21. Jaguvus ja tegurdamine

Vahel tuleb arvuteooriaülesannetes uurida polünomiaalsete avaldiste käitumist mingi mooduli järgi. Siis on sageli kasulik vaadeldav polünoom tegurdada ning ära kuluvad jaotises 10.3 õpitud võtted.

Ülesanne 21.1 Tõesta, et $n^3 - n$ jagub iga täisarvu n korral 6-ga.

Lahendus. Tegurdame antud avaldise:

$$n^3 - n = n(n^2 - 1) = (n-1)n(n+1)\,.$$

Niisiis on $n^3 - n$ näol tegemist kolme järjestikuse täisarvu korrutisega. Kolmest järjestikusest täisarvust üks jagub alati 3-ga ja üks arv (võibolla seesama, võibolla mõni teine) aga alati 2-ga. Nende korrutis peab järelikult jaguma 6-ga.

Ülesanded

Ülesanne 21.2 (Piirkonnavoor 1993, 9. klass) Tõesta, et mistahes kahe paaritu arvu ruutude vahe jagub arvuga 8.

Ülesanne 21.3 (Piirkonnavoor 2001, 9. klass) Olgu k täisarv. Tõesta, et kui arv $k^2 - k$ ei jagu 6-ga, siis arv $k^2 - k - 2$ jagub 18-ga.

Ülesanne 21.4 (Lõppvoor 2004, 9. klass) Tõesta, et arv $n^n - n$ jagub 24-ga mistahes paaritu naturaalarvu n korral.

Ülesanne 21.5 (Lõppvoor 2020, 9. klass) Tõesta, et iga naturaalarvu n korral jagub üks arvudest $3^{2n} - 3^{n+1} + 3^n - 3$ ja $3^{2n} - 3^{n+1} + 3^n + 1$ arvuga 32.

Ülesanne 21.6 (Sügisene lahtine võistlus 1997, vanem rühm) Milliste positiivsete täisarvude n korral ei jagu arv $n^8 - n^2$ arvuga 72?

Ülesanne 21.7 (Piirkonnavoor 2003, 12. klass) Milliste täisarvude n korral jagub arv $n^4 + n^2 - 2$ arvuga 72?

Ülesanne 21.8 (Piirkonnavoor 2010, 12. klass) Positiivse täisarvu n korral tähistame $S(n) = n + n^2 + n^3 + n^4 + n^5 + n^6$.

a) Tõesta, et mis tahes positiivse täisarvu n korral $S(n)$ jagub 6-ga.

b) Milliste positiivsete täisarvude n korral $S(n)$ jagub 12-ga?

Ülesanne 21.9 (Piirkonnavoor 2011, 11. klass) Kas võrrandil

$$\frac{x^5 - 5x^3 + 4x}{100} = 987654321$$

on täisarvulisi lahendeid?

Ülesanne 21.10 (Piirkonnavoor 2021, 12. klass)

a) Tõesta, et iga naturaalarvu n korral jagub arv $n^{4040} + n^{4038} + \ldots + n^2 + 1$ arvuga $n^{2020} + n^{2019} + \ldots + n + 1$.

b) Kas väide jääb kehtima, kui esimesse avaldisse lisada liidetav n^{4042} ja teise avaldisse liidetav n^{2021}?

Ülesanne 21.11 (Lõppvoor 2008, 10. klass) Tühjale tahvlile kirjutatakse algul arvud 1 ja 2. Edasi valitakse igal käigul mingid juba tahvlil olevad arvud m ja n (võib olla ka $m = n$) ning kirjutatakse tahvlile juurde arv $mn + m + n$. Kas lõpliku arvu selliste käikude abil on võimalik tahvlile kirjutada arv 2008?

Ülesanne 21.12 (Piirkonnavoor 2001, 11. klass) Olgu a, b ja c sellised positiivsed täisarvud, et

$$abc + ab + bc + ca + a + b + c = 2000.$$

Leia summa $a + b + c$ kõik võimalikud väärtused.

Ülesanne 21.13 (Talvine lahtiine võistlus 2023, noorem rühm) Leia kõik naturaalarvude kolmikud (x, y, z), mis rahuldavad võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} x + y - z = 23, \\ x^2 + y^2 - z^2 = 23. \end{cases}$$

Lahendused

21.2 Tõestame, et iga paaritu arvu ruut annab 8-ga jagades jäägi 1.

Paaritu arvu üldkuju on $2k + 1$, kus $k \in \mathbb{Z}$. Tema ruut avaldub siis kujul

$$(2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4k(k + 1) + 1.$$

Märkame, et $k(k + 1)$ on kahe järjestikuse täisarvu korrutis, mis peab sellisena olema paarisarv. Niisiis jagub avaldis $4k(k + 1)$ omakorda 8-ga, millest järeldubki vajalik väide.

21.3 Kuna $k^2 - k = (k - 1)k$ on kahe järjestikuse täisarvu korrutis, on ta alati paaris. Järelikult ei jagu ta 6-ga parajasti siis, kui ta ei jagu 3-ga, mis on nii omakorda parajasti siis, kui k annab 3-ga jagades jäägi 2.

Tegurdame polünoomi k^2-k-2. Selleks võime teoreemi 10.1 põhjal lahendada ruutvõrrandi $k^2-k-2=0$. Taandatud ruutvõrrandi lahendivalemist saame

$$k_{1,2}=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+2}=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{9}{4}}=\frac{1}{2}\pm\frac{3}{2},$$

seega $k_1=-1$ ja $k_2=2$ ning $k^2-k-2=(k+1)(k-2)$.

Teine võimalus tegurdamiseks on kasutada teoreemi 10.4 pannes tähele, et $k=2$ on polünoomi k^2-k-2 juureks. Täieliku tegurduse leidmiseks jääb jagada

$$\begin{array}{l} k^2 \;\; -k-2=(k-2)(k+1) \\ \underline{-k^2+2k} \\ \qquad\quad k-2 \\ \qquad\;\; \underline{-k+2} \\ \qquad\qquad\; 0 \end{array}$$

Kui $k\equiv 2 \bmod 3$, siis jaguvad nii $k-2$ kui $k+1$ arvuga 3 ja nende korrutis jagub seetõttu 9-ga. Lisaks näeme, et $k-2$ ja $k+1$ on erineva paarsusega, mistõttu nende korrutis jagub ka 2-ga. Kokkuvõttes oleme näidanud, et $k^2-k-2=(k+1)(k-2)$ jagub 18-ga.

21.4 Olgu $n=2m+1$, kus m on mittenegatiivne täisarv. Tegurdame ülesande avaldist:

$$n^n-n=n(n^{n-1}-1)=n(n^{2m}-1)=n(n^m-1)(n^m+1)\,.$$

Kuna n on paaritu, kujutavad n^m-1 ja n^m+1 endast kahte järjestikust paarisarvu, millest üks peab kindlasti jaguma 4-ga. Nende korrutis jagub järelikult alati 8-ga.

Kui n jagub 3-ga, jagub korrutis $n(n^m-1)(n^m+1)$ samuti 3-ga. Kui aga n ei jagu 3-ga, ei saa 3-ga jaguda ka arv n^m. Järelikult peab kas n^m-1 või n^m+1 kindlasti 3-ga jaguma.

Kokkuvõttes jagub ülesande avaldis igal juhul arvuga $8\cdot 3=24$.

21.5 Lahenduse ideed otsides proovime mõned väikesed n väärtused läbi. Kui $n=0,1,2,3$, siis $3^{2n}-3^{n+1}+3^n-3$ võtab vastavalt väärtused $-4,0,60$ ja 672 ning $3^{2n}-3^{n+1}+3^n+1$ võtab 4 võrra suuremad väärtused $0,4,64$ ja 676. Tekib hüpotees, et $3^{2n}-3^{n+1}+3^n-3$ jagub 32-ga siis, kui n on paaritu, ja $3^{2n}-3^{n+1}+3^n+1$ siis, kui n on paaris. Näitame, et see hüpotees peab tõepoolest alati paika.

Olgu siis n kõigepealt paaritu. Tegurdame

$$3^{2n}-3^{n+1}+3^n-3=3^n(3^n-3)+3^n-3=(3^n+1)(3^n-3)\,.$$

Uurime arvu 3 astmete tsüklit modulo 8:

$$\begin{aligned} 3^0&=1\equiv 1 \bmod 8\,,\\ 3^1&=3\equiv 3 \bmod 8\,,\\ 3^2&=9\equiv 1 \bmod 8\,,\\ 3^3&=27\equiv 3 \bmod 8\,. \end{aligned}$$

Näeme, et tekib tsükkel pikkusega 2, kusjuures $3^n\equiv 3 \bmod 8$ parajasti siis, kui n on paaritu. Seega jagub avaldises $(3^n+1)(3^n-3)$ tegur 3^n-3 paarituarvulise n

korral kindlasti 8-ga. Lisaks jagub tegur $3^n + 1 = (3^n - 3) + 4$ veel 4-ga, mistõttu korrutis $(3^n + 1)(3^n - 3)$ jagub kokkuvõttes 32-ga.

Vaatleme nüüd juhtu, mil n on paaris. Tegurdame ülesande teist avaldist:

$$3^{2n} - 3^{n+1} + 3^n + 1 = 3^{2n} - 3 \cdot 3^n + 3^n + 1 = 3^{2n} - 2 \cdot 3^n + 1 = (3^n - 1)^2 .$$

Eespool nägime, et kui n on paarisarv, annab 3^n arvuga 8 jagades jäägi 1. Seega jagub $3^n - 1$ kindlasti 8-ga ja $(3^n - 1)^2$ lausa 64-ga, millest muuhulgas järeldub tema jaguvus 32-ga.

21.6 Vastus: $n^8 - n^2 \not\vdots\, 72$ parajasti siis, kui $n \equiv 2 \bmod 4$.

Tegurdame ülesande avaldise:

$$\begin{aligned} n^8 - n^2 &= n^2(n^6 - 1) = n^2(n^3 - 1)(n^3 + 1) = \\ &= n^2(n-1)(n+1)(n^2 + n + 1)(n^2 - n + 1) . \end{aligned}$$

Kuna $72 = 8 \cdot 9$, võime uurida eraldi jaguvust 8-ga ja 9-ga. Kõigepealt näitame, et ülesande avaldis jagub n iga täisarvulise väärtuse korral 9-ga.

Kui $n \vdots 3$, siis $n^2 \vdots 9$. Kui $n \equiv 1 \bmod 3$, siis $n-1 \equiv 0 \bmod 3$ ja $n^2+n+1 \equiv 1+1+1 \equiv 0 \bmod 3$. Kui aga $n \equiv 2 \bmod 3$, siis $n+1 \equiv 0 \bmod 3$ ja $n^2-n+1 \equiv 1-2+1 \equiv 0 \bmod 3$. Seega ülesande avaldis jagub 9-ga tõepoolest iga täisarvu n korral.

Uurime nüüd jaguvust 8-ga.

Kui n on paaritu, on $n-1$ ja $n+1$ paaris, kusjuures üks neist peab jaguma 4-ga, niisiis sel juhul jagub kogu korrutis 8-ga.

Kui $n \vdots 4$, siis $n^2 \vdots 16$, mistõttu kogu korrutis jagub lausa 16-ga ja järelikult ka 8-ga.

Kui aga $n \equiv 2 \bmod 4$, on $n-1, n+1, n^2+n+1$ ja n^2-n+1 paaritud ning n^2 jagub 4-ga, aga mitte 8-ga. Kokkuvõttes on see ainus juht, kus ülesande avaldis ei jagu 72-ga.

21.7 Vastus: $n^4 + n^2 - 2 \vdots 72$ täpselt nende täisarvude n korral, mis ei jagu ei 2-ga ega 3-ga.

Teeme muutujavahetuse $n^2 = m$ ning tegurdame polünoomi $m^2 + m - 2$. Ruutvõrrandit $m^2 + m - 2$ lahendades leiame, et $m_1 = 1$ ning $m_2 = -2$, järelikult

$$\begin{aligned} n^4 + n^2 - 2 &= m^2 + m - 2 = (m-1)(m+2) = (n^2 - 1)(n^2 + 2) = \\ &= (n-1)(n+1)(n^2 + 2) . \end{aligned}$$

Kui n on paarisarv, on $n-1$ ja $n+1$ paaritud; arv $n^2 + 2$ jagub samas 2-ga, aga mitte 4-ga. Niisiis ei saa $n^4 + n^2 - 2$ jaguda 4-ga ega järelikult ka 72-ga.

Kui n jagub 3-ga, ei saa 3-ga jaguda ei $n-1$, $n+1$ ega n^2+2. Järelikult ei saa nende korrutis jaguda 3-ga ega ammugi mitte 72-ga.

Kui n on paaritu, on $n-1$ ja $n+1$ kaks järjestikust paarisarvu, milledest üks peab kindlasti jaguma 4-ga. Järelikult jagub nende korrutis 8-ga.

Kui n ei jagu 3-ga, annab tema ruut 3-ga jagades jäägi 1, seega $n^2 + 2 \vdots 3$. Lisaks peab 3-ga jaguma üks arvudest $n-1$ ja $n+1$. Järelikult $(n-1)(n+1)(n^2+2) \vdots 9$.

Kokkuvõttes, kui n ei jagu ei 2-ga ega 3-ga, jagub $(n-1)(n+1)(n^2+2) = n^4 + n^2 - 2$ arvuga 72.

Teise võimaliku lahenduse annab ülesanne 18.11.

21.8 Vastus: b) kui $n \equiv 0 \bmod 4$ või $n \equiv 3 \bmod 4$.

a) Tegurdame antud polünoomi:

$$n + n^2 + n^3 + n^4 + n^5 + n^6 = (n + n^2)(1 + n^2 + n^4) = n(n+1)(1 + n^2 + n^4)\,.$$

Kuna n ja $n+1$ on järjestikused täisarvud, jagub nende korrutis kindlasti 2-ga. Kui $n \equiv 0 \bmod 3$ või $n \equiv 2 \bmod 3$, jagub korrutis $n(n+1)$ ka 3-ga. Kui aga $n \equiv 1 \bmod 3$, jagub 3-ga $1 + n^2 + n^4$, sest

$$1 + n^2 + n^4 \equiv 1 + 1^2 + 1^4 = 1 + 1 + 1 \equiv 0 \bmod 3\,.$$

Kokkuvõttes peab antud avaldis iga (isegi mittepositiivse) täisarvu n korral 6-ga jaguma.

b) Selleks, et ülesande avaldis jaguks 12-ga peab tema teguritekslahutus lisaks a)-osas tõestatule sisaldama veel ühte tegurit 2. Avaldis $1+n^2+n^4$ on kindlasti paaritu, seega peab täiendav algtegur 2 pärinema kas n või $n+1$ teguritekslahutusest. See on võimalik parajasti siis, kui $n \equiv 0 \bmod 4$ või $n \equiv 3 \bmod 4$.

21.9 Vastus: ei.

Tegurdame avaldise $x^5 - 5x^3 + 4x = x(x^4 - 5x^2 + 4)$. Paneme tähele, et $x^4 - 5x^2 + 4$ on ruutpolünoom x^2 suhtes. Teeme muutujavahetuse $y = x^2$ ja tegurdame polünoomi $y^2 - 5y + 4$. Selleks saame kasutada näiteks teoreemi 10.4. Kuna vaadeldava polünoomi kodajate summa on 0, peab ta jaguma lineaarpolünoomiga $y - 1$. Teise teguri võime leida jagades:

$$\begin{array}{rl}
y^2 - 5y + 4 & = (y-1)(y-4) \\
\underline{-y^2 \quad + y} & \\
-4y + 4 & \\
\underline{4y - 4} & \\
0 &
\end{array}$$

Teine võimalus on muidugi kasutada teoreemi 10.1 ja lahendada ruutvõrrand $y^2 - 5y + 4 = 0$. Selle lahendid tulevad $y_1 = 1$ ja $y_2 = 4$, niisiis saame uuritava ruutpolünoomi tegurdada kujul $a(y - y_1)(y - y_2) = (y-1)(y-4)$.

Asendades tagasi $y = x^2$ näeme, et $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$ ja $x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$ ning kokkuvõttes

$$x^5 - 5x^3 + 4x = (x-1)(x-2)x(x+1)(x+2)\,.$$

Seega täisarvulise x väärtuse korral väljendab $x^5 - 5x^3 + 4x$ viie järjestikuse täisarvu korrutist.

Viiest järjestikusest täisarvust vähemalt üks jagub 4-ga ja vähemalt üks veel 2-ga, niisiis jagub viie järjestikuse täisarvu korrutis alati 8-ga. Järelikult kui $\dfrac{x^5 - 5x^3 + 4x}{100}$ oleks täisarv, peaks ta jaguma 2-ga. 987654321 on aga paaritu.

21.10 Vastus: b) ei.

a) Kui ülesandes esinevad suured ilma nähtava motivatsioonita arvud, siis enamasti polegi konkreetsed arvud olulised ja tegelikult kehtib mingi üldisem väide. Selleks, et üldisemast väitest aimu saada, proovime läbi ülesandes antutega analoogilisi avaldisi, aga väiksemate arvude (praegusel juhul astendajate) korral.

Kõigepealt näeme, et arv n^2+1 ei jagu üldjuhul arvuga $n+1$. Kontranäiteks sobib $n=2$; tõepoolest, $5 \not\vdots\, 3$.

Arv n^4+n^2+1 aga jagub alati arvuga n^2+n+1. Lihtne viis selles veenduda on vaadelda neid avaldisi polünoomidena muutuja n suhtes ning teha läbi vastav jagamistehe (vaata ka ülesannet 10.8):

$$
\begin{array}{rrrrrl}
n^4 & & +n^2 & & +1 & = (n^2+n+1)(n^2-n+1) \\
-n^4 & -n^3 & -n^2 & & & \\
\hline
 & -n^3 & & & & \\
 & n^3 & +n^2 & +n & & \\
\hline
 & & n^2 & +n & +1 & \\
 & & -n^2 & -n & -1 & \\
\hline
 & & & & 0 &
\end{array}
$$

Siit saame püstitada hüpoteesi, et kui ülesande avaldiste pealiikmed on vastavalt n^{4k} ja n^{2k} mingi täisarvu k korral, siis nõutud jaguvusseos kehtib. Saame ka hüpoteesi jagatise kohta – selleks võiks sobida vahelduvate märkidega avaldis $n^{2k}-n^{2k-1}+\ldots-n+1$. Proovime vastavaid avaldisi korrutada, kasutades abivahendina geomeetrilise jada summa valemit (või valemeid jaotisest 10.4).

$$
\begin{aligned}
&(n^{2k}+n^{2k-1}+\ldots+n+1)(n^{2k}-n^{2k-1}+\ldots-n+1) = \\
&= \frac{n^{2k+1}-1}{n-1}\cdot\frac{n^{2k+1}+1}{n+1} = \frac{n^{4k+2}-1}{n^2-1} = \\
&= n^{4k}+n^{4k-2}+\ldots+n^2+1\,,
\end{aligned}
$$

nagu oligi a)-osa tõestuseks vaja, kuivõrd $4040 \,\vdots\, 4$.

b) Näitame, et arv $n^{4k+2}+n^{4k}+\ldots+n^2+1$ ei jagu üldjuhul arvuga $n^{2k+1}+n^{2k}+\ldots+n+1$. Selleks piisab, kui veendume, et jaguvusseos ei kehti $n=2$ korral. Näeme, et

$$2^{2k+1}+2^{2k}+\ldots+2+1 = \frac{2^{2k+2}-1}{2-1} = 2^{2k+2}-1$$

ja

$$2^{4k+2}+2^{4k}+\ldots+2^2+1 = \frac{2^{4k+4}-1}{2^2-1} = \frac{(2^{2k+2}-1)(2^{2k+2}+1)}{3}\,.$$

Niisiis

$$\frac{2^{4k+2}+2^{4k}+\ldots+2^2+1}{2^{2k+1}+2^{2k}+\ldots+2+1} = \frac{2^{2k+2}+1}{3} = \frac{4^{k+1}+1}{3}\,.$$

Kuna $4 \equiv 1 \bmod 3$, siis ka $4^{k+1} \equiv 1 \bmod 3$ ja $4^{k+1}+1 \equiv 2 \bmod 3$. Järelikult pole $\dfrac{4^{k+1}+1}{3}$ täisarv.

21.11 Vastus: ei.

Paneme tähele, et $mn+m+n+1=(m+1)(n+1)$. See tähendab, et me võime ülesande tekstis suurendada kõiki väärtusi 1 võrra, mispeale valitud arvudega lubatud tehe muutub lihtsalt korrutamiseks. Kuna muudetud ülesandes on alguses tahvlil 2 ja 3, saab juurde kirjutada ainult arve kujul 2^a3^b. Kuna aga $2008+1=2009$ ei jagu ei 2 ega 3-ga, ei saa ta mingi arvu lubatud käikude järel tahvlile ilmuda.

21.12 Vastus: 52 on ainus võimalik väärtus.

Paneme tähele, et

$$abc + ab + bc + ca + a + b + c + 1 = (a+1)(b+1)(c+1)\,,$$

niisiis peame uurima võrdust $(a+1)(b+1)(c+1) = 2001$. Kuna $2001 = 3 \cdot 23 \cdot 29$, saavad a, b ja c olla ainult 2, 22 ja 28 mingis järjekorras. Igal juhul $a + b + c = 52$.

21.13 Vastus: $(34,46,57)$, $(46,34,57)$, $(24,276,277)$ ja $(276,24,277)$.

Asendame süsteemi esimesest võrrandist $z = x + y - 23$ teise võrrandisse:

$$\begin{aligned}
x^2 + y^2 - (x+y-23)^2 &= 23\,,\\
x^2 + y^2 - (x^2 + y^2 + 529 + 2xy - 46x - 46y) &= 23\,,\\
46x + 46y - 2xy - 552 &= 0\,,\\
23x + 23y - xy - 276 &= 0\,.
\end{aligned}$$

Paneme tähele, et $-(x-23)(y-23) = -xy+23x+23y-529$. Niisiis on ülal tuletatud võrrand samaväärne võrdusega

$$\begin{aligned}
-(x-23)(y-23) + 529 - 276 &= 0\,,\\
(x-23)(y-23) &= 253\,.
\end{aligned}$$

Kuivõrd $253 = 11 \cdot 23$ ning 11 ja 23 on algarvud, peavad $x-23$ ja $y-23$ olema mingis järjekorras kas 11 ja 23, -11 ja -23, 1 ja 253 või -1 ja -253. Siit saame järgmised võimalused.

- Kui $x = 34, y = 46$ või $x = 46, y = 34$, annab süsteemi esimene võrrand $z = 34 + 46 - 23 = 57$, niisiis saame lahenditeks kolmikud $(34,46,57)$ ja $(46,34,57)$.
- Kui $x = 12, y = 0$ või $x = 0, y = 12$, annab süsteemi esimene võrrand $z = 12 - 23 = -11$, mis pole naturaalarv.
- Kui $x = 24, y = 276$ või $x = 276, y = 24$, annab süsteemi esimene võrrand $z = 300-23 = 277$, kust saame lahenditeks kolmikud $(24,276,277)$ ja $(276,24,277)$.
- Kui $x = 22, y = -230$ või $x = -230, y = 22$, annab süsteemi esimene võrrand $z = -208 - 23 = -231$, mis pole naturaalarv.