm erinevat algarvu, sel juhul sobivad otsitavateks arvudeks näiteks $a = pq$, $b = qr$ ja $c = pr$.

Ülesande b) osa lahendamiseks tuletame meelde, et kaks algteguri p astendajatest x, y, z peavad olema võrdsed ja kolmas nendest väiksem või samuti nendega võrdne. Igal juhul saame võrdused

$$\max(\min(x, y), z) = \max(\min(y, z), x) = \max(\min(z, x), y) = \max(x, y, z).$$

Kuna see võrdus kehtib iga algteguri jaoks, peab ülesande avaldise väärtus olema VÜK(a, b, c).

21.6 a) Olgu suvalise algteguri p astendajad arvude a, b ja c kanoonilises esituses vastavalt x, y ja z. Ülesande tingimustest järelduvad nii võrdus $\min(x, y, z) = 0$ kui ka võrratused $x + y \geqslant z$, $y + z \geqslant x$ ja $z + x \geqslant y$. Võrdus $\min(x, y, z) = 0$ kehtib parajasti siis, kui üks arvudest x, y, z on 0; olgu selleks üldsust kitsendamata x. Võrratusest $x + y \geqslant z$ järeldub sel juhul $y \geqslant z$ ja võratusest $z + x \geqslant y$ järeldub $z \geqslant y$; kokkuvõttes saame $y = z$. See tähendab, et kehtivad võrdused

$$\begin{aligned} x &= y - y = \max(y, z) - \min(y, z), \\ y &= z - 0 = \max(z, x) - \min(z, x), \\ z &= y - 0 = \max(x, y) - \min(x, y). \end{aligned}$$

Järelikult ka

$$p^x = \frac{p^{\max(y,z)}}{p^{\min(y,z)}}, \quad p^y = \frac{p^{\max(z,x)}}{p^{\min(z,x)}} \quad \text{ja} \quad p^z = \frac{p^{\max(x,y)}}{p^{\min(x,y)}}.$$

Kuna algtegur p oli suvaline, esitub igaüks antud arvudest kahe ülejäänud arvu vähima ühiskordse ja suurima ühisteguri jagatisena.

b) Kõige lihtsama konstruktsiooni saame, kui valime astendajateks $1, 1, 0$. Et arvud tuleksid erinevad, võtame astmele 0 iga kord erineva algarvu. Konkreetsemalt, vaatleme kolme erinevat algarvu p, q, r ning valime $a = pq$, $b = qr$ ja $c = pr$. Siis näiteks

$$\frac{\text{VÜK}(a, b)}{\text{SÜT}(a, b)} = \frac{pqr}{q} = pr = c$$

ja sama moodi teiste arvupaaridega.

21.7 Vaatleme arvu n mingit algtegurit p. Olgu tema astendajad arvude n, d_1 ja d_2 kanoonilises esituses vastavalt k, a_1 ja a_2. Ülesande võrdusest

$$\text{SÜT}\left(\frac{n}{d_1}, d_2\right) = \text{SÜT}\left(\frac{n}{d_2}, d_1\right)$$

saame $\min(k - a_1, a_2) = \min(k - a_2, a_1)$.

Vaatleme kahte juhtu. Kui $k - a_1 < a_2$, siis ka $k - a_2 < a_1$. Järelikult

$$k - a_1 = \min(k - a_1, a_2) = \min(k - a_2, a_1) = k - a_2,$$

kust saame $a_1 = a_2$. Kui aga $k - a_1 \geqslant a_2$, siis ka $k - a_2 \geqslant a_1$ ja järelikult

$$a_2 = \min(k - a_1, a_2) = \min(k - a_2, a_1) = a_1.$$

Kokkuvõtteks saame mõlemal juhul $a_1 = a_2$. Kuna vaadeldud algtegur p oli suvaline, peab kehtima ka võrdus $d_1 = d_2$.

21.8 Vastus: b) ei.

Olgu suvalise algteguri p astendajad arvude m ja n kanoonilises esituses vastavalt a ja b. Leiame p astendaja arvu $T(m,n)$ kanoonilises esituses. Selleks vaatleme eraldi kahte juhtu.

Kui $a \geqslant b$, siis on otsitavaks astendajaks

$$\min(a, b - \min(a,b)) = \min(a, b - b) = \min(a, 0) = 0\,.$$

Kui aga $a < b$, saame astendajaks

$$\min(a, b - (\min(a,b))) = \min(a, b - a)\,.$$

a) Sobivaks konstruktsiooniks saame valida kaks erinevat algarvu p ja q, kaks positiivset täisarvu k ja ℓ ning $m = p^k q^{\ell+1}$ ja $n = p^{k+1} q^{\ell}$. Siis

$$T(m,n) = p^{\min(k,(k+1)-k)} q^0 = p \quad \text{ja} \quad T(n,m) = p^0 q^{\min(\ell,(\ell+1)-\ell)} = q\,.$$

On selge, et sobivaid p, q, k ja ℓ valikuid on lõpmatult.

b) Kui $T(m,n) = T(n,m) > 1$, peab leiduma niisugune algarv p, mille astendaja arvude $T(m,n)$ ja $T(n,m)$ kanoonilises esituses on sama positiivne täisarv. See aga pole võimalik, sest eelpooltõestatu põhjal on iga algteguri astendaja kas $T(m,n)$ või $T(n,m)$ kanoonilises esituses 0.

21.9 Vastus: a) jah, b) jah.

a) Võimalikke konstruktsioone on palju ja väikese proovimise järel on lihtne mõnda neist leida; üks võimalus on toodud joonisel.

	2	16
4	2	4
8	2	8

b) Vaatleme suvalist algtegurit p, mis esineb vähemalt ühes arvudest a, b, m, n. Et SÜT$(m,n) = 1$, peab selle algteguri aste kas m-i või n-i kanoonilises esituses olema 0. Olgu siis näiteks p aste m-i ja n-i kanoonilises esituses vastavalt 0 ja $i > 0$; teisel võimalikul juhul on lahendus analoogiline.

Samuti olgu p aste a ja b kanoonilises esituses vastavalt k ja ℓ. Kuna $ab = mn$, peab kehtima võrdus $k + \ell = i$. Muuhulgas tähendab see, et $k, l \leqslant i$. Täidame ülesande tabeli algarvu p astmete jaoks vastavate arvude kanoonilistes esitustes.

	p^i	p^0
p^k	p^k	p^0
p^ℓ	p^ℓ	p^0

Tabelist on näha, et algarvu p korral ülesandes nõutud tingimus kehtib. Kuna p oli suvaline algtegur, peab tingimus kehtima kõigi valitud arvude a, b, m, n korral.

21.10 Vaatleme algarvu p, mis jagab mõnda arvudest $1, 2, \ldots, n$, ja olgu k kõrgeim aste, millel p vastavates algteguriteks lahutustes esineb. Muuhulgas saame, et $p^k \leqslant n$. Samuti näeme, et p esineb täpselt astmel k ka arvu VÜK$(1, 2, \ldots, n)$ kanoonilises esituses.

Vaatleme nüüd n järjestikust positiivset täisarvu. Kuna $p^k \leqslant n$, peab nende seas leiduma mõni, mis jagub arvuga p^k. Järelikult esineb p nende arvude vähima ühiskordse kanoonilises esituses vähemalt astmel k.

Kuna see arutelu kehtib kõigi algarvude p korral, on ülesande väide tõestatud.