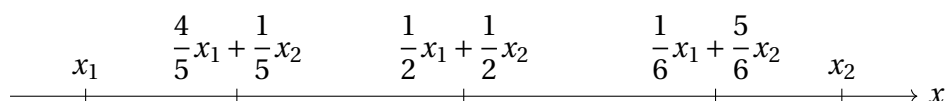


16. Jenseni võrratus

Jenseni võrratus¹ on väga tugev ja üldine tulemus, mis võimaldab teatud tüüpi ülesannetele väga elegantseid lahendusi leida.

16.1 Kumerad ja nõgusad funktsioonid

Vaatleme kõigepealt arvtelge ning sellel kahte reaalarvu $x_1 < x_2$. Kuidas kirjeldada kõiki arve lõigust $[x_1; x_2]$? Selleks võime valida parameetri $\lambda \in [0; 1]$ ja seada sellele vastavusse arvu $x_1 + \lambda(x_2 - x_1) = (1 - \lambda)x_1 + \lambda x_2$. Lihtne on näha, et kui $\lambda = 0$, on selle avaldise väärtus x_1 , kui $\lambda = 1$, siis saame x_2 , aga kui näiteks $\lambda = \frac{1}{2}$, on tulemuseks $\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 = \frac{x_1 + x_2}{2}$. Mõned arvud/punktid paiknevad lõigul $[x_1; x_2]$ näiteks nii:

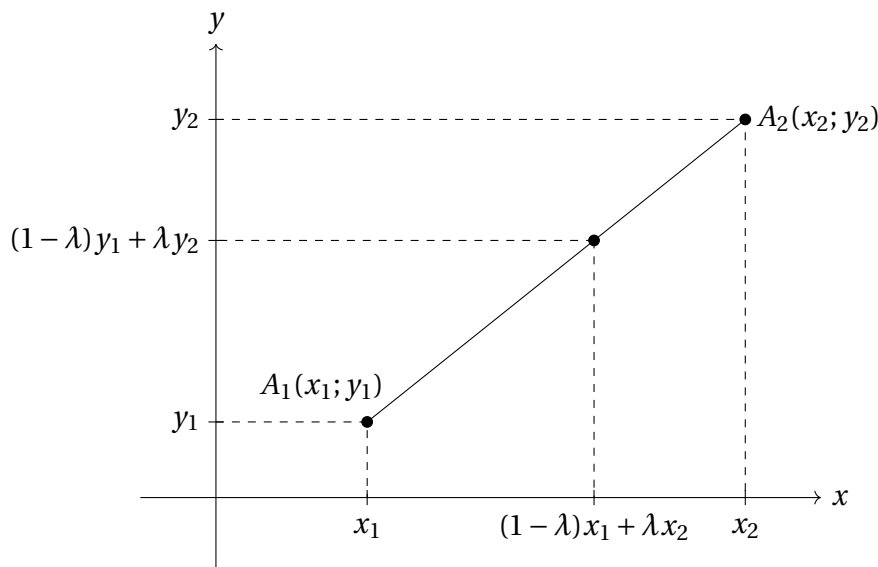


Punktil $(1 - \lambda)x_1 + \lambda x_2$ on olemas lihtne füüsikaline interpretatsioon. Vaadeldes süsteemi kahest punktmassist koordinaatidega x_1 ja x_2 ning massidega vastavalt m_1 ja m_2 , on $\frac{m_1}{m_1 + m_2}x_1 + \frac{m_2}{m_1 + m_2}x_2$ täpselt selle punktisüsteemi massikeskme koordinaat. Jääb tähele panna, et $\frac{m_1}{m_1 + m_2} + \frac{m_2}{m_1 + m_2} = 1$, niisiis saab kordajad $\frac{m_1}{m_1 + m_2}$ ja $\frac{m_2}{m_1 + m_2}$ seada täpselt vastavusse kordajatega $1 - \lambda$ ja λ .

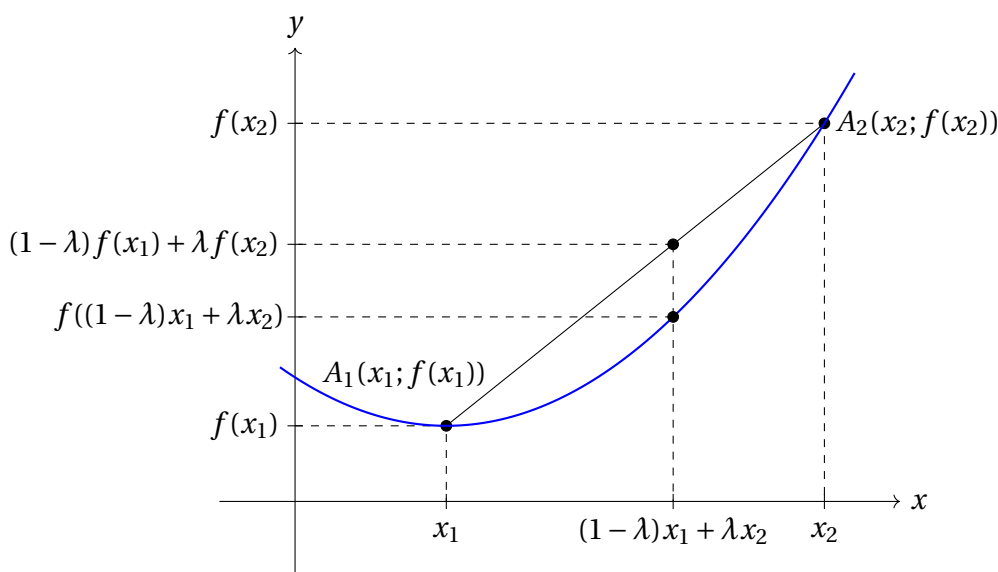
Teisest küljest võib mõelda nii, et kui parameeter λ “libiseb” ühtlase kiirusega mööda lõiku $[0; 1]$, “libiseb” arv $(1 - \lambda)x_1 + \lambda x_2$ ühtlase kiirusega mööda lõiku $[x_1; x_2]$.

Sarnane intuitsioon kehtib ka kahemõõtmelisel juhul. Kui meil on antud punktid $A_1(x_1; y_1)$ ja $A_2(x_2; y_2)$, “libiseb” punkt koordinaatidega $((1 - \lambda)x_1 + \lambda x_2; (1 - \lambda)y_1 + \lambda y_2)$ mööda lõiku $A_1 A_2$.

¹Selle võrratuse tõestas Taani matemaatik Johan Ludwig William Valdemar Jensen (1859–1925).



Vaatleme nüüd funktsiooni $y = f(x)$ ning olgu A_1 ja A_2 kaks punkti selle funktsiooni graafikult.



Joonisel kujutatud funktsiooni graafik on “kausjas”, kumerusega allapoole. Niisugust graafikut nimetatakse kooliprogrammis *nõgusaks*. Omajagu segadusttekitavalt nimetatakse kõrgemas matemaatikas nõgusa graafikuga funktsiooni aga hoopis *kumeraks*. Siinses raamatus kasutame kõrgemast matemaatikast pärinevat terminoloogiat, aga lugeja peab valmis olema selleks, et mõnes teises allikas võivad kumeruse ja nõgususe mõisted vastupidises kasutuses olla.

Õnneks saab segadust alati lahendada üheseltmõistetava matemaatilise definitsiooni abil.

Definitsioon 16.1 Ütleme, et funktsioon on *kumer* lõigul $[a; b]$, kui mistahes reaalarvude $x_1, x_2 \in [a; b]$ ja $\lambda \in [0; 1]$ korral kehtib võrratus

$$(1 - \lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2) \geq f((1 - \lambda)x_1 + \lambda x_2).$$

Kui samadel eeldustel kehtib alati vastupidine võrratus, nimetame seda funktsiooni *nõgusaks* lõigul $[a; b]$.

Sisuliselt kirjeldab kumera funktsiooni definitsioon joonisel toodud olukorda, kus funktsiooni graafikul on võetud kõõl A_1A_2 ning selle kõõlu projektsioonil x -teljele “libisetakse” parameetri λ abil läbi kõik väärtused lõigust $[x_1; x_2]$. Kui vastav kõõlu punkt $(1 - \lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2)$ on alati vähemalt sama kõrgel kui funktsiooni väärtus $f((1 - \lambda)x_1 + \lambda x_2)$ samal kohal, ongi tegu kumera funktsiooniga (ja nõgusa graafikuga).

Paneme tähele, et lineaarfunktsioon (mille graafik kujutab endast sirget) on definitsiooni 16.1 järgi korruga nii kumer kui nõgus.

Funktsiooni kumeruse-nõgususe üle mingis piirkonnas saab vajadusel otsustada kooliprogrammist tuttava teoreemi alusel.

Teoreem 16.1 Eksisteerigu funktsioonil f lõigul $[a; b]$ teine tuletis. Funktsioon f on lõigul $[a; b]$ kumer (nõgus) parajasti siis, kui $f''(x) \geq 0$ ($f''(x) \leq 0$) mistahes $x \in (a; b)$ korral.

Definitsioon 16.1 on antud lõigu jaoks, aga teda saab lihtsasti laiendada ka olukorrale, kus tegemist on poollõigu või vahemikuga (st kus üks või mõlemad otspunktid on lõigust välja arvatud). Nii näiteks saame öelda, et tangensfunktsioon on kumer poollõigul $[0^\circ; 90^\circ)$, aga mitte lõigul $[0^\circ; 90^\circ]$, sest ta pole argumenti väärtuse 90° korral määratud. Logaritmifunktsioon aga on nõgus piirkonnas $(0; \infty)$.

16.2 Jenseni võrratus

Kirjutame definitsiooni 16.1 võrratuse veidi ümber. Olgu meil kaks arvu $\lambda_1, \lambda_2 \in [0; 1]$ nii, et $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$. Funktsiooni f kumerus lõigul $[a; b]$ tähendab siis, et iga $x_1, x_2 \in [a; b]$ korral kehtib võrratus

$$\lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) \geq f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2).$$

Jenseni võrratus väidab, et samasugune seos kehtib ka siis, kui kummalgi pool võrratusemärki on rohkem kui kaks liidetavat.

Teoreem 16.2 Olgu f on lõigul $[a; b]$ kumer funktsioon, $n \geq 2$ ja $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in [0; 1]$ sellised reaalarvud, et $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = 1$. Kehtib võrratus

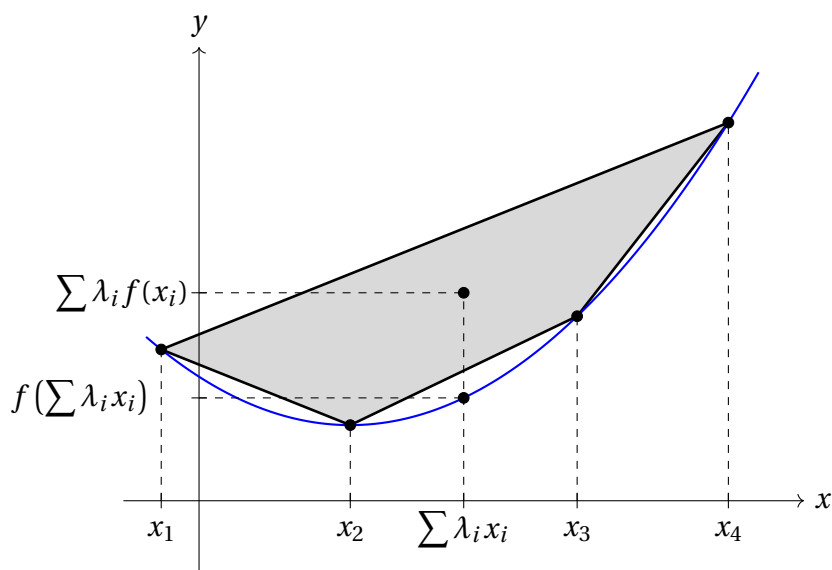
$$\lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \dots + \lambda_n f(x_n) \geq f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n).$$

Kui f on lõigul $[a; b]$ nõgus, kehtib vastupidine võrratus.

Ka sellel võrratusel on olemas ilus füüsikalise-geomeetriline tõlgendus. Vaatleme funktsiooni f graafikul punkte $A_1(x_1; f(x_1)), A_2(x_2; f(x_2)), \dots, A_n(x_n; f(x_n))$ ning olgu nad järjestatud x -koordinaadi kasvamise järjekorras (võrratus sellest ei sõltu). Hulknurk $A_1A_2 \dots A_n$ on tänu funktsiooni kumerusele (või nõgususele!) kumer.

Rakendame igasse punkti A_i massi λ_i ($i = 1, 2, \dots, n$) ning vaatleme saadavatest punktmassidest koosnevat süsteemi. Selle süsteemi massikese asub punktis koordinaatidega $(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n; \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \dots + \lambda_n f(x_n))$. Teisest küljest asub see massikese tänu tingimusele $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in [0; 1]$ hulknurga $A_1A_2 \dots A_n$ sisepiirkonnas või rajajoonel. Igal juhul ei ole ta y -telje suunas madalamal (või nõgusal juhul kõrgemal) kui funktsiooni väärtus samal kohal $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n$. Kokkuvõttes saamegi

teoreemi 16.2 võrratuse.



Ülaltoodud arutelu ei saa lugeda päris täielikuks tõestuseks (näiteks me ei tõestanud rangelt, et tingimusest $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in [0; 1]$ järeldeb massikeskme asumine hulknurga sisepiirkonnas või rajajoonel). Täielikkuse huvides anname siinkohal ka range algebralise tõestuse.

Sõnastame ja tõestame kõigepealt järgmise abitulemuse.

Teoreem 16.3 Olgu täidetud teoreemi 16.2 eeldused ning kehtigu lisaks $\lambda_1 \neq 0$. Siis kumeral juhul kehtib iga $k = 2, 3, \dots, n$ korral võrratus

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \dots + \lambda_k} f(x_1) + \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \dots + \lambda_k} f(x_2) + \dots + \frac{\lambda_k}{\lambda_1 + \dots + \lambda_k} f(x_k) \geq f\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \dots + \lambda_k} x_1 + \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \dots + \lambda_k} x_2 + \dots + \frac{\lambda_k}{\lambda_1 + \dots + \lambda_k} x_k\right).$$

Tõestus. Kasutame matemaatilist induktsiooni k järgi. Baasjuhul $k = 2$ on meil võrratus

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} f(x_1) + \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} f(x_2) \geq f\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} x_1 + \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} x_2\right).$$

Kuna $\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} + \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} = 1$, vastab see täpselt funktsiooni kumeruse definitsioonile ja baasjuht kehtib triviaalselt.

Eeldame nüüd teoreemi väite kehtivust mingi k jaoks ja hindame tõestatava võrra-

tuse vasakut poolt $k + 1$ korral:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \dots + \lambda_{k+1}} f(x_1) + \dots + \frac{\lambda_k}{\lambda_1 + \dots + \lambda_{k+1}} f(x_k) + \frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_1 + \dots + \lambda_{k+1}} f(x_{k+1}) = \\
 & = \frac{\lambda_1 + \dots + \lambda_k}{\lambda_1 + \dots + \lambda_{k+1}} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \dots + \lambda_k} f(x_1) + \dots + \frac{\lambda_k}{\lambda_1 + \dots + \lambda_k} f(x_k) \right) + \\
 & \quad + \frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_1 + \dots + \lambda_{k+1}} f(x_{k+1}) \geq \\
 & \geq \frac{\lambda_1 + \dots + \lambda_k}{\lambda_1 + \dots + \lambda_{k+1}} f \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \dots + \lambda_k} x_1 + \dots + \frac{\lambda_k}{\lambda_1 + \dots + \lambda_k} x_k \right) + \\
 & \quad + \frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_1 + \dots + \lambda_{k+1}} f(x_{k+1}) \geq \\
 & \geq f \left(\frac{\lambda_1 + \dots + \lambda_k}{\lambda_1 + \dots + \lambda_{k+1}} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \dots + \lambda_k} x_1 + \dots + \frac{\lambda_k}{\lambda_1 + \dots + \lambda_k} x_k \right) + \right. \\
 & \quad \left. + \frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_1 + \dots + \lambda_{k+1}} x_{k+1} \right) = \\
 & = f \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \dots + \lambda_{k+1}} x_1 + \dots + \frac{\lambda_k}{\lambda_1 + \dots + \lambda_{k+1}} x_k + \frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_1 + \dots + \lambda_{k+1}} x_{k+1} \right).
 \end{aligned}$$

Esimeses võrratuses kasutasime induktsiooni eeldust k korral, teises võrratuses aga rakendasime baasjuhtu kordajatega $\frac{\lambda_1 + \dots + \lambda_k}{\lambda_1 + \dots + \lambda_{k+1}}$ ja $\frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_1 + \dots + \lambda_{k+1}}$ (paneme tähele, et nende summa on 1). Induktsiooni samm on sellega lõpetatud. \square

Paneme tähele, et kuna $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = 1$, saame juhul $k = n$ teoreemist 16.3 täpselt teoreemi 16.2 väite. Lisaks tegime eelduse $\lambda_1 \neq 0$, mis tagas, et ühegi teoreemi 16.3 sõnastuses ja tõestuses esineva murru nimetaja pole 0. Lihtne on näha, et see eeldus ei kitsenda üldisust, sest mõni λ_i peab tänu tingimusele $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = 1$ kindlasti positiivne olema. Vajadusel võime muutujad lihtsalt ümber nummerdada, kusjuures soovi korral isegi nii, et geomeetrilises interpretatsioonis veedeldud hulknurk $A_1 A_2 \dots A_n$ jääb kumeraks. Nõgusa funktsiooni korral on tõestus kumera juhuga analoogiline.

Ka teoreemi 16.3 tõestusel on olemas füüsikalise-geomeetiline interpretatsioon. Sisuliselt vaatleme induktsiooni igal sammul hulknurka $A_1 A_2 \dots A_k$ ning tõestame tema jaoks Jenseni võrratuse. Üleminek hulknurgalt $A_1 A_2 \dots A_k$ hulknurgale $A_1 A_2 \dots A_k A_{k+1}$ toimub nii, et me koondame massi $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k$ hulknurga $A_1 A_2 \dots A_k$ massikeskmesse ning lisame sellele punkti A_{k+1} , kuhu on rakendatud mass λ_{k+1} . Saadava kahepunktilise süsteemi massikeske langeb täpselt kokku hulknurga $A_1 A_2 \dots A_k A_{k+1}$ massikeskme.

16.3 Jenseni võrratuse võrdusejuhust

Kui paljude klassikaliste võrratuste võrdusejuht on suhteliselt lihtne, siis Jenseni võrratusega on selles natuke rohkem nuputamist.

Kasutame eeltoodud geomeetrilist interpretatsiooni ja küsime, millal võib hulknurga $A_1 A_2 \dots A_n$ massikeske sattuda funktsiooni f graafikule? Selleks on kolm (üksteist mitteväljavõetavat) võimalust.

1. Funktsiooni graafik on vaadeldavas piirkonnas sirglõik. See tähendab muuhulgas, et kõik punktid A_1, A_2, \dots, A_n ja hulknurga $A_1 A_2 \dots A_n$ massikeske asuvad sellel sirgel.

2. Üks kordaja $\lambda_i = 1$ ja kõik ülejäänud kordajad on nullid. See tähendab, et kogu punktsüsteemi mass on koondatud tippu A_i , mis on siis ühtlasi ka süsteemi massikeskmeks.
3. $x_1 = x_2 = \dots = x_n$, st hulknurk $A_1 A_2 \dots A_n$ kidub üheks punktiks, mis asub funktsiooni f graafikul.

16.4 Jenseni võrratuse rakendusi

Näitame kõigepealt, kuidas mõned klassikalised võrratused Jenseni võrratusest järelduvad.

Funktsioon $f(x) = x^2$ on kumer kogu oma määramispiirkonnas, milleks on kogu reaaltelg. Valime teoreemis 16.2 kordajad $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = \frac{1}{n}$ (mis on üldse väga sagedane valik Jenseni võrratust rakendades). Saame

$$\frac{1}{n}x_1^2 + \frac{1}{n}x_2^2 + \dots + \frac{1}{n}x_n^2 \geq \left(\frac{1}{n}x_1 + \frac{1}{n}x_2 + \dots + \frac{1}{n}x_n\right)^2,$$

$$\sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n}} \geq \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n},$$

millega oleme tõestanud ruutkeskmise ja aritmeetilise keskmise vahelise võrratuse.

Naturaallogaritm aga on oma määramispiirkonnas $(0; \infty)$ nõgus. Valides jälle kordajad $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = \frac{1}{n}$, saame teoreemist 16.2

$$\frac{1}{n} \ln x_1 + \frac{1}{n} \ln x_2 + \dots + \frac{1}{n} \ln x_n \leq \ln \left(\frac{1}{n} x_1 + \frac{1}{n} x_2 + \dots + \frac{1}{n} x_n \right),$$

$$\ln(\sqrt[n]{x_1} \cdot \sqrt[n]{x_2} \cdot \dots \cdot \sqrt[n]{x_n}) \leq \ln \left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \right),$$

$$\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n},$$

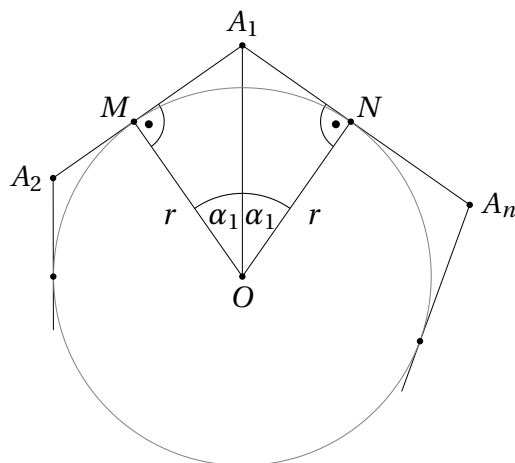
millega oleme tõestanud aritmeetilise ja geomeetrilise keskmise vahelise võrratuse.

Harjutus 16.1 Funktsioon $f(x) = \frac{1}{x}$ on kumer piirkonnas $(0; \infty)$. Millise võrratuse saad selle funktsiooni abil Jenseni võrratusest, valides kordajateks $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = \frac{1}{n}$?

Jenseni võrratust saab kasutada ka geomeetriliste võrratuste tõestamisel, kasutades ära trigonomeetriliste funktsioonide kumerust-nõgusust vastavates piirkondades.

Järeldus 16.1 Olgu antud täisarv $n \geq 3$ ja ringjoon raadiusega r . Kõigi niisuguste n -nurkade seas, millele see ringjoon on siseringjooneks, on kõige väiksema pindalaga korrapärane n -nurk.

Tõestus. Vaatleme suvalist ülesande tingimustele vastavat n -nurka $A_1 A_2 \dots A_n$ ja tema tippu A_1 . Olgu ülesande ringjoone keskpunkt O ning puutugu küljed $A_1 A_2$ ja $A_n A_1$ seda ringjoont vastavalt punktides M ja N .



Puutujalõikude võrdsuse tõttu $|A_1M| = |A_1N|$, samuti $|OM| = |ON| = r$ ja $\angle A_1MO = \angle A_1NO = 90^\circ$. Niisiis on A_1MO ja A_1NO kongruentsed täisnurksed kolmnurgad. Olgu nende tipu O juures asuva teravnurga suurus α_1 . Siis $|A_1M| = r \cdot \tan \alpha_1$ ja

$$S_{A_1MON} = 2S_{A_1MO} = 2 \cdot \frac{|A_1M| \cdot |OM|}{2} = r^2 \cdot \tan \alpha_1.$$

Defineerides sama moodi nurgad $\alpha_2, \dots, \alpha_n$ näeme, et vaadeldava n -nurga pindala avaldub kujul

$$S = r^2 (\tan \alpha_1 + \tan \alpha_2 + \dots + \tan \alpha_n).$$

Kuna kõik nurgad α_i on teravnurgad ja tangensfunktsioon on vahemikus $(0^\circ; 90^\circ)$ kumer, saame sellele tangensite summale rakendada Jenseni võrratust, mis kordajatega $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = \frac{1}{n}$ annab

$$\frac{1}{n} \tan \alpha_1 + \frac{1}{n} \tan \alpha_2 + \dots + \frac{1}{n} \tan \alpha_n \geq \tan \left(\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n}{n} \right) = \tan \left(\frac{180^\circ}{n} \right).$$

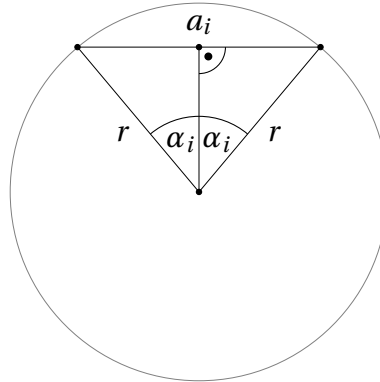
Niisiis saame

$$S \geq n \cdot r^2 \cdot \tan \left(\frac{180^\circ}{n} \right).$$

Viimase võrratuse parem pool kirjeldab aga täpselt sellise n -nurga pindala, mille puhul $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = \frac{180^\circ}{n}$, st korrapärast n -nurka. \square

Järeldus 16.2 Olgu antud täisarv $n \geq 3$ ja ringjoon raadiusega r . Kõigi sellesse ringjoonde joonestatud kõõl- n -nurkade seas on kõige suurema übermõõduga korrapärane n -nurk.

Tõestus. Vaatleme antud ringjoonde joonestatud kõõlhulknurga ühte külge pikkusega a_i ning olgu sellele küljele vastav kesknurk $2\alpha_i$. Ringjoone keskpunkti O küljele tõmmatud kõrgus poolitab selle külje ning on ühtlasi ka nurgapoolitaks (vt teoreem 32.1).



Järelikult $\sin \alpha_i = \frac{a_i/2}{r} = \frac{a_i}{2r}$, millest saame $a_i = 2r \sin \alpha_i$. Kõõlhulknurga ümbermõõt on seega

$$P = 2r(\sin \alpha_1 + \sin \alpha_2 + \dots + \sin \alpha_n),$$

kusjuures $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = \frac{360^\circ}{2} = 180^\circ$. (Juhul, kui punkt O ei asu hulknurga sees, loeme, et pikimale küljele a_i vastav kesknurk $2\alpha_i$ on suurem kui 180° . On lihtne mõista, et kogu eelpool toodud arutelu läheb siis endiselt läbi.)

Siinusfunktsioon on vahemikus $(0^\circ; 180^\circ)$ nõrgus, järelikult saame rakendada Jenseni võrratust, mis kordajatega $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = \frac{1}{n}$ annab

$$\frac{1}{n} \sin \alpha_1 + \frac{1}{n} \sin \alpha_2 + \dots + \frac{1}{n} \sin \alpha_n \leq \sin \left(\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n}{n} \right) = \sin \left(\frac{180^\circ}{n} \right).$$

Kokkuvõtteks saame

$$P \leq 2nr \sin \left(\frac{180^\circ}{n} \right),$$

kus võrratuse paremal pool on täpselt korrapärase n -nurga ümbermõõt. □

Ülesanded

Ülesanne 16.1 (Piirkonnavor 2012, 12. klass) Kumb on suurem, kas $\ln 2011 + \ln 2013$ või $2 \ln 2012$?

Ülesanne 16.2 (Piirkonnavor 2015, 11. klass) Tõesta, et $\sin 20^\circ > \frac{1}{3}$.

Ülesanne 16.3 (Lõppvoor 2014, 12. klass) Olgu I kolmnurga ABC siseringjoone keskpunkt. Olgu R_A , R_B ja R_C vastavalt kolmnurkade BIC , CIA ja AIB ümberringjoonte raadiused ning R kolmnurga ABC ümberringjoone raadius. Tõesta, et

$$R_A + R_B + R_C \leq 3R.$$

Ülesanne 16.4 (Lõppvoor 2006, 12. klass) Olgu O teravnurkse kolmnurga ABC ümberringjoone keskpunkt ning A' , B' ja C' vastavalt kolmnurkade BCO , CAO ja ABO ümberringjoonte keskpunktid. Tõesta, et kolmnurga $A'B'C'$ pindala on vähemalt niisama suur kui kolmnurga ABC pindala.

Vaata ka ülesandeid 37.16 ja 37.23.

Lahendused

16.1 Vastus: $2\ln 2012$ on suurem.

Logaritmifunktsioon on kogu oma määramispiirkonnas nõgus. Valime Jenseni võrratuses $x_1 = 2011$, $x_2 = 2013$ ja $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{2}$, mis annab

$$\frac{1}{2}\ln 2011 + \frac{1}{2}\ln 2013 < \ln\left(\frac{1}{2}\cdot 2011 + \frac{1}{2}\cdot 2013\right) = \ln 2012.$$

Paneme tähele, et võrratus on range, sest ükski jaotises 16.3 toodud võrdusejuhtudest ei realiseeru.

16.2 Siinusfunktsioon on lõigul $[0^\circ; 180^\circ]$ nõgus. Valime Jenseni võrratuses $x_1 = 0^\circ$, $x_2 = 30^\circ$, $\lambda_1 = \frac{1}{3}$ ja $\lambda_2 = \frac{2}{3}$, mis annab

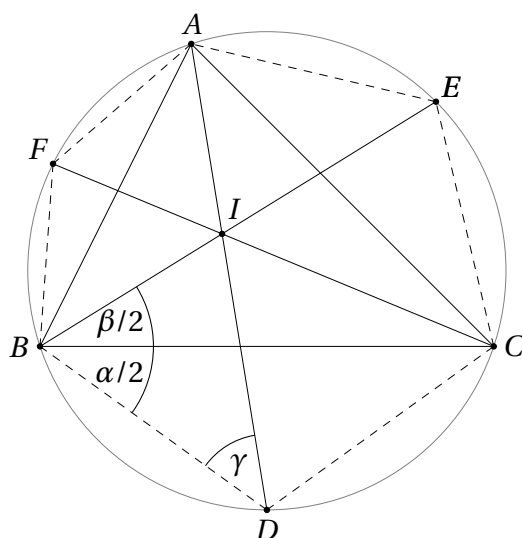
$$\frac{1}{3}\sin 0^\circ + \frac{2}{3}\sin 30^\circ < \sin\left(\frac{1}{3}\cdot 0^\circ + \frac{2}{3}\cdot 30^\circ\right),$$

$$\frac{1}{3} < \sin 20^\circ.$$

Paneme tähele, et võrratus on range, sest ükski jaotises 16.3 toodud võrdusejuhtudest ei realiseeru.

16.3 Lahenduse võti on näidata et kolmnurkade BIC , CIA ja AIB ümberringjoonte keskpunktid asuvad kolmnurga ABC ümberringjoonel.

Olgu kolmnurga ABC nurkade suurused vastavalt α, β ja γ ning olgu selle kolmnurga nurgapoolitajate teised lõikepunktid ümberringjoonega vastavalt D, E ja F . Nende punktide näol on siis muuhulgas tegemist vastavalt (lühemate) kaarte AB, BC ja CA keskpunktidega. Seega siis muuhulgas $|BD| = |CD|$. Näitame, et ka $|BD| = |ID|$, st D on kolmnurga BIC ümberringjoone keskpunkt. Teeme joonise.



Kuna $ABDC$ on kõõnelinurk, saame $\angle BDI = \angle BDA = \angle BCA = \gamma$ ja $\angle CBD = \angle CAD = \frac{\alpha}{2}$. Lisaks $\angle EBC = \frac{\beta}{2}$, nii et kokkuvõttes $\angle IBD = \angle EBD = \angle CBD +$

$\angle EBC = \frac{\alpha + \beta}{2}$. Nüüd saame arvutada

$$\angle DIB = 180^\circ - \angle IBD - \angle BDI = 180^\circ - \frac{\alpha + \beta}{2} - \gamma = \frac{\alpha + \beta}{2},$$

sest $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$. Kokkuvõttes oleme näidanud, et $\angle DBI = \angle IBD$, millest järeldubki, et $|BD| = |ID|$. Muuhulgas saame, et D on kolmnurga BIC ümberringjoone keskpunkt ja $R_A = |BD| = |CD|$.

Täpselt analoogiliselt tõestame, et $R_B = |CE| = |AE|$ ja $R_C = |AF| = |BF|$. Järelikult on kõõlkuurnurga $AFBDCE$ übermõõt $2(R_A + R_B + R_C)$. Kuna korrapärase kõõlkuusnurga übermõõt on $6R$, piisab ülesande lahendamiseks näidata, et fikseeritud raadiusega ringjoonesse joonestatud kõõlkuusnurkade seas on suurim übermõõt korrapärasel kuusnurgal. Selle väite kehtivuse aga tõestamine järelduses 16.2.

16.4 Olgu kolmnurga ABC ümberringjoone raadius R ja keskpunkt O ning tippude A, B ja C juures asuvad nurgad vastavalt α, β ja γ . Kesk- ja piirdenurga vahelisest seosest teame, et $\angle BOC = 2\angle BAC = 2\alpha$ ning analoogiliselt $\angle COA = 2\beta$ ja $\angle AOB = 2\gamma$.

Kuna kolmnurk ABC on teravnurkne, asub punkt O tema sisepiirkonnas. Järelikult

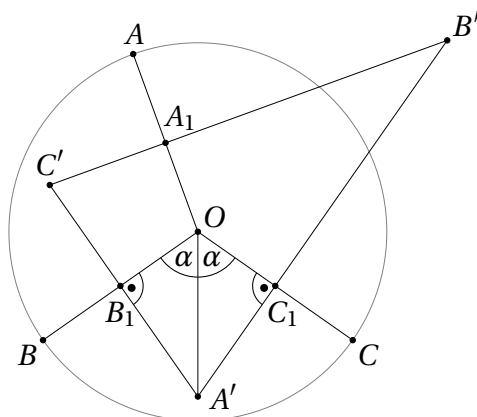
$$\begin{aligned} S_{ABC} &= S_{BOC} + S_{COA} + S_{AOB} = \frac{1}{2}R^2 \sin 2\alpha + \frac{1}{2}R^2 \sin 2\beta + \frac{1}{2}R^2 \sin 2\gamma = \\ &= \frac{1}{2}R^2 (\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma). \end{aligned}$$

Et $2\alpha, 2\beta, 2\gamma \in (0, 180^\circ)$ ning siinusfunktsioon on selles piirkonnas nõgus, saame kasutada Jenseni võrratust, mis annab

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} (\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma) &\leq \sin \left(\frac{2\alpha + 2\beta + 2\gamma}{3} \right) = \sin \left(\frac{360^\circ}{3} \right) = \\ &= \sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

Kokkuvõttes oleme näidanud, et $S_{ABC} \leq \frac{3\sqrt{3}}{4}R^2$.

Punkt A' on kolmnurga BCO ümberringjoone keskpunkt, järelikult asub ta lõikude BO ja CO keskristsirgete lõikepunktis. Sama moodi on B' lõikude AO ja CO ning C' lõikude AO ja BO keskristsirgete lõikepunkt. Olgu A_1, B_1 ja C_1 vastavalt lõikude AO, BO ja CO keskpunktid. Teeme joonise.



Punktid B_1 ja C_1 on sümmeetrilised nurga BOC poolitaja suhtes. Järelikult on sümmeetrilised ka neist punktidest tõmmatud ristsirged, mistõttu nende lõikepunkt A' asub nurga BOC poolitajal. Kuna $\angle BOC = 2\alpha$, saame kokkuvõttes $\angle B_1OA' = \angle C_1OA' = \alpha$. Kuivõrd ka $\angle A'B_1O = \angle A'C_1O = 90^\circ$ ja $|B_1O| = |C_1O| = \frac{R}{2}$, on kolmnurgad $A'B_1O$ ja $A'C_1O$ kongruentsed tunnuse NKN põhjal.

Täisnurksest kolmnurgast $A'B_1O$ saame $\tan \alpha = \frac{|A'B_1|}{|B_1O|}$, millest omakorda $|A'B_1| = |B_1O| \cdot \tan \alpha = \frac{R \tan \alpha}{2}$. Järelikult

$$S_{A'B_1OC_1} = 2S_{A'B_1O} = 2 \cdot \frac{|A'B_1| \cdot |B_1O|}{2} = \frac{R \tan \alpha}{2} \cdot \frac{R}{2} = \frac{R^2 \tan \alpha}{4}.$$

Analoogiliselt leiame

$$S_{B'C_1OA_1} = \frac{R^2 \tan \beta}{4} \quad \text{ja} \quad S_{C'A_1OB_1} = \frac{R^2 \tan \gamma}{4},$$

millest omakorda

$$S_{A'B'C'} = S_{A'B_1OC_1} + S_{B'C_1OA_1} + S_{C'A_1OB_1} = \frac{R^2}{4} (\tan \alpha + \tan \beta + \tan \gamma).$$

Et $\alpha, \beta, \gamma \in (0, 90^\circ)$ ning tangensfunktsioon on selles piirkonnas kumer, saame jälle kasutada Jenseni võrratust, mis annab

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} (\tan \alpha + \tan \beta + \tan \gamma) &\geq \tan \left(\frac{\alpha + \beta + \gamma}{3} \right) = \tan \left(\frac{180^\circ}{3} \right) = \\ &= \tan 60^\circ = \sqrt{3}. \end{aligned}$$

Siit järeldub, et $S_{A'B'C'} \geq \frac{3\sqrt{3}}{4} R^2 \geq S_{ABC}$, mida oligi tarvis tõestada.

