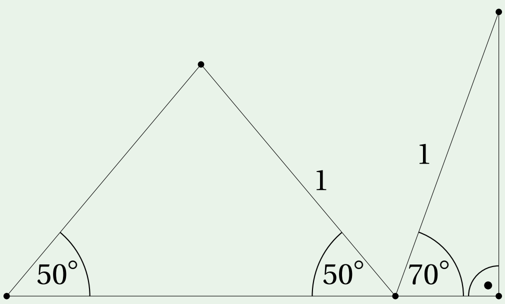
# 18. Trigonomeetria

Matemaatikavõistlustel antavad trigonomeetriaülesanded ei nõua iseenesest muid teadmisi peale koolitunnis õpitud põhivalemite, aga see, milliseid valemeid ja millises järjekorras kasutada, pole sugugi alati ilmne. Siinkohal aitab ainult kogemus, mida omakorda saab omandada ainult harjutamisega. Niisiis – harjutagem!

## Ülesanded

**Ülesanne 18.1** (Lõppvoor 1995, 11. klass) Kasutades joonist tõesta, et

$$\tan 30^\circ = \frac{\sin 70^\circ}{2\cos 50^\circ + \cos 70^\circ}.$$




**Ülesanne 18.2** (Piirkonnavoor 2013, 11. klass) Nurk $\alpha$ rahuldab tingimust $\cos\alpha = \tan\alpha$. Leia avaldise $\sin\alpha$ kõik võimalikud väärtused.

**Ülesanne 18.3** (Piirkonnavoor 1999, 12. klass) Olgu $x$ ja $y$ teravnurgad ning $\sin x + \sin y = \cos x + \cos y$. Tõesta, et $x + y = 90^\circ$.

**Ülesanne 18.4** (Piirkonnavoor 2015, 12. klass) Leia avaldise $\sin x$ võimalikud väärtused, kui $\cos 4x = \cos^4 x$.

**Ülesanne 18.5** (Piirkonnavoor 2022, 12. klass) Leia kõik nurgad $\alpha$, mille korral $0^\circ < \alpha <$

180° ja kehtib võrdus

$$4\cos\alpha = 1 + \cos\alpha + \cos^2\alpha + \cos^3\alpha + \ldots$$

(võrduse paremal pool on lõpmatu summa).

**Ülesanne 18.6** (Talvine lahtine võistlus 2011, vanem rühm) Reaalarvude $a, b, c$ ja mingi nurga $\varphi$ korral kehtib võrdus

$$a\sin\varphi + b\cos\varphi = c\,.$$

Tõesta, et $c^2 \leqslant a^2 + b^2$.

**Ülesanne 18.7** (Lõppvoor 1994, 10. klass) Nurgad $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ rahuldavad tingimusi $0^\circ < \alpha, \beta, \gamma, \delta < 90^\circ$, $\sin\alpha = \dfrac{\sin\beta}{\sin\gamma}$ ja $\sin\delta = \dfrac{\tan\beta}{\tan\gamma}$. Tõesta, et $\tan\alpha = \dfrac{\tan\delta}{\cos\gamma}$.

**Ülesanne 18.8** (Piirkonnavoor 2016, 12. klass) Olgu $\alpha, \beta, \gamma$ kolmnurga nurgad. Tõesta, et

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma = 1\,.$$

**Ülesanne 18.9** (Lõppvoor 2021, 11. klass) Tõesta, et

$$\sin 10^\circ \cdot \cos 20^\circ \cdot \sin 30^\circ \cdot \cos 40^\circ \cdot \sin 50^\circ \cdot \cos 60^\circ \cdot \sin 70^\circ \cdot \cos 80^\circ = \frac{1}{256}\,.$$

**Ülesanne 18.10** (Lõppvoor 2000, 12. klass) Tõesta, et suvalise kolmnurga korral kehtib võrdus

$$a \cdot \cos(\beta+\gamma) + b \cdot \cos(\gamma+\alpha) + c \cdot \cos(\alpha-\beta) = 0\,,$$

kus $a, b, c$ on kolmnurga küljepikkused ja $\alpha, \beta, \gamma$ vastavalt nende külgede vastasnurkade suurused.

**Ülesanne 18.11** (Lõppvoor 2012, 12. klass)

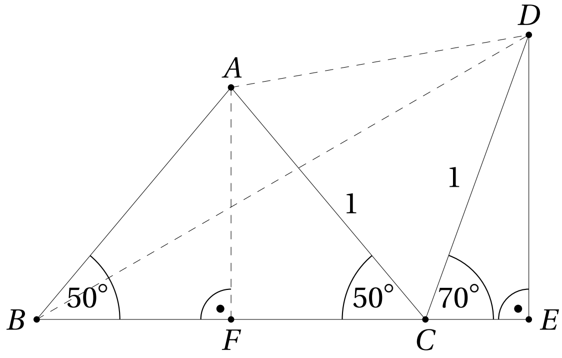
a) Tõesta, et iga reaalarvu $x$ korral võrdub arvude $\sqrt{1+\sin x}$ ja $\sqrt{1-\sin x}$ aritmeetiline keskmine ühega arvudest $\sin\frac{x}{2}, \cos\frac{x}{2}, -\sin\frac{x}{2}, -\cos\frac{x}{2}$.

b) Kas a)-osa lõpus loetletud neljast arvust saab mõne ära jätta nii, et väide jääks kehtima?

# Lahendused

18.1 Lahenduse ideeks on leida jooniselt täisnurkne kolmnurk teravnurga suurusega 30°.

Tähistame punktid nii nagu näidatud joonisel. Lisaks ülesandes antud punktidele olgu $F$ võrdhaarse kolmnurga $ABC$ tipust tõmmatud kõrguse aluspunkt, mis muuhulgas poolitab külje $BC$ (vaata teoreemi 33.1). Õiget kolmnurka aitavad leida tähelepanekud $|DE| = \sin 70^\circ$, $|CE| = \cos 70^\circ$ ja $BC = 2|FC| = 2\cos 50^\circ$.




Kuna $|AC| = |CD| = 1$ ning $\angle ACD = 180^\circ - 50^\circ - 70^\circ = 60^\circ$, on $ACD$ võrdkülgne kolmnurk küljepikkusega 1; järelikult $|AD| = 1$. Teisest küljest, kuna $\angle ABC = \angle BCA$, on kolmnurk $ABC$ võrdhaarne, mistõttu ka $|AB| = |AC| = 1$.

Kokkuvõttes on ka kolmnurk $ABD$ võrdhaarne tipunurgaga $\angle DAB = \angle DAC + \angle CAB = 60^\circ + 80^\circ = 140^\circ$ ja alusnurgaga $\angle ABD = \frac{180^\circ - 140^\circ}{2} = 20^\circ$. Järelikult $\angle DBE = \angle ABC - \angle ABD = 50^\circ - 20^\circ = 30^\circ$ ja $DBE$ sobibki otsitavaks täisnurkseks kolmnurgaks.

Nüüd saame

$$\tan 30^\circ = \tan \angle DBE = \frac{|DE|}{|BE|} = \frac{|DE|}{|BC| + |CE|} = \frac{\sin 70^\circ}{2\cos 50^\circ + \cos 70^\circ},$$

nagu ülesandes nõutud.

18.2 Vastus: $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

Teisendame ülesande võrdust:

$$\begin{aligned}
\cos\alpha &= \tan\alpha\,,\\
\cos\alpha &= \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\,,\\
\cos^2\alpha &= \sin\alpha\,,\\
1 - \sin^2\alpha &= \sin\alpha\,,\\
\sin^2\alpha + \sin\alpha - 1 &= 0\,.
\end{aligned}$$

Saime ruutvõrrandi $\sin\alpha$ suhtes, mille lahendamine annab $\sin\alpha = \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$. Kuna $\frac{-1-\sqrt{5}}{2} < -1$, sobib $\sin\alpha$ väärtuseks ainult $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

18.3 Teisendame ülesande võrrandit:

$$\begin{aligned}
\sin x + \sin y &= \cos x + \cos y\,,\\
\sin x - \cos x &= \cos y - \sin y\,,\\
(\sin x - \cos x)^2 &= (\cos y - \sin y)^2\,,\\
\sin^2 x - 2\sin x\cos x + \cos^2 x &= \cos^2 y - 2\sin y\cos y + \sin^2 y\,,\\
1 - \sin 2x &= 1 - \sin 2y\,,\\
\sin 2x &= \sin 2y\,.
\end{aligned}$$

Kuna $x$ ja $y$ on teravnurgad, kuuluvad $2x$ ja $2y$ vahemikku $(0°;180°)$. Selles vahemikus saavad siinused võrduda kahel juhul: kas $2x = 2y$ või $2x+2y = 180°$. Teisel juhul saame kohe, et $x+y = 90°$. Esimesel juhul aga $x = y$, mis ülesande võrrandisse asendades annab $2\sin x = 2\cos x$ ehk $\sin x = \cos x$. Siinus- ja koosinusfunktsiooni graafikud lõikuvad vahemikus $(0°;90°)$ ainult siis, kui $x = 45°$. Järelikult ka sel juhul $x+y = 45°+45° = 90°$.

18.4 Vastus: sobivad väärtused on 0, $\sqrt{\frac{6}{7}}$ ja $-\sqrt{\frac{6}{7}}$.

Avaldame

$$\begin{aligned}\cos 4x = \cos^2 2x - \sin^2 2x &= (\cos^2 x - \sin^2 x)^2 - (2\sin x\cos x)^2 = \\ &= \cos^4 x - 2\sin^2 x\cos^2 x + \sin^4 x - 4\sin^2 x\cos^2 x = \\ &= \cos^4 x + \sin^4 x - 6\sin^2 x\cos^2 x\,.\end{aligned}$$

Kuna $\cos 4x = \cos^4 x$, saame võrrandi

$$\begin{aligned}\sin^4 x - 6\sin^2 x\cos^2 x &= 0\,,\\ \sin^2 x(\sin^2 x - 6\cos^2 x) &= 0\,,\\ \sin^2 x(\sin^2 x - 6(1-\sin^2 x)) &= 0\,,\\ \sin^2 x(7\sin^2 x - 6) &= 0\,.\end{aligned}$$

Viimane võrdus kehtib parajasti siis, kui $\sin x = 0$, $\sin x = \sqrt{\frac{6}{7}}$ või $\sin x = -\sqrt{\frac{6}{7}}$. Kõik need arvud sobivad tõepoolest siinusfunktsiooni väärtusteks.

18.5 Vastus: $\alpha = 60°$.

Tingimuse $0° < \alpha < 180°$ tõttu teame, et $|\cos\alpha| < 1$. Järelikult on ülesande võrduse paremal pool hääbuv geomeetriline jada esimese liikmega 1 ja teguriga $\cos\alpha$. Niisiis

$$1+\cos\alpha+\cos^2\alpha+\cos^3\alpha+\ldots = \frac{1}{1-\cos\alpha}$$

ja ülesande võrrand teiseneb kujule

$$\begin{aligned}4\cos\alpha &= \frac{1}{1-\cos\alpha}\,,\\ 4\cos\alpha - 4\cos^2\alpha &= 1\,,\\ 4\cos^2\alpha - 4\cos\alpha + 1 &= 0\,,\\ (2\cos\alpha - 1)^2 &= 0\,.\end{aligned}$$

Viimane võrdus kehtib parajasti siis, kui $\cos\alpha = \frac{1}{2}$. Arvestades tingimust $0° < \alpha < 180°$, on ainsaks võimaluseks $\alpha = 60°$.

18.6 Tõstame antud võrduse mõlemad pooled ruutu:

$$\begin{aligned}c^2 &= a^2\sin^2\varphi + 2ab\sin\varphi\cos\varphi + b^2\cos^2\varphi \leqslant \\ &\leqslant a^2\sin^2\varphi + a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi = \\ &= a^2(\sin^\varphi + \cos^2\varphi) + b^2(\sin^\varphi + \cos^2\varphi) = a^2+b^2\,.\end{aligned}$$

Kasutatud võrratus $2ab\sin\varphi\cos\varphi \leqslant a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi$ on samaväärne võrratusega $0 \leqslant (a\cos\varphi - b\sin\varphi)^2$, mis ilmselt kehtib.

18.7 Ega selle ülesande lahenduses muud kunsti ei olegi kui hakata antud võrdusi teisendama, üritades teisendussammudega tõestatavale võrdusele lähemale liikuda. Paneme tähele, et vahemikus $(0°; 90°)$ on siinus, koosinus ja tangens määratud, kusjuures kõik vastavad väärtused on positiivsed. Niisiis ei pea me trigonomeetriliste funktsioonide väärtustega jagades muretsema nulliga jagamise pärast, samuti ei teki probleeme avaldisi ruutu tõstes ja ruutjuurides.

Tõestatavas võrduses esinevad nurgad $\alpha, \gamma$ ja $\delta$. Püüame antud võrdustest tuletada avaldise, mis neid nurki sisaldaks. Jagame teise võrduse esimesega:

$$\frac{\sin\delta}{\sin\alpha} = \frac{\tan\beta}{\tan\gamma} \cdot \frac{\sin\gamma}{\sin\beta} = \frac{\cos\gamma}{\cos\beta},$$
$$\frac{\sin\delta}{\sin\alpha \cdot \cos\gamma} = \frac{1}{\cos\beta}.$$

Näeme, et ka tõestatavast võrdusest saab eraldada viimase võrduse vasaku poole avaldise:

$$\tan\alpha = \frac{\tan\delta}{\cos\gamma},$$
$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\sin\delta}{\cos\gamma \cdot \cos\delta},$$
$$\frac{\cos\delta}{\cos\alpha} = \frac{\sin\delta}{\sin\alpha \cdot \cos\gamma}.$$

Niisiis piisab ülesande lahendamiseks tõestada võrdus $\frac{\cos\delta}{\cos\alpha} = \frac{1}{\cos\beta}$ ehk $\cos\delta \cdot \cos\beta = \cos\alpha$. Avaldame $\cos\delta$ ülesandes antud võrduste abil:

$$\cos\delta = \sqrt{1-\sin^2\delta} = \sqrt{1-\frac{\tan^2\beta}{\tan^2\gamma}} = \sqrt{1-\frac{\sin^2\beta}{\sin^2\gamma} \cdot \frac{\cos^2\gamma}{\cos^2\beta}} = \sqrt{1-\sin^2\alpha \cdot \frac{\cos^2\gamma}{\cos^2\beta}} =$$
$$= \sqrt{\frac{\cos^2\beta - \sin^2\alpha \cdot \cos^2\gamma}{\cos^2\beta}} = \frac{\sqrt{\cos^2\beta - \sin^2\alpha \cdot \cos^2\gamma}}{\cos\beta}.$$

Niisiis jääb tõestada võrdus

$$\sqrt{\cos^2\beta - \sin^2\alpha \cdot \cos^2\gamma} = \cos\alpha,$$
$$\cos^2\beta - \sin^2\alpha \cdot \cos^2\gamma = \cos^2\alpha,$$
$$\cos^2\beta - \sin^2\alpha \cdot \cos^2\gamma = 1 - \sin^2\alpha,$$
$$\sin^2\alpha - \sin^2\alpha \cdot \cos^2\gamma = 1 - \cos^2\beta,$$
$$\sin^2\alpha \cdot (1-\cos^2\gamma) = 1 - \cos^2\beta,$$
$$\sin^2\alpha \cdot \sin^2\gamma = \sin^2\beta.$$

Viimane võrdus aga kehtib, sest ta järeldub otse ülesandes antud seosest $\sin\alpha = \frac{\sin\beta}{\sin\gamma}$.

18.8 Kuna $\alpha, \beta, \gamma$ on kolmnurga nurgad saame ühest muutujast (olgu see näiteks $\gamma$) lahti asendusega $\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta)$. Teisendame ülesande avaldist:

$$
\begin{aligned}
&\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma = \\
&= \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2(180^\circ - (\alpha+\beta)) + 2\cos\alpha\cos\beta\cos(180^\circ - (\alpha+\beta)) = \\
&= \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2(\alpha+\beta) - 2\cos\alpha\cos\beta\cos(\alpha+\beta) = \\
&= \cos^2\alpha + \cos^2\beta + (\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta)^2 - \\
&\quad - 2\cos\alpha\cos\beta(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) = \\
&= \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\alpha\cos^2\beta - 2\cos\alpha\cos\beta\sin\alpha\sin\beta + \sin^2\alpha\sin^2\beta - \\
&\quad - 2\cos^2\alpha\cos^2\beta + 2\cos\alpha\cos\beta\sin\alpha\sin\beta = \\
&= \cos^2\alpha + \cos^2\beta - \cos^2\alpha\cos^2\beta + \sin^2\alpha\sin^2\beta = \\
&= \cos^2\alpha(1 - \cos^2\beta) + \cos^2\beta + \sin^2\alpha\sin^2\beta = \\
&= \cos^2\alpha\sin^2\beta + \cos^2\beta + \sin^2\alpha\sin^2\beta = \\
&= \sin^2\beta(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) + \cos^2\beta = \\
&= \sin^2\beta + \cos^2\beta = 1\,.
\end{aligned}
$$

Teisendus näeb esimesel hetkel välja pikk ja natuke hirmuäratavgi, aga tegelikult pole tarvis teada muud kui nurkade summa koosinuse valemit ning seda, et sama nurga siinuse ja koosinuse ruutude summa on 1. Peamine on poole teisenduse peal mitte alla anda, uskudes, et ükskord peab see töö ju sihile viima!

18.9 Paneme kõigepealt tähele, et $\sin 30^\circ = \cos 60^\circ = \dfrac{1}{2}$, seega piisab tõestada võrdus

$$\sin 10^\circ \cdot \cos 20^\circ \cdot \cos 40^\circ \cdot \sin 50^\circ \cdot \sin 70^\circ \cdot \cos 80^\circ = \frac{1}{64}\,.$$

Järgmiseks paneme tähele, et $\sin 10^\circ = \cos 80^\circ$, $\cos 20^\circ = \sin 70^\circ$ ja $\cos 40^\circ = \sin 50^\circ$, seega piisab tõestada võrdus

$$\cos 20^\circ \cdot \cos 40^\circ \cdot \cos 80^\circ = \frac{1}{8} \quad \text{ehk} \quad 8 \cdot \cos 20^\circ \cdot \cos 40^\circ \cdot \cos 80^\circ = 1\,.$$

Esimene mõte, mis pähe tuleb, on kasutada valemit $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$ ning esitada $\cos 80^\circ$ kõigepealt $\cos 40^\circ$ kaudu ja viimane omakorda $\cos 20^\circ$ kaudu. Tulemuseks saame 7. astme avaldise $\cos 20^\circ$ suhtes, millega pole midagi mõistlikku peale hakata.

Sihile viib hoopis valem $2\sin\alpha\cos\alpha = \sin 2\alpha$, millega saame tõestatava võrduse vasaku poole avaldist teleskoopsumma laadse võttega lihtsustada. Korrutame seda avaldist suurusega $\sin 20^\circ$:

$$
\begin{aligned}
8 \cdot \sin 20^\circ \cdot \cos 20^\circ \cdot \cos 40^\circ \cdot \cos 80^\circ &= 4 \cdot \sin 40^\circ \cdot \cos 40^\circ \cdot \cos 80^\circ = \\
&= 2 \cdot \sin 80^\circ \cdot \cos 80^\circ = \sin 160^\circ\,.
\end{aligned}
$$

Kuna $\sin 20^\circ = \sin 160^\circ$, järeldubki siit, et $8 \cdot \cos 20^\circ \cdot \cos 40^\circ \cdot \cos 80^\circ = 1$.

18.10 On kaks mõistlikku teisendust, mida ülesande avaldise liidetavatega teha saab. Esiteks võime kasutada võrdust $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ ning asendada $\beta + \gamma = 180^\circ - \alpha$

ja/või $\gamma + \alpha = 180^\circ - \beta$. Teiseks võime kasutada nurkade summa ja vahe koosinuse valemeid. Sihile viib see, kui kasutada ühel korral esimest ja kahel korral teist teisendust:

$$\begin{aligned}
&a \cdot \cos(\beta + \gamma) + b \cdot \cos(\gamma + \alpha) + c \cdot \cos(\alpha - \beta) = \\
&= a \cdot \cos(180^\circ - \alpha) + b \cdot \cos\gamma \cos\alpha - b \cdot \sin\gamma \sin\alpha + c \cdot \cos\alpha \cos\beta + c \cdot \sin\alpha \sin\beta = \\
&= -\, a \cdot \cos\alpha + b \cdot \cos\gamma \cos\alpha - b \cdot \sin\gamma \sin\alpha + c \cdot \cos\alpha \cos\beta + c \cdot \sin\alpha \sin\beta\,.
\end{aligned}$$

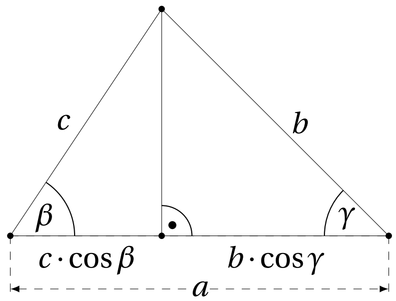
Siinusteoteemist teame, et $b \cdot \sin\gamma = c \cdot \sin\beta$, järelikult

$$-b \cdot \sin\gamma \sin\alpha + c \cdot \sin\alpha \sin\beta = 0$$

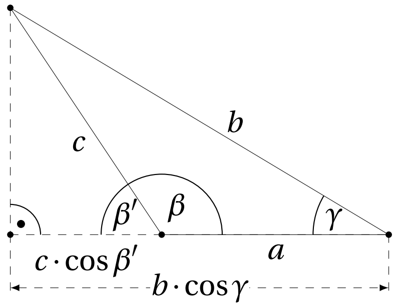
ja ülalleitud avaldist saab edasi lihtsustada järgmiselt:

$$-a \cdot \cos\alpha + b \cdot \cos\gamma \cos\alpha + c \cdot \cos\alpha \cos\beta = \cos\alpha \cdot (-a + b \cdot \cos\gamma + c \cdot \cos\beta)\,.$$

Ülesande lahendamiseks piisab, kui näitame, et $a = b \cdot \cos\gamma + c \cdot \cos\beta$. Seda saab elegantselt teha geomeetrilise interpretatsiooni abil. Tõmbame küljele pikkusega $a$ kõrguse ning vaatleme eraldi juhte, kui selle kõrguse aluspunkt langeb küljele või sellest väljapoole.




Kui kõrguse aluspunkt asub küljel pikkusega $a$ (sh erijuhul kolmnurga tipus), on $b \cdot \cos\gamma$ ja $c \cdot \cos\beta$ teiste külgede projektsioonide pikkused sellele küljele, mistõttu kehtibki võrdus $a = b \cdot \cos\gamma + c \cdot \cos\beta$.




Kui kõrguse aluspunkt jääb küljest väljapoole, peab üks kolmnurga nurkadest olema nürinurk; olgu see üldisust kitsendamata $\beta$. Tähistame $\beta' = 180^\circ - \beta$. Siis on teiste külgede projektsioonide pikkused külje $a$ sirgele vastavalt $b \cdot \cos\gamma$ ja $c \cdot \cos\beta'$. Kokkuvõttes saame

$$a = b \cdot \cos\gamma - c \cdot \cos\beta' = b \cdot \cos\gamma - c \cdot \cos(180^\circ - \beta) = b \cdot \cos\gamma + c \cdot \cos\beta\,.$$

Niisiis kehtib vajalik võrdus ka sel juhul.

18.11 Vastus: b) ei.

a) Tähistame $y = \dfrac{\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x}}{2}$ ja teisendame:

$$\begin{aligned}
y^2 &= \frac{1+\sin x + 2\sqrt{(1+\sin x)(1-\sin x)} + 1 - \sin x}{4},\\
4y^2 &= 2+2\sqrt{1-\sin^2 x} = 2+2\sqrt{\cos^2 x},\\
2y^2 &= 1+|\cos x|.
\end{aligned}$$

Edasi vaatleme kahte võimalust.

Kui $\cos x \geqslant 0$, siis

$$2y^2 = 1+\cos x = 1+\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2} = 2\cos^2\frac{x}{2},$$

kust järeldub $y^2 = \cos^2\dfrac{x}{2}$ ehk $y = \pm\cos\dfrac{x}{2}$.

Kui $\cos x < 0$, siis

$$2y^2 = 1-\cos x = 1-\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2} = 2\sin^2\frac{x}{2},$$

kust järeldub $y^2 = \sin^2\dfrac{x}{2}$ ehk $y = \pm\sin\dfrac{x}{2}$.

b) Peame näitama, et realiseerub neli erinevat juhtu:

- $\cos x > 0$, $\cos\dfrac{x}{2} > 0$ ja $\cos\dfrac{x}{2} \notin \left\{\sin\dfrac{x}{2}, -\sin\dfrac{x}{2}, -\cos\dfrac{x}{2}\right\}$: sobib näiteks $x = 0°$;
- $\cos x > 0$, $\cos\dfrac{x}{2} < 0$ ja $-\cos\dfrac{x}{2} \notin \left\{\sin\dfrac{x}{2}, -\sin\dfrac{x}{2}, \cos\dfrac{x}{2}\right\}$: sobib näiteks $x = 360°$;
- $\cos x < 0$, $\sin\dfrac{x}{2} > 0$ ja $\sin\dfrac{x}{2} \notin \left\{-\sin\dfrac{x}{2}, \cos\dfrac{x}{2}, -\cos\dfrac{x}{2}\right\}$: sobib näiteks $x = 100°$;
- $\cos x < 0$, $\sin\dfrac{x}{2} < 0$ ja $-\sin\dfrac{x}{2} \notin \left\{\sin\dfrac{x}{2}, \cos\dfrac{x}{2}, -\cos\dfrac{x}{2}\right\}$: sobib näiteks $x = 540°$.

# III Arvuteooria