2. Langusе printsiip

Naturaalarvude struktuur võimaldab peale matemaatilise induktsiooni kasutada veel mitut huvitavat tõestusmeetodit, mis võistlusülesannete lahendamisel sageli esinevad.

Teoreem 2.1 **(Languse printsiip, esimene variant)** Igas mittetühjas naturaalarvude hulga alamhulgas on olemas vähim element.

Tõestus. Tõestame tugeva matemaatilise induktsiooni abil n järgi väite “Kui mingis naturaalarvude hulga alamhulgas leidub naturaalarv n, siis leidub selles hulgas ka vähim element”.

Kui $n = 0$, siis on väide ilmne, sest kui mingis naturaalarvude hulga alamhulgas leidub arv 0, siis peab see olema vähim, sest väiksemat naturaalarvu pole olemas. Induktsiooni baas on sellega kontrollitud.

Kehtigu nüüd tõestatav väide kõigi naturaalarvude $0, 1, \ldots, k$ jaoks. Vaatleme suvalist hulka $A \subset \mathbb{N}$ nii, et $k+1 \in A$. On kaks võimalust. Kui $k+1$ on hulga A vähim element, siis me oleme leidnud hulga A vähima elemendi. Kui aga hulgas A leidub element, mis on väiksem kui $k+1$, siis peab selles hulgas induktsiooni eelduse järgi leiduma ka vähim element. Induktsiooni samm on sellega tehtud.

Jääb üle tähele panna, et igas mittetühjas naturaalarvude hulgas peab kindlasti mõni naturaalarv leiduma, järelikult peab seal äsjatõestatud väite alusel leiduma ka vähim element. □

Lihtne on näha, et teoreemi 2.1 väide ei kehti, kui vaadelda täisarve, ratsionaalarve või reaalarve, sest näiteks täisarvude hulgas $\mathbb{Z}$ endas pole vähimat elementi.

Pealtnäha võib tunduda, et teoreemi 2.1 väide on triviaalne, sest me saame ju naturaalarvude hulga alamhulga elemendid lihtsalt läbi vaadata. Tõepoolest, lõplike alamhulkade puhul on see nii, aga languse printsiibi teeb huvitavaks just juhtum, kus vaadeldav alamhulk on lõpmatu.

Ülesanne 2.1 (Piirkonnavoor 2009, 12. klass) Koordinaattasandi igasse täisarvuliste koordinaatidega punkti kirjutatakse üks arv, kusjuures need arvud ei ole kõik võrdsed ning igaüks neist arvudest on oma nelja lähima naaberpunkti arvude aritmeetiline keskmine. Kas on võimalik, et

a) kõik kirjutatud arvud on täisarvud;

b) kõik kirjutatud arvud on naturaalarvud?

Lahendus. Vastus: a) jah; b) ei.

a) Sobib näiteks konstruktsioon, kus igasse täisarvuliste koordinaatidega punkti (x, y) kirjutatakse summa $x + y$. Siis ilmselt pole kõik arvud võrdsed. Punkti (x, y) kahte naaberpunkti kirjutatakse arv $x + y + 1$ ja kahte naaberpunkti arv $x + y - 1$. Nenede nelja arvu aritmeetiline keskmine on parajasti $x + y$.

b) Oletame, et nõutav konstruktsioon on naturaalarvude puhul võimalik. Siis minimaalsuse printsiibi põhjal peab punktidesse kirjutatud naturaalarvude seas leiduma vähim; olgu see n, mis asub punktis A. Kuna kõik arvud ei ole võrdsed, peab leiduma ka mõni n-ist suurem arv m punktis B.

Vaatleme suvalist naaberpunkte ühendavatest lõikudest moodustatud teed puntist A punkti B. Sellel teel peab leiduma lõik, kus me liigume punktist arvuga n punkti arvuga $m_1 > n$; olgu need punktid vastavalt C ja D. Olgu C ülejäänud kolmes naaberpunktis arvud m_2, m_3, m_4. Siis arvu n valiku tõttu $m_2, m_3, m_4 \geqslant n$. Nüüd aga saame

$$\frac{m_1 + m_2 + m_3 + m_4}{4} > n\,,$$

mis on vastuolu ülesande tingimustega. Järelikult pole nõutud konstruktsioon naturaalarvude korral võimalik.

Languse printsiibil on olemas ka teine võimalik variant, mida võistlusülesannetes samuti tihti vaja läheb.

Teoreem 2.2 **(Languse printsiip, teine variant)** Pole olemas lõpmatut rangelt kahanevat naturaalarvude jada.

Tõestus. Oletame vastuväiteliselt, et leidub lõpmatu naturaalarvude jada $a_1, a_2, a_3, \ldots$ nii, et

$$a_1 > a_2 > a_3 > \ldots.$$

Vaatleme hulka $A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$ ja näitame, et selles ei leidu vähimat elementi. Tõepoolest, ükski $a_k \in A$ ei saa olla vähim, sest leidub $a_{k+1} < a_k$. See aga on vastuolus teoreemiga 2.1. Järelikult ei saa lõpmatut rangelt kahanevat naturaalarvude jada olemas olla. □

Jällegi näeme, et ei täis-, ratsionaal-, ega reaalarvude puhul teoreem 2.2 ei kehtiks, sest on olemas näiteks jadad $-1, -2, -3, \ldots$ ja $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$.

Languse printsiibi teist varianti kasutatakse võistlusülesannetes sageli tõestamiseks, et vaadeldav protsess on lõplik. Selleks tuleb leida mingi naturaalarvuline suurus, mis protsessi käigus rangelt kahaneb. Niisugust suurust nimetatakse sageli *poolinvariandiks*.

Ülesanne 2.2 (Lõppvoor 2015, 11. klass)

a) Tiinal on vihikusse kirjutatud mingi positiivne täisarv. Matemaatika harjutamiseks kirjutab ta iga päev sellesse vihikusse juurde eelmise arvu numbrite korrutise. Tõesta, et alates mingist päevast kirjutab ta üht ja sama arvu.

b) Kas sama väide kehtib sõltumata algsest arvust ka juhul, kui Tiina korrutab iga kord eelmise arvu numbrite korrutise veel ka 2-ga?

Lahendus. Vastus: b) ei.

a) Näitame, et kui Tiinal on vihikus vähemalt kahekohaline arv, siis ta kirjutab järgmiseks rangelt väiksema arvu. Olgu Tiinal arv $\overline{a_1 a_2 \ldots a_k}$ (kus $k \geqslant 2$), siis järgmisel päeval kirjutab ta $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_k$. Võrdelme neid kahte arvu:

$$\overline{a_1 a_2 \ldots a_k} = a_1 10^{k-1} + a_2 10^{k-2} + \ldots + a_k 10^0 \geqslant a_1 10^{k-1} > a_1 9^{k-1} \geqslant a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_k,$$

sest arvu kümnendnumbrid saavad olla võrdsed ülimalt 9-ga. Niisiis oleme tõestanud võrratuse $\overline{a_1 a_2 \ldots a_k} > a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_k$. Kuna languse printsiibi põhjal ei saa olla lõpmatult kahanevat positiivsete täisarvude jada, peab see protsess üks kord lõppema, mis tähendab, et Tiina peab lõpuks jõudma ühekohalise arvuni. Seda arvu ta sellest päevast alates kirjutama jääbki.

b) Alustades näiteks 1-st, saame jada $1, 2, 4, 8, 16, 12, 4, 8, \ldots$. Seega jäävad arvud $4, 8, 16, 12$ tsüklisse.

Ülesanded

Ülesanne 2.3 (Talvine lahtine võistlus 2016, noorem rühm) Elektriskeemis on lõplik arv lampe. Mõned lampide paarid on juhet pidi otseühenduses. Iga lamp põleb kas punaselt või siniselt. Ühe lülitusega muudavad korraga värvi (punasest siniseks või vastupidi) kõik need lambid, mis on otseühenduses mõne teist värvi lambiga. Tõesta, et mingi arvu lülituste järel on kõigi lampide värvid samad, mis kaks lülitust enne seda.

Ülesanne 2.4 (Sügisene lahtine võistlus 2021, vanem rühm) Leia kõik täisarvud a, mille korral a^2 ei sisalda muid numbreid peale 0 ja 2.

Ülesanne 2.5 (Piirkonnavoor 2012, 12. klass) Seina peal on üksteise kõrval reas teatav arv nuppe. Alati, kui mõni nupp alla vajutada, jääb see nupp alla ning kõik temast paremal asuvad nupud liiguvad üles. Pipi ja Kange Adolf vajutavad kordamööda nuppe, mis pole parajasti all. Alustab Pipi ja see, kes ei saa enam käiku teha, kaotab. Alguses on kõik nupud üleval. Kas kellelgi nendest mängijatest leidub võitev strateegia ja kui leidub, siis kellel?

Ülesanne 2.6 (Lõppvoor 1998, 10. klass) Paberile on märgitud lõplik arv siniseid ja punaseid punkte ning mõned neist punktidest on omavahel ühendatud joontega. Nimetame punkti P eriliseks, kui rohkem kui pooled punktiga P ühendatud punktidest on teist värvi kui punkt P. Juku valib ühe erilise punkti ja muudab selle värvi vastupidiseks. Seejärel valib Juku uue erilise punkti ja muudab selle värvi, jne. Tõesta, et lõpliku arvu ümbervärvimiste järel jõuab Juku olukorrani, kus paberil pole ühtegi erilist punkti.

Ülesanne 2.7 (Kevadine lahtine võistlus 2004, vanem rühm) Ruudustikus suurusega $n \times n$ värvitakse algul mingid k ruutu roheliseks. Edaspidi võib igal sammul värvida roheliseks ühe sellise ruudu, mille naaberruutudest (s.t. temaga ühist külge omavatest ruutudest) vähemalt kaks on juba rohelised. Millise vähima k korral on alguses värvitavad k ruutu võimalik valida nii, et järgnevate sammudega saab kogu ruudustiku roheliseks värvida?

Ülesanne 2.8 (Sügisene lahtine võistlus 2020, vanem rühm) Olgu n fikseeritud positiivne täisarv. Leia kõik täisarvude kolmikud (a, b, c), mis rahuldavad võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} a^{n+3} + b^{n+2}c + c^{n+1}a^2 + a^n b^3 = 0, \\ b^{n+3} + c^{n+2}a + a^{n+1}b^2 + b^n c^3 = 0, \\ c^{n+3} + a^{n+2}b + b^{n+1}c^2 + c^n a^3 = 0. \end{cases}$$

Languse printsiip leiab kasutamist ka ülesannete 4.7, 3.5, 3.7, ja 35.6 lahendustes.

Lahendused

2.3 Kui protsessi mingil sammul on mõne juhtme otsa ühendatud lambid eri värvi, siis jäävad nad erivärvilisteks kogu ülejäänud protsessi ajaks. Seega saab ühevärviliste otstega juhtmete arv protsessi käigus ainult kasvada, sama värvi otstega juhtmete arv aga ainult kahaneda.

See kahanemine ei pruugi olla range – mõnel protsessi sammul võib sama värvi otstega juhtmete arv jääda samaks ja siis paari sammu pärast jälle edasi kahaneda. Küll aga saame moodustada rangelt kahaneva jada, võttes protsessi käigus esinevad sama värvi otstega juhtmete arvud igaühe ainult ühe korra. See jada ei saa languse printsiibi põhjal olla lõpmatu, niisiis peab protsessis leiduma koht, millest alates sama värvi otstega juhtmete arv (ja järelikult ka eri värvi otstega juhtmete arv) enam ei muutu.

Siit järeldub omakorda, et eri värvi ja sama värvi otstega juhtmete hulgad enam ei muutu. Seega jäävad sama värvi juhtmete otsas olevate lampide värvid püsima, eri värvi otstega juhtmete otsa ühendatud lambid aga hakkavad igal sammul värvi vahetama. Tulemusena hakkab lampide värvikombinatsioon korduma tsüklis pikkusega 1 või 2.

2.4 Vastus: 0.

On selge, et mõtet on vaadelda ainult mittenegatiivseid täisarve, ning et täisarvud $1, 2, \ldots, 9$ ei rahulda ülesande tingimust. Niisiis kui $a \neq 0$, peab ta ise olema vähemalt 2- ja tema ruut vähemalt 3-kohaline.

Olgu a vähim positiivne täisarv, mis ülesande tingimusi rahuldab (see leidub languse printsiibi põhjal!) ning vaatleme arvu a^2 kahte viimast numbrit. On selge, et ükski täisruut ei saa lõppeda numbritega 02 ega 22, sest see täisruut jaguks siis 2-ga, aga mitte 4-ga. Samuti ei saa a^2 lõpus olla 20, sest siis jaguks ta 5-ga, aga mitte 25-ga. Niisiis on ainus võimalus, et a^2 lõppeb numbritega 00, st $a^2 \vdots 100$ ehk $a \vdots 10$. Sel juhul aga oleks $\frac{a}{10}$ samuti täisarv, mis rahuldaks ülesande tingimusi. Kuna $\frac{a}{10} < a$, aga a oli vähim positiivne lahend, oleme saanud vastuolu langusprintsiibiga. Järelikult ei saa ülesandel positiivseid lahendeid olla.

See ülesanne on erijuht ülesandest 19.5, mis annab ka teise võimaliku lahenduse.

2.5 Vastus: Pipil kui mängu alustajal leidub võitev strateegia.

Näitame kõigepealt, et mäng ei saa kesta igavesti. Nimetame seisu *väärtuseks* naturaalarvu, mille saame, kui interpreteerime seda seisu kahendarvuna, kus all asuv nupp tähistab 0-i ja üleval asuv nupp 1-te. Algseisu väärtuseks on siis näiteks $\underbrace{111\ldots1}_{n}{}_2 = 2^n - 1$, kus n on lampide arv seinal. Lõppseis, kus kumbki enam käiku teha ei saa, omab väärtust $\underbrace{000\ldots0}_{n}{}_2 = 0$.

Tõestame, et seisu väärtus kahaneb mängu käigus rangelt. Valigu mängija alla vajutamiseks nupu, mille järjekorranumber paremalt lugedes on i. Kahendesituses vastab sellele nupule siis 2^{i-1}, järelikult vähendab mängija nuppu alla vajutades seisu väärtust 2^{i-1} võrra. Mõned väiksema järjekorranumbriga nupud võivad ka alt üles tõusta, suurendades sellega seisu väärtust maksimaalselt

$$2^0 + 2^1 + \ldots + 2^{i-2} = 2^{i-1} - 1$$

võrra. Seega kahaneb seisu väärtus iga käiguga vähemalt 1 võrra ja languse printsiibi põhjal ei saa mäng kesta igavesti.

Kuna viigid pole selles mängus võimalikud, leidub ühel mängijatest võitev strateegia (vt teoreem 4.1).

Kui võitvaks avakäiguks osutub mõne nupu allavajutamine vasakspoolse $n-1$ nupu seast, siis on alustajal (Pipil) võitev strateegia olemas. Kui aga kõik vasakpoolsed $n-1$ nuppu on avakäiguna kaotavad, sobib võitvaks avakäiguks kõige parempoolsema nupu allavajutamine.

Tõepoolest, Kangele Adolfile jääb siis valik vasakspoolse $n-1$ nupu seast. Tema käigu järel tekib sama seis, mis oleks tekkinud sama nupu allavajutamisel algseisust, sest kõige parempoolsem nupp tõuseb üles tagasi. Seega on kõik Kange Adolfi käigud kaotavad, mistõttu Pipi võidab.

2.6 Nimetame eri värvi otspunktidega jooni *erivärvilisteks* ja näitame, et erivärviliste joonte arv kahaneb protsessi käigus rangelt.

Vaatleme suvalist erilist punkti P, olgu ta üldisust kitsendamata punane. Olgu punkt P ühendatud a punase ja b sinise punktiga. Siis erilise punkti definitsiooni põhjal $a < b$ ja erivärvilisi jooni, mille üks otspunkt on P, leidub b tükki. Pärast punkti P siniseks värvimist jääb otspunktiga P erivärvilisi jooni alles a tükki. Kuna teised erivärvilised jooned ei muutunud, väheneb erivärviliste joonte arv sellise sammu tulemusel $b - a > 0$ võrra.

Languse printsiibi põhjal järeldub nüüd, et ülesandes kirjeldatud protsess protsess peab lõpliku arvu sammude järel lõppema. See aga tähendab, et erilisi punkte ei saa enam alles jääda, sest muidu oleks võimalik teha veel üks samm.

2.8 Vastus: ainus lahend on $(0,0,0)$.

Ülesande võrrandisüsteem näeb esimesel pilgul hirmuäratav välja, aga ärgem laskem end sellest hirmutada.

Paneme tähele, et kõik süsteemi võrrandid on *homogeensed*, st kõigi üksliikmete astmed on samad (praegusel juhul $n+3$). See tähendab, et kui mingi arvukolmik (a,b,c) on niisuguse võrrandi lahendiks, on seda ka kolmik $(k\cdot a, k\cdot b, k\cdot c)$ suvalise reaalarvu k korral. Järelikult kui a, b ja c on antud süsteemi täisarvulised lahendid ning meil õnnestub leida täisarv d nii, et $a \vdots d$, $b \vdots d$ ja $c \vdots d$, siis saame konstrueerida teise täisarvulise lahendikolmiku $\left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}, \frac{c}{d}\right)$.

Oletame, et ülesande süsteemil leidub niisugune täisarvuline lahend (a,b,c), et neist mõne arvu absoluutväärtus on vähemalt 2; olgu selleks arvuks üldisust kitsendamata a. Arvul a peab siis leiduma mingi algarvuline jagaja p. Süsteemi esimese võrrandi neljast üksliikmest kolm jaguvad a-ga ja järelikult ka p-ga. Niisiis peab p-ga jaguma ka neljas üksliige $b^{n+2}c$, millest järeldub, et p-ga jagub kas b või c. Mõlemal juhul saame süsteemi teisest või kolmandast võrrandist, et ka teine neist arvudest jagub p-ga. Järelikult on ka $\left(\frac{a}{p}, \frac{b}{p}, \frac{c}{p}\right)$ antud süsteemi täisarvuline lahend, kusjuures $\left|\frac{a}{p}\right| < |a|$.

Kui ka saadud kolmikus on mõni arv, mille absoluutväärtus on suurem kui 1, saame sama operatsiooni korrata ja lahendikolmiku liikmete absoluutväärtusi vähendada. Kuna täisarvude absoluutväärtused on naturaalarvud, ei saa see protsess languse printsiibi alusel lõpmatuseni kesta. Järelikult peame välja jõudma lahendini, kus esinevad ainult arvud -1, 0 ja 1.

Vaatleme kõigepealt olukorda, kus mõni arvudest a, b ja c on 0; olgu selleks jälle üldisust kitsendamata a. Sel juhul saame esimesest võrrandist, et $b^{n+2}c = 0$, järelikult kas $b = 0$ või $c = 0$. Mõlemal juhul saame teistest võrranditest, et ka teine neist arvudest peab olema 0. Vahetu kontroll näitab, et lahend $(0, 0, 0)$ sobib. Lisaks on selge, et ülalkirjeldatud protsess saab selle lahendini jõuda ainuilt siis, kui meil juba alguses oli kolmik $(0, 0, 0)$.

Niisiis jääb vaadelda ainult juht, kus $a, b, c \in \{-1, 1\}$. Kui n on paarisarv, teiseneb ülesande süsteem kujule

$$\begin{cases} a + c + c + b = 0, \\ b + a + a + c = 0, \\ c + b + b + a = 0, \end{cases}$$

mille ainus lahend on $a = b = c = 0$; vastuolu. Kui n on paaritu, teiseneb ülesande süsteem kujule

$$\begin{cases} 1 + bc + 1 + ab = 0, \\ 1 + ca + 1 + bc = 0, \\ 1 + ab + 1 + ca = 0. \end{cases}$$

Kuna $a, b, c \in \{-1, 1\}$, saavad need võrdused kehtida ainult siis, kui $ab = bc = ca = -1$. Niisiis peavad a ja b olema erimärgilised, b ja c olema erimärgilised ning c ja a olema erimärgilised. See aga pole võimalik.

Kokkuvõttes on ainsaks lahendiks $(0, 0, 0)$.