

15. Cauchy(-Bunjakovski-Schwarzi) võrratus

Cauchy võrratus (mida tuntakse ka Cauchy-Bunjakovski-Schwarzi¹ võrratusena) ei esine Eesti matemaatikaolümpiaadidel väga sageli, kuid tema tundmine aitab mõnele ülesannetele lihtsamaid lahendusi leida. Samuti kuulub Cauchy võrratus kindlalt rahvusvaheliste olümpiaadide “õppekavasse”.

Sõnastame ja tõestame kõigepealt selle võrratuse lihtsama kuju.

Teoreem 15.1 Suvaliste reaalarvude a_1, a_2, b_1, b_2 korral kehtib võrratus

$$(a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2) \geq (a_1 b_1 + a_2 b_2)^2.$$

Võrdus kehtib parajasti siis, kui vektorid (a_1, a_2) ja (b_1, b_2) on samasihilised (või kui üks neist on nullvektor).

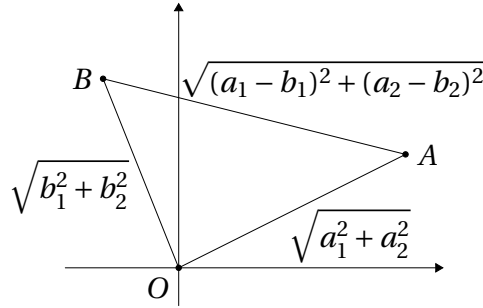
Tõestus. Kui $(a_1, a_2) = (0, 0)$ või $(b_1, b_2) = (0, 0)$, siis on võrratuse mõlemad pooled võrdsed nulliga ja võrratus kehtib. Järgnevas eeldame, et (a_1, a_2) ja (b_1, b_2) pole nullvektorid.

Paneme tähele, et avaldised $(a_1^2 + a_2^2)$ ja $(b_1^2 + b_2^2)$ on vektorite (a_1, a_2) ja (b_1, b_2) pikkuste ruudud. Selle asjaolu ärakasutamiseks vaatleme tasandil punkte $A(a_1, a_2)$, $B(b_1, b_2)$ ja $O(0, 0)$. Siis $|OA| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$, $|OB| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2}$ ja $|AB| = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}$, vt joonist 15.1.

Kuna \vec{OA} ja \vec{OB} pole nullvektorid, on $\angle AOB$ üheselt määratud. Kasutame koosinusteoreemi:

$$|AB|^2 = |OA|^2 + |OB|^2 - 2 \cdot |OA| \cdot |OB| \cdot \cos(\angle AOB).$$

¹Võrratuse avaldas esmakordselt prantsuse matemaatik Augustin-Louis Cauchy [koš'i:] aastal 1821. Selle üldistustega tegelesid hiljem vene matemaatik Viktor Bunjakovski ja saksa matemaatik Hermann Schwarz.



Joonis 15.1

Teisendame seda võrdust:

$$\begin{aligned}
 2 \cdot |OA| \cdot |OB| \cdot \cos(\angle AOB) &= |OA|^2 + |OB|^2 - |AB|^2, \\
 2\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2} \cos(\angle AOB) &= a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2 - (a_1 - b_1)^2 - (a_2 - b_2)^2, \\
 2\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2} \cos(\angle AOB) &= 2a_1b_1 + 2a_2b_2, \\
 \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2} \cos(\angle AOB) &= a_1b_1 + a_2b_2, \\
 (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2) \cos^2(\angle AOB) &= (a_1b_1 + a_2b_2)^2.
 \end{aligned}$$

Kuna $\cos^2(\angle AOB) \leq 1$, siis järelikult

$$(a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2) \geq (a_1b_1 + a_2b_2)^2,$$

mida oligi tarvis tõestada.

Võrdus kehtib parajasti siis kui $\cos(\angle AOB) = \pm 1$, ehk $\angle AOB = 0^\circ$ või $\angle AOB = 180^\circ$, st kui punktid O , A ja B asuvad ühel sirgel ehk vektorid \vec{OA} ja \vec{OB} on samasihilised (kuid võivad olla vastassuunalised!). \square

Teoreemi 15.1 tõestuse saab lihtsalt üldistada ka kolmemõõtmeliste vektoritele. Edasi aga läheb raskeks, sest nelja- ja enamamõõtmeliste vektorite vahelist nurka on raske ette kujutada, rääkimata siis veel selle nurga koosinuse arvutamisest. Üldistus kõrgemamõõtmeliste vektoritele siiski kehtib, lihtsalt tõestusmeetod tuleb valida teistsugune.

Teoreem 15.2 Olgu antud naturaalarv $n \geq 2$. Suvaliste reaalarvude a_1, a_2, \dots, a_n ja b_1, b_2, \dots, b_n korral kehtib võrratus

$$(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) \geq (a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n)^2.$$

Võrdus kehtib parajasti siis, kui vektorid (a_1, a_2, \dots, a_n) ja (b_1, b_2, \dots, b_n) on samasihilised (või kui üks neist on nullvektor). Teisisõnu, võrdus kehtib parajasti siis, kui leidub selline reaalarv c , et $b_i = c \cdot a_i$ iga indeksi i korral (või kui $a_i = 0$ iga indeksi i korral).

Tõestus. Moodustame ruutpolünoomi

$$P(x) = (a_1x - b_1)^2 + (a_2x - b_2)^2 + \dots + (a_nx - b_n)^2.$$

Avame sulud ja koondame sarnased liikmed:

$$P(x) = (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)x^2 - 2(a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n)x + (b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2).$$

Kuna $P(x)$ on defineeritud kui ruutude summa, kehtib iga x korral $P(x) \geq 0$. Järelikult on tema diskriminant mittepositiivne, seega

$$4(a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n)^2 - 4(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) \leq 0,$$

millest järeldubki tõestatav võrratus.

Võrdusejuhu saame siis, kui $P(x) = 0$, st kui leidub lahend x nii, et $a_ix = b_i$ iga indeksi i korral. (Lisaks kehtib võrdus triviaalsel juhul, kui $P(x)$ ei moodusta ruutpolünoomi, st $a_i = 0$ iga indeksi i korral.) \square

Et Cauchy võrratus sisaldab suurusi $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2$ ja $b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2$, tuleb tema kasutamiseks sageli vaadelda ülesandes antud väärtuste ruutjuuri.

Ülesanne 15.1 Olgu $P(x)$ mittenegatiivsete kordajatega polünoom. Tõesta, et kõigi reaalarvude $x, y \in \mathbb{R}$ korral kehtib võrratus

$$P(x^2)P(y^2) \geq P(xy)^2.$$

Lahendus. Olgu $P(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots + c_nx^n$, kus $c_i \geq 0$ iga indeksi i jaoks. Siis

$$P(x^2) = c_0 + c_1x^2 + c_2x^4 + \dots + c_nx^{2n}.$$

Et kasutada Cauchy võrratust, peaks see avaldis olema $a_0^2 + a_1^2 + \dots + a_n^2$ mingi vektori (a_0, a_1, \dots, a_n) jaoks. Loomulik on valida $a_i = \sqrt{c_i}x_i$ iga indeksi i korral, st $(a_0, a_1, \dots, a_n) = (\sqrt{c_0}, \sqrt{c_1}x, \dots, \sqrt{c_n}x^n)$. Sama moodi valime $(b_0, b_1, \dots, b_n) = (\sqrt{c_0}, \sqrt{c_1}y, \dots, \sqrt{c_n}y^n)$. Siis saame

$$\begin{aligned} P(x^2)P(y^2) &= (a_0^2 + a_1^2 + \dots + a_n^2)(b_0^2 + b_1^2 + \dots + b_n^2) \geq \\ &\geq (a_0b_0 + a_1b_1 + \dots + a_nb_n)^2 = \\ &= (c_0 + c_1xy + \dots + c_nx^ny^n)^2 = P(xy)^2. \end{aligned}$$

Ülesanded

Ülesanne 15.2 (Piirkonnavoor 2000, 10. klass) Tõesta, et mistahes positiivsete reaalarvude a, b, c, d korral kehtib võrratus

$$ab + cd \leq \sqrt{a^2 + c^2} \cdot \sqrt{b^2 + d^2}.$$

Ülesanne 15.3 (2014 piirkonnavoor, 11. klass) Leia kõik positiivsed täisarvud n , mille korral leiduvad positiivsed reaalarvud x_1, x_2, \dots, x_n nii, et

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = 2014 \quad \text{ja} \quad \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} = 2014.$$

Ülesanne 15.4 (Sügisene lahtine võistlus 2018, vanem rühm) Olgu n ja k positiivsed täisarvud, mille korral $k \leq n$. Tõesta võrratus

$$\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} + \dots + \frac{1}{n} \geq \frac{2(n-k+1)}{n+k}.$$

Ülesanne 15.5 (Talvine lahtine võistlus 2017, vanem rühm) Tõesta, et kõigi positiivsete reaalarvude x, y, z korral

$$\frac{y^2 z}{x} + y^2 + z \geq \frac{9y^2 z}{x + y^2 + z}.$$

Ülesanne 15.6 (Lõppvoor 1997, 10. klass) Tõesta, et mistahes reaalarvude x ja y korral kehtib võrratus

$$x^2 + y^2 + 1 > x\sqrt{y^2 + 1} + y\sqrt{x^2 + 1}.$$

Lahendused

15.2 Teoreemi 15.1 põhjal teame, et kehtib võrratus

$$(ab + cd)^2 \leq (a^2 + c^2) \cdot (b^2 + d^2).$$

Kuna eelduse põhjal on suurus $ab + cd$ positiivne (nagu muidugi ka $a^2 + c^2$ ja $b^2 + d^2$), võib võrratuse mõlemast poolest ruutjuure võtta ja võrratus jääb kehtima.

15.3 Vektorite $(\sqrt{x_1}, \sqrt{x_2}, \dots, \sqrt{x_n})$ ja $\left(\frac{1}{\sqrt{x_1}}, \frac{1}{\sqrt{x_2}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{x_n}}\right)$ jaoks saame Cauchy võrratusest

$$\begin{aligned} & ((\sqrt{x_1})^2 + \dots + (\sqrt{x_n})^2) \left(\left(\frac{1}{\sqrt{x_1}}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{\sqrt{x_n}}\right)^2 \right) \geq \\ & \geq \left(\sqrt{x_1} \frac{1}{\sqrt{x_1}} + \dots + \sqrt{x_n} \frac{1}{\sqrt{x_n}} \right)^2 \end{aligned}$$

ehk

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_n) \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} \right) \geq n^2.$$

Ülesande tingimuste põhjal saame siis $2014^2 \geq n^2$ ehk $2014 \geq n$.

Juhul $n = 1$ lahendit ilmselt ei leidu. Näitamaks, et $n \geq 2$ puhul saab sobiva konstruktsiooni anda, paneme kõigepealt tähele, et võrrandil $x + \frac{1}{x} = a$ leidub positiivne lahend iga $a \geq 2$ korral. Tõepoolest, vastava ruutvõrrandi $x^2 - ax + 1 = 0$ diskriminant $a^2 - 4$ on tänu tingimusele $a \geq 2$ mittenegatiivne. Võrrandi $x + \frac{1}{x} = a$ lahendi positiivsus on samuti ilmne, sest muuhulgas $a > 0$.

Olgu siis $2 \leq n \leq 2014$. Valime $a = 2014 - (n - 2)$; kuna $n \leq 2014$, siis $a \geq 2$. Olgu x võrrandi $x + \frac{1}{x} = a$ lahend. Nüüd on näha, et otsitavaks vektoriks (x_1, x_2, \dots, x_n) saame valida $\left(x, \frac{1}{x}, \underbrace{1, 1, \dots, 1}_{n-2}\right)$.

Niisiis sobivad vastuseks kõik täisarvud $n = 2, 3, \dots, 2014$.

15.4 Cauchy võrratusest vektorite $\left(\frac{1}{\sqrt{k}}, \frac{1}{\sqrt{k+1}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ ja $(\sqrt{k}, \sqrt{k+1}, \dots, \sqrt{n})$ jaoks saame

$$\begin{aligned} \left(\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)^2, \left(\frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)^2, \dots, \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2\right) \cdot \left((\sqrt{k})^2, (\sqrt{k+1})^2, \dots, (\sqrt{n})^2\right) = \\ \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} + \dots + \frac{1}{n}\right) \cdot (k + (k+1) + \dots + n) \geq \underbrace{(1+1+\dots+1)}_{n-k+1}^2 = \\ = (n-k+1)^2. \end{aligned}$$

Aritmeetilise jada summa valem annab

$$k + (k+1) + \dots + n = \frac{k+n}{2} \cdot (n-k+1),$$

niisiis

$$\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} + \dots + \frac{1}{n}\right) \cdot \frac{k+n}{2} \cdot (n-k+1) \geq (n-k+1)^2.$$

millest järeldubki vajalik võrratus.

Teise võimaliku lahenduse annab ülesanne 14.31.

15.5 Teisendame tõestatava võrratuse kujule

$$\left(\frac{y^2z}{x} + y^2 + z\right)(x + y^2 + z) \geq 9y^2z.$$

Näeme, et vasakule poolele saab rakendada Cauchy võrratust, valides $(a_1, a_2, a_3) = \left(\sqrt{\frac{y^2z}{x}}, \sqrt{y^2}, \sqrt{z}\right)$ ja $(b_1, b_2, b_3) = (\sqrt{x}, \sqrt{y^2}, \sqrt{z})$:

$$\begin{aligned} \left(\frac{y^2z}{x} + y^2 + z\right)(x + y^2 + z) \geq \left(\sqrt{\frac{y^2z}{x}} \cdot \sqrt{x} + \sqrt{y^2} \cdot \sqrt{y^2} + \sqrt{z} \cdot \sqrt{z}\right)^2 = \\ = \left(\sqrt{y^2z} + y^2 + z\right)^2. \end{aligned}$$

Aritmeetilise ja geomeetrilise keskmise vahelisest võrratusest saame

$$\frac{\sqrt{y^2z} + y^2 + z}{3} \geq \sqrt[3]{\sqrt{y^2z} \cdot y^2 \cdot z} = \sqrt{y^2z},$$

niisiis

$$\left(\sqrt{y^2z} + y^2 + z\right)^2 \geq \left(3\sqrt{y^2z}\right)^2 = 9y^2z,$$

kust järeldubki vajalik võrratus.

Teise võimaliku lahenduse annab ülesanne 14.30

15.6 Paneme tähele, et piisab, kui tõestame võrratuse mittenegatiivsete x ja y jaoks. Tõepoolest, kui asendada mittenegatiivne x või y väärtus tema vastandarvuga, saab võrratuse parem pool ainult väiksemaks minna.

Caychy võrratusest teame, et iga x ja y korral kehtib

$$(x^2 + y^2) \left(\left(\sqrt{y^2 + 1} \right)^2 + \left(\sqrt{x^2 + 1} \right)^2 \right) \geq \left(x\sqrt{y^2 + 1} + y\sqrt{x^2 + 1} \right)^2,$$

$$(x^2 + y^2)(x^2 + y^2 + 2) \geq \left(x\sqrt{y^2 + 1} + y\sqrt{x^2 + 1} \right)^2.$$

Eelduse põhjal on kõik avaldistes esinevad väärtused mittenegatiivsed, järelikult võime võrratuse mõlemast poolest ruutjuure võtta:

$$\sqrt{(x^2 + y^2)(x^2 + y^2 + 2)} \geq x\sqrt{y^2 + 1} + y\sqrt{x^2 + 1}.$$

Aritmeetilise ja geomeetrilise keskmise vahelisest võrratusest saame

$$\sqrt{(x^2 + y^2)(x^2 + y^2 + 2)} \leq \frac{(x^2 + y^2) + (x^2 + y^2 + 2)}{2} = x^2 + y^2 + 1.$$

Võrdus saaks kehtida ainult siis, kui $x^2 + y^2 = x^2 + y^2 + 2$, mis on aga võimatu. Järelikult kehtib tegelikult range võrratus.